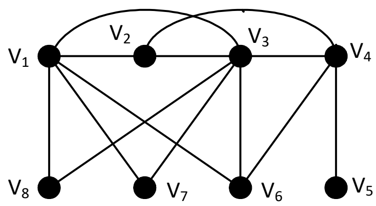
Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Ορισμοί – Βασικές Έννοιες – Βαθμοί Κορυφών

1) Στο παρακάτω γράφημα βρείτε:
   i) Το $\delta(G)$
   ii) Το $\Delta(G)$
   iii) Την ακολουθία των βαθμών κορυφών του γραφήματος
   iv) Τον μέσο βαθμό των κορυφών



   Απάντηση

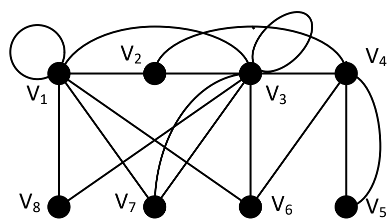
   Τον ελάχιστο βαθμό έχει η κορυφή v_1 και άρα $\delta(G) = 1$. Τον μέγιστο βαθμό έχει η κορυφή v_3 και συνεπώς $\Delta(G) = 6$. Η ακολουθία των βαθμών του γραφήματος είναι (6,5,4,3,3,2,2,1). Τέλος, ο μέσος βαθμός των κορυφών είναι (6+5+4+3+3+2+2+1)/8=26/8=13/4.

2) Στο γράφημα του ερωτήματος 1 επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας.

   Απάντηση

   Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι 26 (υπολογίστηκε παραπάνω). Οι ακμές είναι 13 και άρα ισχύει το Λήμμα της Χειραψίας.

3) Επαναλάβετε τα ερωτήματα 1 και 2 για το παρακάτω γράφημα.

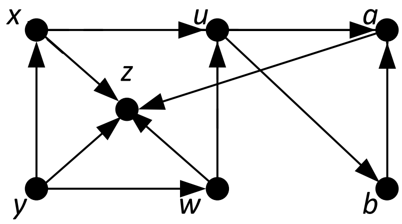


   Απάντηση

   $\delta(G) = 2$. (Οι κορυφές v_8 και v_5.) Το $\Delta(G)$=9 (η κορυφή v_3). Η ακολουθία των βαθμών του γραφήματος είναι (9,7,5,3,3,3,2,2). Ο μέσος βαθμός είναι

9+7+5+3+3+3+2+2=34/8=17/4. Οι ακμές είναι 17 και άρα επιβεβαιώνεται το Λήμμα.

4) Υπολογίστε τους έσω και έξω-βαθμούς των κορυφών του παρακάτω κατευθυντικού γραφήματος. Στην συνέχεια επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας για κατευθυντικά γραφήματα.



Απάντηση

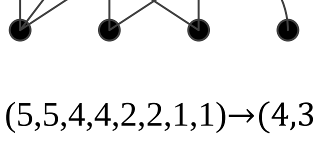
Έσω βαθμοί: $d^-(x)=1$, $d^-(u)=2$, $d^-(a)=2$, $d^-(b)=1$, $d^-(w)=1$, $d^-(y)=0$, $d^-(z)=4$.
Έξω βαθμοί: $d^+(x)=2$, $d^+(u)=2$, $d^+(a)=1$, $d^+(b)=1$, $d^+(w)=2$, $d^+(y)=3$, $d^+(z)=0$.
Έχουμε: $\sum_{v\in V} d^-(v) = \sum_{v\in V} d^+(v) = 11$, που είναι και το πλήθος των ακμών.

5) Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γραφικές; Αν είναι σχεδιάστε το αντίστοιχο απλό γράφημα. Αν όχι, αποδείξτε το.
   i) (5,5,4,3,2,2,2,1)
   ii) (5,5,4,4,2,2,1,1)
   iii) (5,5,5,3,2,2,1,1)
   iv) (5,5,5,4,2,1,1,1)

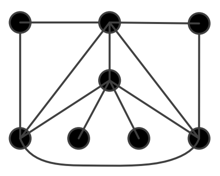
Απάντηση

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της διαδοχικής απαλοιφής των κορυφών μέγιστου βαθμού και έχουμε:

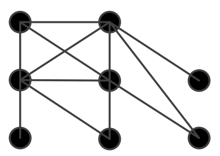
i) (5,5,4,3,2,2,2,1)→(4,3,2,1,1,2,1) ≡ (4,3,2,2,1,1,1) → (2,1,1,0,1,1) ≡ (2,1,1,1,1,0)→(0,0,1,1,0)≡(1,1,0,0,0). Η τελευταία είναι προφανώς γραφική ακολουθία. Ένα γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών είναι το παρακάτω.



ii) (5,5,4,4,2,2,1,1)→(4,3,3,1,1,1,1)→(2,2,0,0,1,1) ≡ (2,2,1,1,0,0) Προφανώς πρόκειται για γραφική ακολουθία. Ένα γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών είναι το παρακάτω.

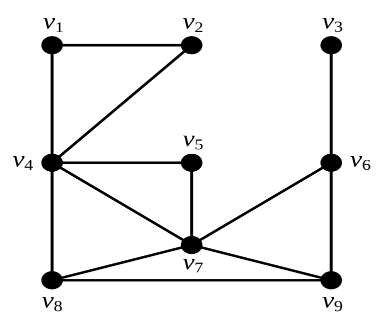


iii) (5,5,5,3,2,2,1,1)→(4,4,2,1,1,1,1)→(3,1,0,0,1,1)≡(3,1,1,1,0,0)→ (0,0,0,0,0). Προφανώς πρόκειται για γραφική ακολουθία. Ένα γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών είναι το παρακάτω.



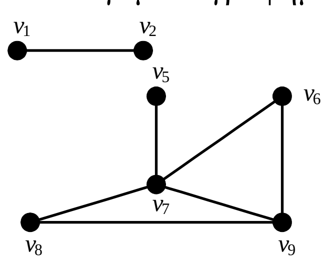
iv) (5,5,5,4,2,1,1,1) →(4,4,3,1,0,1,1) ≡(4,4,3,1,1,1,0)→(3,2,0,0,1,0) ≡ (3,2,1,0,0,0). Προφανώς δεν υπάρχει απλό γράφημα με αυτή την γραφική ακολουθία και άρα δεν υπάρχει και για την αρχική.

6) Για το γράφημα G του σχήματος να βρείτε:
   i) Ένα συνεκτικό υπογράφημα με 6 κορυφές που δεν έχει κύκλους.
   ii) Το επαγόμενο υπογράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.



Απάντηση

i) Ένα τέτοιο υπογράφημα είναι π.χ. το απλό μονοπάτι $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$.
ii) Το επαγόμενο γράφημα φαίνεται παρακάτω.



7) Υπάρχουν απλά γραφήματα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά;

   i) Γράφημα 6 κορυφών, εκ των οποίων 3 έχουν βαθμό 3 και 3 έχουν βαθμό 4.

ii) Γράφημα 7 κορυφών, εκ των οποίων 1 έχει βαθμό 1, 3 έχουν βαθμό 3, 1 έχει βαθμό 4, και 2 έχουν βαθμό 6.

Απάντηση

i) Το άθροισμα των βαθμών ενός τέτοιου γραφήματος θα ήταν $3 \cdot 3+3 \cdot 4=21$, δηλαδή περιττός, άτοπο.

ii) Οι κορυφές βαθμού 6 θα πρέπει αναγκαστικά να συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Όμως τότε δεν θα μπορούσε να υπάρχει κορυφή βαθμού 1.

8) Για το γράφημα G του ερωτήματος 6, βρείτε τα γραφήματα (i) $G-v_4v_5$, (ii) $G-v_7$, (iii) $G \cdot v_8v_7$.

Απάντηση

(i) Αφαίρεση ακμής σημαίνει απλώς διαγραφή της ακμής χωρίς να διαγραφούν τα άκρα της. (ii) Αφαίρεση κορυφής σημαίνει και διαγραφή των ακμών που την έχουν άκρο. Δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση θα διαγραφούν και οι ακμές $v_4v_7, v_5v_7, v_6v_7, v_9v_7, v_8v_7$. (iii) Όταν συμπιεστεί η ακμή v_8v_7, θα αντικατασταθούν οι κορυφές v_7 και v_8 με μία νέα η οποία θα συνδέεται με τις κορυφές v_4 και v_9 με δύο ακμές με την κάθε μία.

9) Σε μια τάξη 9 φοιτητών, κάθε φοιτητής συμπαθεί 3 άλλους. Πείτε αν είναι δυνατόν κάθε φοιτητής να συμπαθιέται από τους 3 φοιτητές τους οποίους συμπαθεί.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε ένα κατάλληλο γράφημα το οποίο αν ήταν εφικτό να υπάρχει θα μοντελοποιούσε την παραπάνω κατάσταση.

Απάντηση

Μοντελοποιούμε την κατάσταση με ένα γράφημα 9 κορυφών (μία κορυφή για κάθε φοιτητή) και ενώνουμε δύο κορυφές με ακμή αν οι αντίστοιχοι φοιτητές συμπαθιούνται. Συνεπώς θα πρέπει να προκύπτει γράφημα όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό 3 (είναι 3-κανονικό). Το άθροισμα των βαθμών ενός τέτοιου γραφήματος θα είναι 9*3=27 που είναι περιττός αριθμός, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

10) Δείξτε ότι ένα απλό γράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές ίδιου βαθμού. Ισχύει το ίδιο σε γράφημα με παράλληλες ακμές αλλά όχι ανακυκλώσεις;

Απάντηση

Έστω n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος. Κάθε κορυφή μπορεί να έχει βαθμό στο διάστημα [0..n-1]. Αν κάθε κορυφή έχει διαφορετικό βαθμό, τότε οι βαθμοί των κορυφών είναι 0,1,2,…n-1. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κορυφή που συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες n-1 κορυφές, το οποίο είναι άτοπο διότι υπάρχει και κορυφή βαθμού 0.

11) Δίνεται ένα γράφημα *G* το οποίο έχει προέλθει από την αφαίρεση μιας κορυφής από ένα κανονικό γράφημα *H* με τουλάχιστον 3 κορυφές και με παράλληλες ακμές (ίσως) αλλά όχι ανακυκλώσεις. Πώς θα μπορούσατε να ανακατασκευάσετε το *H* από το *G*;

Απάντηση

Εφόσον το αρχικό γράφημα *H* ήταν κανονικό όλες οι κορυφές του θα είχαν τον ίδιο βαθμό, έστω *k*. Έστω ότι το πλήθος των κορυφών του G είναι *n*. Το *H* λοιπόν θα είχε $n+1$ κορυφές και $k(n+1)/2$ ακμές. Μετράμε τις ακμές του *G*, έστω m'. Για να κατασκευαστεί το *H* θα πρέπει να προστεθεί μία κορυφή και *k* ακμές. Συνεπώς $m'+k=k(n+1)/2$. Στην εξίσωση αυτή τα *n* και m' είναι γνωστά και συνεπώς από αυτή βρίσκουμε τον κοινό βαθμό *k*. Προσθέτουμε λοιπόν τις *k* ακμές από την νέα κορυφή προς κάθε άλλη με βαθμό μικρότερο από *k*, τόσες ακμές σε μία κορυφή όσες χρειάζονται ώστε ο βαθμός της να γίνει *k*.

12) Ο υπερκύβος Q_n διάστασης n είναι ένα γράφημα που κάθε κορυφή του έχει μία ετικέτα n δυαδικών ψηφίων και το οποίο κατασκευάζεται αναδρομικά ως εξής:

i) Για n=0 είναι μία κορυφή και η ετικέτα του είναι κενή.

ii) Για n>0 ο υπερκύβος Q_n διάστασης n κατασκευάζεται από δύο αντίγραφα του κύβου Q_{n-1} διάστασης n-1 με τον εξής τρόπο: ενώνουμε τις κορυφές με ίδια ετικέτα από κάθε αντίγραφο και δίνουμε σε κάθε κορυφή του κύβου διάστασης n μία ετικέτα που προκύπτει από την ετικέτα n-1 ψηφίων που είχε με ένα επιπλέον «0» στην αρχή αν ανήκε στο πρώτο αντίγραφο Q_{n-1} και «1» αν ανήκε στο δεύτερο αντίγραφο.

α) Σχεδιάστε τους υπερκύβους Q_n για $0 \leq n \leq 4$.

β) Υπολογίστε το πλήθος των κορυφών του υπερκύβου Q_n.

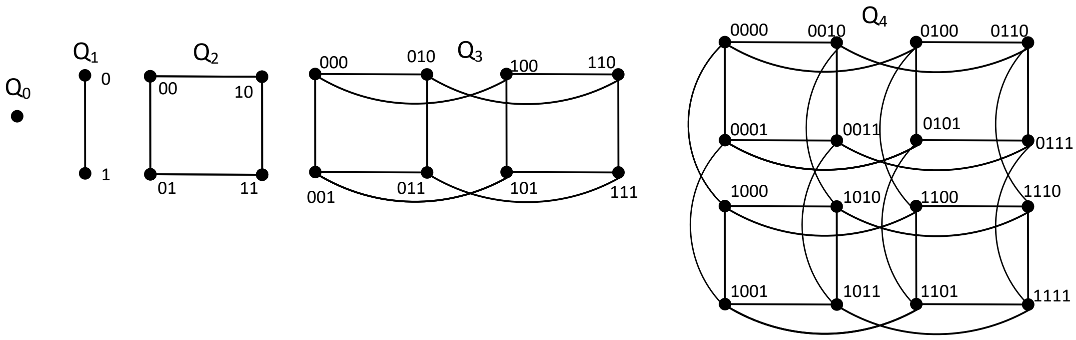
γ) Δείξτε ότι το Q_n είναι κανονικό γράφημα και υπολογίστε τον βαθμό κάθε κορυφής

δ) Υπολογίστε το πλήθος των ακμών του Q_n.

ε) Δείξτε ότι η ετικέτα κάθε κορυφής διαφέρει σε ένα μόνο ψηφίο από την ετικέτα κάθε γειτονικής κορυφής.

Απάντηση

α)



β) Επειδή από τον τρόπο κατασκευής ο Q_{n+1} έχει διπλάσιο πλήθος κορυφών από τον Q_n, και ο Q_0 έχει μία κορυφή, εύκολα φαίνεται ότι ο Q_n έχει 2^n κορυφές.

γ) Ο Q_0 έχει μία κορυφή με βαθμό 0. Επαγωγικά, ο Q_n είναι κανονικό γράφημα με βαθμό κορυφών n. Για το επαγωγικό βήμα, κάθε κορυφή του των δύο αντιγράφων του Q_n συνδέεται με την αντίστοιχη κορυφή του άλλου αντιγράφου και συνεπώς ο βαθμός της στο Q_{n+1} είναι n+1.

δ) Από τα (β) και (γ) και το Λήμμα της Χειραψίας το πλήθος των ακμών του Q_n είναι $2^n n/2=n2^{n-1}$.

ε) Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για τον Q_0 δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Έστω ότι στον Q_n η ετικέτα κάθε κορυφής διαφέρει σε ένα μόνο ψηφίο από την ετικέτα κάθε άλλης κορυφής με τις οποίες συνδέεται. Για την κατασκευή του Q_{n+1}, η πρόσθεση του 0 στον ένα αντίγραφο και του 1 στο άλλο, δεν αλλάζει αυτή την ιδιότητα μεταξύ των κορυφών κάθε αντιγράφου. Επίσης, επειδή ενώνουμε δύο κορυφές στα δύο αντίγραφα με ίδια ετικέτα στις οποίες προσθέτουμε το 0 στην μία και το 1 στην άλλη, συνάγουμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει και μεταξύ γειτονικών κορυφών των διαφορετικών αντιγράφων.

13) Θεωρούμε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές, και για κάθε κορυφή u, συμβολίζουμε με d(u) τον βαθμό της u στο G, και με G_u το γράφημα που προκύπτει από το G αν αφαιρέσουμε την u και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

i) Να δείξετε ότι αν το G δεν περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3), τότε υπάρχουν κορυφές u, v με deg(u) + deg(v) $\leq n$.

ii) Να δείξετε ότι αν το G έχει περισσότερες από n^2 / 4 ακμές και δεν περιέχει τρίγωνο, τότε υπάρχει κορυφή u τέτοια ώστε το G_u να περιέχει *περισσότερες* από $(n – 1)^2$ / 4 ακμές.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι για κάθε φυσικό m, αν $m > n^2 / 4$, τότε και $m – n/2 > (n – 1)^2 / 4$. Μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε, αφού βέβαια πρώτα το αποδείξετε! Ξεχωρίστε περιπτώσεις όπου το n είναι άρτιο ή περιττό.

iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) και μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και περισσότερες από n^2 / 4 ακμές περιέχει τρίγωνο.

Λύση:

α) Προφανώς το ζητούμενο ισχύει όταν το γράφημα G δεν περιέχει ακμές. Άρα, απομένει να αποδείξουμε το ζητούμενο για την περίπτωση όπου υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή στο γράφημα G.

Έστω η αυθαίρετη ακμή (u,v) του γραφήματος G το οποίο δεν περιέχει τρίγωνα. Θα δείξουμε ότι οι κορυφές u και v ικανοποιούν το ζητούμενο, δηλαδή,

$$\deg(u) + \deg(v) \leq n$$

Έστω, προς χάριν της εις άτοπο απαγωγής, ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, δηλαδή έχουμε ότι:

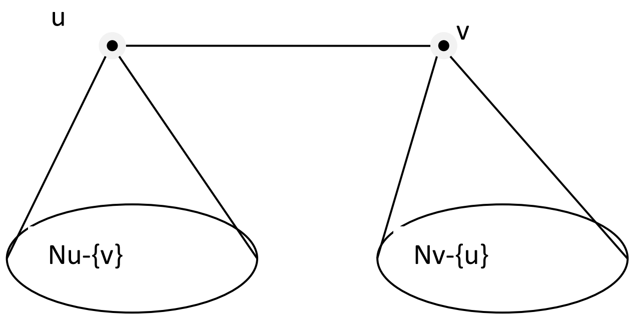
$$\deg(u) + \deg(v) > n \qquad (1)$$

Αυτό ισοδύναμα γράφεται ως:

$$(\deg(u)\text{-}1) + (\deg(v)\text{-}1) > n\text{-}2 \qquad (2)$$

Ας προσπαθήσουμε να δούμε την φυσική έννοια των όρων της (2).

Έστω N_u και N_v το σύνολο των γειτόνων της u και v, αντίστοιχα. Ο όρος $\deg(u)$-1 παριστάνει το πλήθος των γειτόνων της u, εξαιρουμένης της κορυφής v, δηλαδή του συνόλου N_u-$\{v\}$. Παρόμοια, ο όρος $\deg(v)$-1 παριστάνει το πλήθος των γειτόνων της v, εξαιρουμένης της κορυφής u, δηλαδή του συνόλου N_v-$\{u\}$. Παρατηρείστε επίσης ότι τα σύνολα κορυφών N_u-$\{v\}$ και N_v-$\{u\}$ είναι ξένα μεταξύ τους, αλλιώς εάν η x ήταν μια κοινή κορυφή τότε θα σχηματίζονταν το τρίγωνο (u, v) (v, x) (x, u). Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Με δεδομένο το ότι το γράφημα G έχει n κορυφές, έπεται ότι τα σύνολα κορυφών N_u-{v} και N_v-{u} έχουν συνολικά το πολύ n-2 κορυφές. Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η ποσότητα (deg(u)-1) + (deg(v)-1) που ισούται με το πλήθος των στοιχείων τους είναι μεγαλύτερη του n-2.

β) Έστω E_G το σύνολο ακμών του G. Ισχύει ότι

$$|E_G| > n^2/4 \qquad (3)$$

Με δεδομένο ότι το G δεν περιέχει τρίγωνο, υπάρχει μία κορυφή του G η οποία έχει βαθμό ≤ $n/2$. Έστω u η κορυφή αυτή. Τότε για το γράφημα G_u ισχύει ότι:

$$|E_{Gu}| \geq |E_G| - n/2 \qquad (4)$$

Ισχύει όμως επίσης (η απόδειξη είναι στο τέλος της άσκησης) :

$$\forall m \in \mathrm{Z} \quad \mathrm{m} > n^2/4 \Rightarrow m - n/2 > (n-1)^2/4 \qquad (5)$$

Συνεπώς, από την (4) και λόγω της (5) και για $m = E_G$προκύπτει ότι

$$|E_{Gu}| > (n-1)^2/4$$

γ)

Βάση: n=3. Το γράφημα πρέπει να έχει περισσότερες από $3^2/2$ = 9/4 ακμές. Δεδομένου ότι ο αριθμός των ακμών είναι ακέραιος και ότι ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός απλού γραφήματος με 3 κορυφές είναι 3, το γράφημα έχει ακριβώς 3 ακμές. Το μόνο γράφημα όμως με 3 κορυφές και 3 ακμές είναι το «τρίγωνο».

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G με k κορυφές, $n > k \geq 3$, και περισσότερες από k^2 / 4 ακμές περιέχει τρίγωνο.

Επαγωγικό βήμα: Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G με k+1 κορυφές, $n > k+1 > 3$, και περισσότερες από $(k+1)^2 / 4$ ακμές περιέχει τρίγωνο.
Εάν το γράφημα G όντως περιέχει τρίγωνο, το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν, προς χάριν της εις άτοπο απαγωγής, ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, δηλαδή ότι το γράφημα G δεν περιέχει τρίγωνο. Τότε όμως, με βάση το σκέλος (β) της άσκησης που έχει ήδη αποδειχθεί, υπάρχει κόμβος u του γραφήματος G για τον οποίο ισχύει $|E_{Gu}| > (k)^2/4$. Τότε όμως, με βάση την επαγωγική υπόθεση, το γράφημα G_u περιέχει τρίγωνο και κατά συνέπεια και το γράφημα G περιέχει τρίγωνο. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το G δεν περιέχει τρίγωνο. Άρα, το ζητούμενο ισχύει.

Αποδεικνύουμε τώρα το παρακάτω λήμμα που χρησιμοποιήθηκε στην λύση της άσκησης.
Λήμμα: Για φυσικούς αριθμούς m και n, αν $m > n^2 / 4$, τότε και
$m - n/2 > (n - 1)^2 / 4$.
Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι για φυσικούς αριθμούς m και n ισχύει ότι:

$$\mathrm{m} > n^2/4 \Rightarrow m > n^2/4 + 1/2 \qquad (6)$$

Το παραπάνω προκύπτει εξετάζοντας τις περιπτώσεις όπου ο n είναι άρτιος ή περιττός.
Έστω $n=2k$. Τότε το $n^2 / 4 = k^2$ είναι ακέραιος και, λόγω ότι το m είναι φυσικός αριθμός, ισχύει ότι $m > n^2/4 + 1/2$.
Έστω n=2k+1. Τότε το $n^2 / 4 = (k^2+k) + 1/4$ και λόγω ότι το m είναι φυσικός αριθμός, ισχύει ότι $m > n^2/4 + 1/2$.
Ας εξετάσουμε τώρα το ζητούμενο του λήμματος. Το δεξιό μέρος της συνεπαγωγής μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$m - \frac{n}{2} > \frac{(n-1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$m > \frac{n^2 - 2n + 1}{4} + \frac{n}{2} \Leftrightarrow$$

$$m > \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς λόγω της (6). Άρα έχει αποδειχθεί το ζητούμενο.

14) Σε ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα G 10 κορυφών, διάφορο του K_{10}, βάζουμε αυθαίρετη κατεύθυνση στις ακμές του (στην ορολογία της θεωρίας

γραφημάτων αυτό λέγεται *προσανατολισμός του G*), έτσι ώστε να προκύψει ένα κατευθυντικό γράφημα *G'*. Δείξτε ότι δεν μπορούν όλοι οι έξω-βαθμοί των κορυφών του *G'* να είναι διαφορετικοί.

Απάντηση

Εφόσον το γράφημα έχει 10 κορυφές, μία τυχούσα κορυφή μπορεί να έχει έξω βαθμό στο διάστημα [0..9], δηλαδή 10 διαφορετικές τιμές. Αν όλοι οι έξω βαθμοί ήταν διαφορετικοί, θα είχαμε σαν έξω βαθμούς των 10 κορυφών τους φυσικούς 0,1,2,…,9. Το άθροισμα των έξω βαθμών δηλαδή θα ήταν $0+1+2+\cdots+9=45=$πλήθος ακμών. Αυτό όμως είναι το πλήθος των ακμών του K_{10}, άτοπο διότι έχει δοθεί ότι το G δεν είναι το K_{10}.

15) Ένα *πρωτάθλημα* (*tournament*) n κορυφών είναι ένα κατευθυντικό γράφημα n κορυφών με ακριβώς μία (κατευθυντική) ακμή μεταξύ κάθε ζευγαριού κορυφών. (Ο όρος οφείλεται στο ότι μοντελοποιεί τα αποτελέσματα ενός πρωταθλήματος στο οποίο συμμετέχουν οι n ομάδες, κάθε ομάδα παίζει έναν αγώνα με κάθε άλλη και η φορά της ακμής δείχνει την νικήτρια ομάδα, π.χ. η ομάδα από όπου ξεκινά η ακμή νίκησε την ομάδα όπου καταλήγει.) Δείξτε ότι υπάρχει ένα πρωτάθλημα n κορυφών όπου ο έσω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον έξω βαθμό της αν-ν το n είναι περιττό.

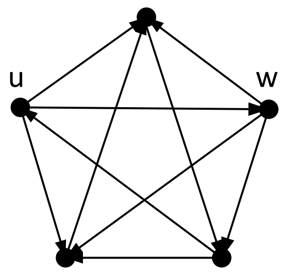
Απάντηση

Το πλήθος των ακμών του υποκείμενου μη κατευθυντικού γραφήματος (που είναι μια κλίκα με n κορυφές) είναι n(n-1)/2. Έστω ότι το P είναι ένα πρωτάθλημα n κορυφών στο οποίο ο έσω βαθμός κάθε κορυφής ισούται με τον έξω βαθμό της και είναι ίσοι με k. Το άθροισμα των έσω βαθμών όλων των κορυφών είναι kn=n(n-1)/2 (όσες οι ακμές). Άρα n=2k+1 που είναι περιττός αριθμός. Αντίστροφα, έστω n≥3 περιττός. Κατασκευάζουμε ένα πρωτάθλημα n κορυφών όπου κάθε κορυφή έχει ίσους έσω και έξω βαθμό. Οι βαθμοί αυτοί θα είναι (n-1)/2. Καλύπτουμε τις ακμές με κατευθυντικούς κύκλους μήκους n διατρέχοντας τις κορυφές του γραφήματος με αυθαίρετη σειρά. Κάθε κύκλος αυξάνει τον έσω και έξω βαθμό κάθε κορυφής κατά 1. (n-1)/2 κύκλοι χρειάζονται για να δημιουργηθεί το πρωτάθλημα και αφού τους προσθέσουμε κάθε κορυφή έχει ίσο έσω και έξω βαθμό.

16) Δείξτε ότι είναι δυνατόν ένα πρωτάθλημα να μην έχει καθαρό νικητή, δηλαδή να υπάρχουν περισσότερες της μίας κορυφής με μέγιστο έξω-βαθμό. (Σχεδιάστε ένα πρωτάθλημα 5 κορυφών με αυτή την ιδιότητα, σαν αντιπαράδειγμα.)

Απάντηση

Στο παρακάτω γράφημα 5 κορυφών οι κορυφές u και w έχουν έξω βαθμό 3 και έσω βαθμό 1. Οι υπόλοιπες τρεις έχουν έξω βαθμό μικρότερο από 3.



17) Δείξτε ότι ένα πρωτάθλημα αν και μπορεί να μην έχει πάντα νικητή (προηγούμενη άσκηση) έχει πάντα έναν «Βασιλιά», δηλαδή μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε νίκησε η x την y είτε νίκησε η x μια κορυφή z που νίκησε την y. Δηλαδή σε όρους γραφημάτων υπάρχει πάντα μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε υπάρχει η ακμή x→ y είτε υπάρχει μια κορυφή z έτσι ώστε να υπάρχουν οι ακμές x→z και z→y.

Απάντηση

Θα το δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του γραφήματος. Όταν n=3, τότε ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό των ακμών, υπάρχει προφανώς Βασιλιάς. Έστω ότι κάθε γράφημα με το πολύ n κορυφές, έχει Βασιλιά. Θεωρούμε ένα γράφημα G με n+1 κορυφές. Έστω u μία κορυφή του G. Λόγω της υπόθεσης, το γράφημα G-u έχει έναν Βασιλιά, έστω την κορυφή x. Αν υπάρχει η ακμή xu, τότε η x είναι Βασιλιάς και στο G. Αν υπάρχει η ux, τότε για κάθε κορυφή y του G-u για την οποία υπάρχει η ακμή x→ y, έχουμε τις ακμές u→x και την x→y. Αν υπάρχει η ακμή y→x, τότε επειδή η x είναι Βασιλιάς στο G-u, θα υπάρχει κορυφή z για την οποία υπάρχουν οι ακμές x→z και z→y. Σε αυτή την περίπτωση αν υπάρχει η ακμή u→z, πάλι η y καλύπτεται από την u μέσω της z και άρα η u είναι Βασιλιάς στο G. Αν πάλι υπάρχει η z→u, τότε λόγω των ακμών x→z και z→u, η u καλύπτεται από την x και άρα η x είναι Βασιλιάς και στο G.

18) Έστω ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα *G* με $n \geq 3$ κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $(n / 2) + 1$. Να δειχθεί ότι το *G* περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3).

Απάντηση

Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2 εξαιτίας του $n \geq 3$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα περιέχει τουλάχιστον μια ακμή. Έστω x και y τα άκρα κάποιας ακμής του γραφήματος G.
Δείχνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή εκτός των x και y που είναι γειτονική με τις x και y (με άλλα λόγια δείχνουμε ότι η κοινή γειτονιά των x και y είναι μη-κενή). Θεωρούμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι κάθε γειτονική κορυφή της x δεν είναι γειτονική κορυφή της y. Τότε θα έχουμε

$n \geq d(x) + d(y)$,
διότι στο άθροισμα των βαθμών τους καμία κορυφή δεν μετριέται παραπάνω από μια φορά. Εξαιτίας όμως του περιορισμού της εκφώνησης θα έχουμε:
$d(x) + d(y) \geq (n / 2) + 1 + (n / 2) + 1 = n + 2$,
και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της προηγούμενης σχέσης.
Επομένως η κοινή γειτονιά των x και y είναι μη-κενή, δηλαδή υπάρχει μια κορυφή w που είναι γειτονική τόσο με την x όσο και με την y. Εφόσον οι κορυφές x και y είναι γειτονικές, οι τρεις κορυφές x, y και w επάγουν τρίγωνο στο γράφημα G.

19) Δείξτε ότι υπάρχει γράφημα G με $n = 10$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

a) $3 \leq d(v) \leq 5$ για κάθε κορυφή του G, (όπου $d(v)$ ο βαθμός της κορυφής v)

b) δεν έχουν όλες οι κορυφές άρτιο βαθμό,

c) δεν υπάρχουν δυο κορυφές περιττού βαθμού με τον ίδιο βαθμό.

Απάντηση:
Έστω το σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.

- Έχουμε μόνο τους βαθμούς {3, 4, 5} από το a).
- Υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή περιττού βαθμού από το b). Είναι γνωστό πως το πλήθος βαθμών περιττού βαθμού είναι άρτιο, επομένως υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές περιττού βαθμού, έστω v_1και v_{10}. Συνεπώς λόγω του c) θα πρέπει $d(v_1) = 3$ και $d(v_{10}) = 5$.
- Όλες οι υπόλοιπες θα πρέπει να έχουν βαθμό $d(v_i) = 4$.
- Από την ακολουθία βαθμών {3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5} έχουμε το εξής γράφημα: