Ασκήσεις Προτασιακής Λογικής

Απαντήσεις σε επιλεγμένα ερωτήματα

1) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **προτασιακοί τύποι**, ποιες όχι, και γιατί;

(1)	$(p \to (q \to r)) \to q$	(2)	$\neg (s \neg (p \to q) \to r) \to s$
(3)	$p \to (q \to r) \to (p \to r)$	(4)	$\neg\neg p \wedge \neg q \to \neg r \vee p$
(5)	$\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(6)	$(p \neg \vee q \to p \vee \neg q) \to p \wedge q$
(7)	$\neg\neg (\neg p \vee q) \to p$	(8)	$p \to (q \to p) \to q$
(9)	$p \wedge q \vee (r \wedge s)$	(10)	$p \vee (q \wedge r) \to (p \to r)$
(11)	$\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	(12)	$\neg (\neg (\neg (p \to q) \to r) \to s)$

Για όσες εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμα τους, και υπολογίστε το ύψος του και τον αριθμό των υποτύπων που υπάρχουν σε αυτό. (Δείτε στις διαφάνειες του 1^{ου} μαθήματος τους ορισμούς αυτών των εννοιών.)

Απάντηση

(1) Σ – Ύψος 3

(2) Λ

(3) Λ

(4) Σ – Ύψος 4

(5) Σ – Ύψος 3

(6) Λ

(7) Σ – Ύψος 5

(8) Λ

(9) Λ

(10) Σ – Ύψος 3

(11) Σ – Ύψος 3

(12) Σ – Ύψος 6

2) Τέσσερις φοιτητές Α, Β, Γ, Δ καλούνται να λάβουν μέρος σε μια εκδήλωση. Αν $p_Α$, $p_Β$, $p_Γ$, $p_Δ$ είναι προτασιακές μεταβλητές που αληθεύουν αν και μόνο αν ο αντίστοιχος φοιτητής θα συμμετέχει στην εκδήλωση, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους που εκφράζουν τις παρακάτω δηλώσεις:

   i) Στην εκδήλωση θα συμμετέχει τουλάχιστον ένας, αλλά όχι και οι τέσσερις φοιτητές.
   ii) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν όλοι ή κανένας από τους τέσσερις φοιτητές.
   iii) Αν συμμετέχει ο Α, τότε δεν θα συμμετέχει ο Δ και ο Β θα συμμετέχει αν και μόνο αν συμμετέχει ο Γ.
   iv) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν τρεις ακριβώς φοιτητές εκ των οποίων ένας θα είναι ο Α.

Απάντηση

i) $(p_A \vee p_B \vee p_Γ \vee p_Δ) \wedge (\neg(p_A \wedge p_B \wedge p_Γ \wedge p_Δ))$

ii) $(p_A \wedge p_B \wedge p_Γ \wedge p_Δ) \vee (\neg p_A \wedge \neg p_B \wedge \neg p_Γ \wedge \neg p_Δ)$

iii) $(p_A \rightarrow \neg p_Δ) \wedge (p_B \leftrightarrow p_Γ)$

iv) $(p_A \wedge p_B \wedge p_Γ \wedge \neg p_Δ) \vee (p_A \wedge p_B \wedge p_Δ \wedge \neg p_Γ) \vee (p_A \wedge p_Γ \wedge p_Δ \wedge \neg p_B)$

3) Εκφράστε με τύπους της Προτασιακής Λογικής κάθε μια από τις παρακάτω δηλώσεις αφού εισάγετε προτασιακές μεταβλητές που να κωδικοποιούν κατάλληλα επιλεγμένες προτάσεις της φυσικής γλώσσας.

   - Ο Γιάννης έχει αυτοκίνητο.
   - Δεν είναι δυνατόν ο Γιάννης να είναι ανήλικος και να έχει δίπλωμα οδήγησης.
   - Αν ο Γιάννης δεν έχει δίπλωμα οδήγησης, τότε δεν έχει αυτοκίνητο.

Απάντηση

Εισάγουμε τις προτασιακές μεταβλητές για τις αντίστοιχες δηλώσεις:

p: Ο Γιάννης έχει αυτοκίνητο

q: Ο Γιάννης έχει δίπλωμα οδήγησης

r: Ο Γιάννης είναι ανήλικος

Με την βοήθεια των παραπάνω προτασιακών μεταβλητών, οι παραπάνω δηλώσεις γίνονται:

- p

- $\neg(r \wedge q)$
- $\neg q \rightarrow \neg p$

4) Έστω τέσσερις προτασιακές μεταβλητές p_1, p_2, p_3, p_4 και S ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1,2,3,4\}$. Οι τέσσερις προτασιακές μεταβλητές ερμηνεύονται ως εξής: *p_k είναι αληθής αν και μόνο αν το στοιχείο k ανήκει στο S*. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές p_k, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους (οι οποίοι να εμπλέκουν αποκλειστικά τις τέσσερις προτασιακές μεταβλητές) που εκφράζουν κάθε μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

   i) Το S είναι κενό.
   ii) Το S έχει το πολύ τρία στοιχεία
   iii) Το S έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Απάντηση

i) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4)$
ii) $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$
iii) $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_4) \vee (p_2 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_3 \wedge p_4)$

5) Στη σύγκλητο της αρχαίας Ρώμης, οι τρεις ύποπτοι για το φόνο του Ιούλιου Καίσαρα δηλώνουν:

   - Μάρκος Αντώνιος: «*Το έκανε ο Κάσσιος ή ο Βρούτος (ή και οι δύο)*»
   - Κάσσιος: «*Δεν το έκανα εγώ. Ο Μάρκος Αντώνιος λέει ψέματα*»
   - Βρούτος: «*Αν το έκανα εγώ, τότε οι άλλοι δύο είναι συνένοχοι μου*».

   Υποθέτοντας ότι οι αθώοι λένε πάντα αλήθεια, ενώ οι ένοχοι πάντα ψέματα και ότι μόνο ένας από τους τρεις λέει αλήθεια, ποιος (ή ποιοί) σκότωσε τον Ιούλιο Καίσαρα;

Απάντηση

Ορίζουμε τις προτασιακές μεταβλητές

p: Το έκανε ο Μάρκος Αντώνιος

q: Το έκανε ο Κάσσιος

r: Το έκανε ο Βρούτος

Συνεπώς οι καταθέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

- Μάρκος Αντώνιος: $q \vee r$

- Κάσσιος: $\neg q \wedge \neg(q \vee r)$
- Βρούτος: $r \rightarrow p \wedge q$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας των παραπάνω τύπων:

p	q	r	$q \vee r$	$\neg q \wedge \neg(q \vee r)$	$r \rightarrow p \wedge q$
Α	Α	Α	Α	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Εφόσον οι αθώοι λένε πάντα αλήθεια ενώ οι ένοχοι πάντα ψέμματα και μόνο ένας από τους τρεις λέει την αλήθεια, αναζητούμε γραμμή στον πίνακα όπου οι τιμές των μεταβλητών που δείχνουν την αθωότητα ή όχι ενός υπόπτου έχουν την αντίθετη τιμή από την δήλωση του, αλλά και οι τρεις τελευταίες στήλες της έχουν ένα Α και δύο Ψ. Η μοναδική τέτοια γραμμή είναι η σημειωμένη και άρα ο Κάσσιος και ο Βρούτος σκότωσαν τον Ιούλιο Καίσαρα.

6) Έστω οι προτασιακές μεταβλητές p, q, r οι οποίες κωδικοποιούν τις ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:
   - p: Ο καιρός είναι καλός
   - q: Έχει ηλιοφάνεια
   - r: Έχει κρύο

   Γράψτε προτάσεις της φυσικής γλώσσας που να αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους.

   i) $q \wedge p \rightarrow \neg r$
   ii) $p \rightarrow (q \vee \neg r)$
   iii) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
   iv) $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$
   v) $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$

Απάντηση

i) Αν έχει ηλιοφάνεια και ο καιρός είναι καλός, τότε δεν έχει κρύο.
ii) Αν ο καιρός είναι καλός, τότε είτε έχει ηλιοφάνεια είτε δεν έχει κρύο.
iii) Ο καιρός είναι καλός και δεν έχει ηλιοφάνεια ούτε κρύο.
iv) Έχει ηλιοφάνεια και δεν έχει κρύο ή δεν έχει ηλιοφάνεια και έχει κρύο.

v) Ο καιρός είναι καλός αν και μόνο αν έχει ηλιοφάνεια και δεν έχει κρύο.

7) Ποιοι από τους (ορθούς) τύπους της άσκησης (1) είναι ταυτολογίες, ποιοι είναι αντιφάσεις και ποιοι τίποτε από τα δύο;

Απάντηση

----

8) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες. Οι p_1, p_2 και p_3 είναι προτασιακές μεταβλητές.

1. $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
2. $(\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
3. $((p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$
4. $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)) \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$

Απάντηση

Ταυτολογίες είναι οι 1. 2. και 4. Η 3. δεν είναι ταυτολογία διότι δεν ισχύει πάντα η ισοδυναμία (↔).

1.

p_1	p_2	$(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

2.

p_1	p_2	$(\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

3.

p_1	p_2	p_3	$((p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α

Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α

4.

$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$\boldsymbol{p_3}$	$\boldsymbol{((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_1)) \to (p_1 \leftrightarrow p_3)}$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α

Εναλλακτικά (και πιο γρήγορα) ελέγχουμε τι είναι ένας τύπος χωρίς πίνακα αληθείας, μόνο με τις ιδιότητες των συνδέσμων προσπαθώντας (σε αυτή την άσκηση) να διαψεύσουμε τον τύπο και άρα να δείξουμε ότι δεν είναι ταυτολογία. Για τον (1) π.χ., αριστερά της ισοδυναμίας είναι αλήθεια αν και μόνο αν οι p_1 και p_2 είναι αντίθετες, που είναι ακριβώς ότι λέει το δεξί μέλος. Άρα πρόκειται για ταυτολογία. Αντίθετα στον 3, αριστερά της βασικής ισοδυναμίας λέει ότι οι p_1, p_2 και p_3 είναι ισοδύναμες. Όμως δεξιά δεν λέει κάτι για την p_2.

9) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες. Οι φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι.

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to \neg(\varphi \to \psi)$
2. $\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$
3. $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$

Απάντηση

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ

10) Έστω f τύπος της ΠΛ που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση και p

προτασιακή μεταβλητή. Τότε:

i) Ο τύπος $f \wedge (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία

ii) Ο τύπος $f \vee (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία

iii) Ο τύπος $f \to (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία

iv) Ο τύπος $f \to (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία

Απάντηση

i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) Λ

11) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

i) $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \to \neg\psi$.

ii) $\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

iii) Ο τύπος $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.

iv) Ο τύπος $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

Απάντηση

i) Σ

ii) Σ

iii) Σ

iv) Λ

12) Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές ισχύουν και ποιες όχι;

i) $\neg(\varphi\to(\psi\to\varphi)) \models (\varphi\to\psi)\to\varphi$

ii) $\neg(\varphi\to(\psi\to\varphi)) \models \varphi\to(\psi\to\varphi)$

iii) $(\varphi\to\psi)\to\varphi \models \neg(\varphi\to(\psi\to\varphi))$

iv) $\varphi\to(\psi\to\varphi) \models \neg(\varphi\to(\psi\to\varphi))$

Απάντηση

i) Είναι ταυτολογική συνεπαγωγή. Ο τύπος αριστερά είναι αντίφαση (Ο $(\varphi\to(\psi\to\varphi))$ είναι ταυτολογία) και άρα συνεπάγεται ταυτολογικά κάθε τύπο.

ii) Όπως το (i)

iii) Δεν είναι ταυτολογική συνεπαγωγή. Ο τύπος δεξιά είναι αντίφαση και συνεπώς θα είχαμε ταυτολογική συνεπαγωγή μόνο αν και ο τύπος αριστερά ήταν αντίφαση, που όμως δεν είναι.

iv) Όπως στο (iii), για να έχουμε ταυτολογική συνεπαγωγή θα έπρεπε ο τύπος αριστερά να ήταν αντίφαση. Εδώ όμως είναι ταυτολογία.

13) Έστω A ένα σύνολο λογικών αποτιμήσεων με περιττό πλήθος στοιχείων (δηλαδή στο A υπάρχει περιττό πλήθος αποτιμήσεων). Έστω D το σύνολο των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από *μία πλειοψηφία αποτιμήσεων* (οι μισές συν μία τουλάχιστον) στο A. Αποδείξτε ή εξηγήστε γιατί δεν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

1. Αν φ τύπος, τότε είτε ο φ είτε ο $\neg\varphi$ ανήκει στο D.
2. Αν ο φ ανήκει στο D και ο $(\varphi \to \psi)$ είναι ταυτολογία, τότε ο ψ ανήκει στο D.
3. Αν φ και $(\varphi \to \psi)$ ανήκουν στο D, τότε ο ψ ανήκει στο D.

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε $2\rho+1$ λογικές αποτιμήσεις στο A. Ένας τύπος ανήκει στο D, (ή *επαληθεύεται πλειοψηφικά*) αν και μόνον επαληθεύεται από τουλάχιστον $\rho+1$ αποτιμήσεις στο A.
1. ΣΩΣΤΟ: Κάθε αποτίμηση επαληθεύει είτε τον φ είτε τον $\neg\varphi$, και φυσικά όχι και τους δύο. Άρα οι αποτιμήσεις A διαμερίζονται σε δύο σύνολα μεγέθους κ και λ, ένα των οποίων επαληθεύει το φ και το άλλο το $\neg\varphi$. Αφού $(\kappa+\lambda) = 2\rho+1$, δεν μπορεί να έχουμε $\kappa, \lambda \leq \rho$, ούτε $\kappa, \lambda \geq \rho+1$. Δηλαδή ένα εκ των δύο θα είναι το πολύ $\leq \rho$, και το άλλο τουλάχιστον $\geq (\rho+1)$, δηλαδή ένας και μόνον ένας εκ των $\{ \varphi, \neg\varphi \}$ θα επαληθεύεται πλειοψηφικά.
2. ΣΩΣΤΟ: Αφού $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις επαληθεύουν το φ, και το $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία, το ψ επαληθεύεται για αυτές τουλάχιστον τις $\geq (\rho+1)$ αποτιμήσεις, δηλαδή επίσης πλειοψηφικά.
3. ΛΑΘΟΣ: Θα δώσουμε αντιπαράδειγμα. Έστω $\varphi=p$ και $\psi=q$. Έστω ότι το σύνολο A περιλαμβάνει τις αποτιμήσεις $A=\{(1,1), (1,0), (0,0)\}$. Τότε πράγματι ο φ επαληθεύεται στις 2 από τις 3 δηλαδή $\varphi \in D$. Παρόμοια και ο τύπος $\varphi \to \psi \in D$ διότι επαληθεύεται στην πρώτη και στην τρίτη αποτίμηση. Όμως ο ψ επαληθεύεται μόνο στην πρώτη αποτίμηση και άρα $\psi \notin D$.

14) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T, να δειχθεί ότι:

i) Αν $T\cup\{\varphi\} \models \psi$ και $T\cup\{\varphi\} \models \neg\psi$, τότε $T \models \neg\varphi$.
ii) Αν $T\cup\{\varphi\} \models \psi$ και $T\cup\{\chi\} \models \psi$, τότε $T\cup\{\varphi \vee \chi\} \models \psi$.

Απάντηση

i) Αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi\}$ ικανοποιεί και το ψ και το $\neg\psi$ τότε το $T \cup \{\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο. Άρα από θεώρημα απαγωγής σε άτοπο, $T \models \neg\varphi$.

ii) Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi\}$, ικανοποιεί το ψ. Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το $T \cup \{\chi\}$, ικανοποιεί το ψ. Αν υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi \vee \chi\}$, ικανοποιεί το T, το φ ή το χ, άρα και το ψ.

15) Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ προτασιακοί τύποι. Η παρακάτω ισοδυναμία, για n = 2, είναι ο γνωστός τύπος *De Morgan*:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$$

Χρησιμοποιήστε επαγωγή για να αποδείξετε την γενίκευσή του για κάθε $n \geq 3$.

Απάντηση

Βήμα. Για n=2 ο τύπος γίνεται $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \equiv \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Αυτός είναι ο τύπος του De Morgan και άρα ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση. Έστω ότι ο τύπος ισχύει για n=k≥2.

Δηλαδή $\bigwedge_{i=1}^{k} \neg\varphi_i \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\right)$.

Επαγωγικό βήμα. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=k+1. Έχουμε λοιπόν

$$\bigwedge_{i=1}^{k+1} \neg\varphi_i \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \neg\varphi_i\right) \wedge \neg\varphi_{k+1} \equiv (\text{επαγωγική υπόθεση}) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i\right) \wedge \neg\varphi_{k+1}$$

$$\equiv (\text{De Morgan}) \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} \varphi_i\right)$$

16) Είναι γνωστό ότι υπάρχουν 2^n αποτιμήσεις πάνω σε n προτασιακές μεταβλητές. Από το σύνολο όλων των δυνατών αποτιμήσεων πάνω σε n μεταβλητές, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα υποσύνολο X. Δείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον προτασιακός τύπος φ ο οποίος επαληθεύεται ακριβώς στις αποτιμήσεις του συνόλου X και διαψεύδεται σε όλες τις άλλες. (Σημείωση: αυτή η πρόταση είναι ισοδύναμη με την περισσότερο διαισθητική ότι αν σε ένα πίνακα αληθείας n προτασιακών μεταβλητών επιλέξουμε αυθαίρετα ένα υποσύνολο των γραμμών του, τότε υπάρχει ένας τύπος φ ο οποίος έχει «Α» στις επιλεγμένες γραμμές και «Ψ» στις υπόλοιπες.)

Απάντηση

Για μία δεδομένη αποτίμηση των n μεταβλητών κατασκευάζουμε τον τύπο που είναι η σύζευξη όλων των μεταβλητών με άρνηση αν η αποτίμηση κάνει την μεταβλητή ψευδή και χωρίς άρνηση αν την κάνει αληθή. Π.χ. για n=4 η αποτίμηση (1,1,0,1) (όπου με τον συμβολισμό αυτό εννοούμε ότι $p_1 = p_2 = p_4 = 1$ και $p_3 = 0$) έχουμε τον τύπο $((p_1 \wedge p_2) \wedge \neg p_3)) \wedge p_4$. (Πολλές φορές όταν έχουμε αλλεπάλληλες συζεύξεις ή διαζεύξεις αφαιρούμε τελείως τις παρενθέσεις οπότε ο τύπος αυτός μπορεί να γραφεί σαν $p_1 \land p_2 \land \neg p_3 \land p_4$.) Παρατηρούμε τώρα ότι αυτός ο τύπος επαληθεύεται μόνο στην αποτίμηση (1,1,0,1) με βάση την οποία κατασκευάστηκε και διαψεύδεται σε όλες τις άλλες. Συνεπώς ο ζητούμενος τύπος φ κατασκευάζεται σαν διάζευξη όλων των αντίστοιχων τύπων που κατασκευάζονται, ένας για κάθε αποτίμηση στο σύνολο X. Είναι προφανές ότι ο φ επαληθεύεται σε όλες τις αποτιμήσεις του X και μόνον σε αυτές. Παρατηρούμε επιπλέον ότι ο φ είναι σε Κανονική Διαζευκτική Μορφή.

17) Θεωρούμε το σύνολο των προτασιακών τύπων $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ όπου $\varphi_1 = p_1$ και ο τύπος φ_i για $i = 2, \dots, n$ ορίζεται από την σχέση $\varphi_i = (\varphi_{i-1} \land \neg p_i) \lor (\neg\varphi_{i-1} \land p_i)$. Τα $p_1, \dots, p_n$ είναι προτασιακές μεταβλητές. Δείξτε με επαγωγή στο n ότι ο τύπος φ_n επαληθεύεται από όλες τις αποτιμήσεις (και μόνον αυτές) των μεταβλητών $p_1, \dots, p_n$ όπου περιττό πλήθος των μεταβλητών είναι αληθείς.

Απάντηση

Βάση: Ο τύπος $\varphi_1 = p_1$ επαληθεύεται μόνο όταν η p_1 είναι αληθής, άρα ισχύει το αποδεικτέο.

Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι ο τύπος φ_{i-1} για $i > 1$ επαληθεύεται όταν περιττός αριθμός από τις μεταβλητές $p_1, \dots, p_{i-1}$ στις οποίες ορίζεται, είναι αληθείς και διαψεύδεται όταν άρτιο πλήθος είναι αληθείς.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ο τύπος $\varphi_i = (\varphi_{i-1} \land \neg p_i) \lor (\neg\varphi_{i-1} \land p_i)$ ο οποίος ορίζεται στις μεταβλητές $p_1, \dots, p_i$. Οι αποτιμήσεις αυτών των μεταβλητών διαμερίζονται σε 4 σύνολα.

i. Περιττό πλήθος από τις $p_1, \dots, p_{i-1}$ είναι αληθείς και η p_i είναι αληθής.
ii. Περιττό πλήθος από τις $p_1, \dots, p_{i-1}$ είναι αληθείς και η p_i είναι ψευδής.
iii. Άρτιο πλήθος από τις $p_1, \dots, p_{i-1}$ είναι αληθείς και η p_i είναι αληθής.
iv. Άρτιο πλήθος από τις $p_1, \dots, p_{i-1}$ είναι αληθείς και η p_i είναι ψευδής.

Από αυτά τα σύνολα, τα (ii) και (iii) περιλαμβάνουν αποτιμήσεις όπου περιττό πλήθος των $p_1, \dots, p_i$ είναι αληθείς ενώ τα (i) και (iv) αποτιμήσεις όπου άρτιο πλήθος των $p_1, \dots, p_i$ είναι αληθείς. Στις αποτιμήσεις του συνόλου (ii) από την Υπόθεση η πρώτη παρένθεση του φ_i αληθεύει. Παρόμοια, στις αποτιμήσεις του συνόλου (iii) από την Υπόθεση η δεύτερη παρένθεση του φ_i αληθεύει. Αντίθετα, στις αποτιμήσεις των συνόλων (i) και (iv) από την Υπόθεση ο τύπος φ_i διαψεύδεται. Συμπεραίνουμε ότι ο φ_i επαληθεύεται στις αποτιμήσεις όπου περιττό πλήθος των $p_1, \dots, p_i$ είναι αληθείς και διαψεύδεται στις υπόλοιπες.

18) Εξετάστε αν είναι ικανοποιήσιμα τα παρακάτω σύνολα. Εργαστείτε πρώτα με πίνακα αληθείας και στην συνέχεια προσπαθώντας να ελέγξετε την ικανοποιησιμότητα των συνόλων απευθείας.

i) $T_1 = \{p \to \neg r,\ r \wedge (p \vee q), q \wedge r\}$
ii) $T_2 = \{p \to (q \to r),\ (p \to q) \to \neg r,\ \ q \wedge r\}$

Υπάρχει τύπος του συνόλου T_2, του προηγούμενου υποερωτήματος, που να είναι ταυτολογική συνέπεια του συνόλου T_1; Αν ναι, να εντοπιστεί.

Απάντηση

Θα ελέγξουμε την ικανοποιησιμότητα των δύο συνόλων απευθείας.

i) Για να είναι το T_1 ικανοποιήσιμο θα πρέπει η r και η q να είναι αληθείς. Τότε όμως για να αληθεύει ο πρώτος τύπος θα πρέπει η p να ψευδής. Άρα η μοναδική αποτίμηση που επαληθεύει το T_1 είναι p=Ψ, q = r = Α.
ii) Θα πρέπει p = q = Α (τρίτος τύπος). Από τον δεύτερο όμως τότε θα πρέπει r = Ψ , πράγμα που διαψεύδει τον πρώτο τύπο. Άρα το T_2 δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Παρατηρούμε ότι η αποτίμηση p=Ψ, q = r = Α που ικανοποιεί το T_1 ικανοποιεί και τον τύπο $p \to (q \to r)$ του T_2, άρα το T_1 συνεπάγεται ταυτολογικά τον $p \to (q \to r)$.

19) Χρησιμοποιώντας τους νόμους της ΠΛ βρείτε τύπους που χρησιμοποιούν μόνο τους **συνδέσμους** $\{\neg, \to\}$ και είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι** με τους:

i) $\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)$ ii) $p \vee \neg(q \wedge r)$

Απάντηση

i) $\neg p \wedge (q \leftrightarrow r) \equiv \neg(p \vee \neg(q \leftrightarrow r)) \equiv \neg(p \vee \neg(q \leftrightarrow r)) \equiv$
$\equiv \neg(p \vee \neg((q \to r) \wedge (r \to q)) \equiv\neg(p \vee (\neg\, (q \to r) \vee \neg\, (r \to q)) \equiv$
$\equiv\neg(p \vee ((q \to r) \to \neg\, (r \to q)) \equiv\neg(\neg p \to ((q \to r) \to \neg\, (r \to q))$

ii) $p \vee \neg(q \wedge r) \equiv p \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv p \vee (q \to \neg r) \equiv \neg p \to (q \to \neg r)$

20) Έστω $T_1 = \{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n\}$ και $T_2 = \{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n\}$ δύο πεπερασμένα ικανοποιήσιμα σύνολα προτασιακών τύπων. Να δειχθεί ότι $T_1 \cup T_2$ είναι μη ικανοποιήσιμο, αν και μόνο αν υπάρχει τύπος $\varphi \in T(\Gamma_0)$ τέτοιος ώστε $T_1 \models \varphi$ και $T_2 \models \neg\varphi$.

Απάντηση

Ευθύ

Επειδή $T_1 \cup T_2$ μη ικανοποιήσιμο, θεωρούμε τον $\varphi = \neg(\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$. Έχουμε $T_1 \models \varphi$ διότι μια αποτίμηση α που ικανοποιεί το T_1, δεν ικανοποιεί το T_2 άρα δεν ικανοποιεί το $\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m$. Άρα ικανοποιεί τον $\varphi = \neg(\psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m)$. Επίσης $T_2 \models \neg\varphi$ διότι $\neg\varphi \equiv \psi_0 \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m$ και συνεπώς $T_2 \models \neg\varphi$.

Αντίστροφο

Αν υπάρχει αποτίμηση α που ικανοποιεί και τον T_1 και τον T_2, τότε αυτή ικανοποιεί και τον φ και τον $\neg\varphi$, άτοπο.

21)Έστω $T_\vee$ το σύνολο των προτασιακών τύπων που αποτελείται από τύπους οι οποίοι:

- είναι προτασιακές μεταβλητές ή
- είναι της μορφής $(\varphi \vee \psi)$, όπου $\varphi, \psi \in T_\vee$ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι του συνόλου $T_\vee$.

Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα του $T_\vee$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο αυτό δεν περιέχει αντιφάσεις.

Απάντηση

Βάση. Έστω $\varphi = p$ δηλαδή ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή. Προφανώς σε αυτή την περίπτωση ο φ δεν είναι αντίφαση.

Υπόθεση. Έστω φ και ψ τυχόντες τύποι στο σύνολο $T_\vee$. Υποθέτουμε ότι οι φ και ψ δεν είναι αντιφάσεις.

Βήμα. Έστω $\chi = \varphi \vee \psi$, τύπος στο $T_\vee$. Τότε εφόσον οι φ και ψ είναι ικανοποιήσιμοι τύποι, και ο χ είναι ικανοποιήσιμος, άρα όχι αντίφαση.

22)Έστω $^*: \mathrm{T}(\Gamma_0) \to \mathrm{T}(\Gamma_0)$ η συνάρτηση που ορίζεται, επαγωγικά, ως εξής

$$p^* = \neg p, \text{ όπου p προτασιακή μεταβλητή και,}$$

$$(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi^*)$$
$$(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$$
$$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$$
$$(\varphi \to \psi)^* = \neg(\varphi^*) \wedge \psi^*$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi)^* = (\varphi \to \psi)^* \vee (\psi \to \varphi)^*$$

όπου φ και ψ προτασιακοί τύποι.

Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ και αποτίμηση αλήθειας α ισχύει $\bar{a}(\varphi^*) = \bar{a}(\neg\varphi)$.

Απάντηση

Έστω για τυχαίους τύπους x, y και αποτίμηση a, $\bar{a}(x^*) = \bar{a}(\neg x)$ και $\bar{a}(y^*) = \bar{a}(\neg y)$.

- $\varphi = \neg x$. Τότε $\bar{a}(\varphi^*) = \bar{a}((\neg x)^*) = \bar{a}(\neg x^*) = \neg\bar{a}(x^*) = \neg\bar{a}(\neg x) = \neg\bar{a}(\varphi) = \bar{a}(\neg\varphi)$.
- $\varphi = x \vee y$. Τότε $\bar{a}(\varphi^*) = \bar{a}((x \vee y)^*) = \bar{a}(x^* \wedge y^*) = \bar{a}(x^*) \wedge \bar{a}(y^*) = \bar{a}(\neg x) \wedge \bar{a}(\neg y) = \bar{a}(\neg x \wedge \neg y) = \bar{a}\big(\neg(x \vee y)\big) = \bar{a}(\neg\varphi)$.
  (Με αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε για $x \wedge y$)
- $\varphi = x \rightarrow y$. Τότε $\bar{a}(\varphi^*) = \bar{a}((x \rightarrow y)^*) = \bar{a}(\neg x^* \wedge y^*) = \bar{a}(\neg x^*) \wedge \bar{a}(y^*) = \bar{a}(\neg x^*) \wedge \bar{a}(y^*) = \neg\bar{a}(\neg x) \wedge \bar{a}(\neg y) = \bar{a}(x \wedge \neg y) = \bar{a}\big(\neg(\neg x \vee y)\big) = \bar{a}(\neg\varphi)$.
  (Με αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε για $x \leftrightarrow y$)