

**Κυκλικές μεταθέσεις**  
**Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες υποδοχές**  
**Διακριτή Πιθανότητα**

1) Ένα καράβι διαθέτει  $n$  σημαίες και  $k$  διακεκριμένους ιστούς στους οποίους μπορεί να τις τοποθετήσει για να κάνει διάφορα σινιάλα. Πόσα σινιάλα μπορεί να σχηματίσει χρησιμοποιώντας όλες τις σημαίες

i) Αν όλες οι σημαίες είναι μη διακεκριμένες μεταξύ τους;

ii) Αν όλες οι σημαίες είναι διαφορετικές και έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στον κάθε ιστό

$$(Απ. (i) C(n+k-1, n) (ii) \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!})$$

2) Ρίχνουμε δύο ζάρια

i) Ποια η πιθανότητα  $A(7)$  να φέρουμε άθροισμα 7 κατά την ρίψη 2 ζαριών; Ποια η πιθανότητα  $A(6)$ ;

ii) Σε ένα παιχνίδι τάβλι με 2 ζάρια, ένα λευκό πούλι απέχει 7 θέσεις από ένα μαύρο. Ποια η πιθανότητα  $PX(7)$  να χτυπηθεί το λευκό πούλι από το μαύρο αν παίζουν τα μαύρα; Ποια η πιθανότητα  $PX(6)$ ;

$$(Απ. (i) 6/36, 5/36 (ii) 16/36)$$

3) Ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο αποτελείται από τέσσερις παύλες (-), 10 τελείες (.) και τα γράμματα A,B. Από σφάλμα του πομπού αποστέλλεται μια συμβολοσειρά με τα παραπάνω 16 σύμβολα σε αυθαίρετη σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην υπάρχουν σε αυτήν τα γράμματα A και B σε διαδοχικές θέσεις;

$$(Απ. (i) 7/15)$$

4) Δεκαπέντε (διακεκριμένα) φορηγά περνάνε κάθε μέρα με την σειρά (δηλαδή διατεταγμένα) από έναν τελωνιακό σταθμό. Για λόγους ασφαλείας (εύφλεκτα φορτία) δύο συγκεκριμένα από αυτά πρέπει να έχουν 3 ακριβώς άλλα φορηγά ανάμεσα αυτής

i) Με πόσους τρόπους μπορούν να περάσουν από το τελωνείο τα φορηγά;

ii) Οι τελωνιακοί αποφασίζουν για μια συγκεκριμένη εβδομάδα να κάνουν έλεγχο κάθε μέρα στο 4<sup>ο</sup> και στο 5<sup>ο</sup> φορηγό. Ποια είναι η πιθανότητα που έχει ένα φορηγό με εύφλεκτο φορτίο να ελεγχθεί μια οποιαδήποτε μέρα αυτής εβδομάδας αυτής;

$$(Απ. (i) 2*11*13! (ii) 6/22)$$

- 5) Θεωρούμε ότι κάθε άνθρωπος κατά την γέννησή του έχει πιθανότητα να ανήκει σε ένα από τα 12 ζώδια της (δυτικής) αστρολογίας ίση με  $1/12$ . Υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον 2 άτομα σε μια ομάδα 3 ατόμων να έχουν το ίδιο ζώδιο.

$$(Απ. (12^3 - P(12,3))/12^3)$$

- 6) Υπάρχουν εννέα υποψήφιοι για πρόσληψη σε μια υπηρεσία (μεταξύ των οποίων και ο κύριος Παπαδόπουλος) και τρεις κριτές για την επιλογή τους, κάθε ένας από ένας οποίους διατάσσει σε μια σειρά (πρώτος έως ένατος) τους υποψηφίους. Ένας υποψήφιος προσλαμβάνεται αν βρεθεί σε μία από τις τρεις πρώτες θέσεις και των τριών κριτών.

- i) Βρείτε πόσες είναι οι διαφορετικές διατάξεις που μπορούν να δώσουν και οι τρεις κριτές μαζί. Σε πόσες από αυτές ο κος Παπαδόπουλος προσλαμβάνεται;
- ii) Αν οι δυνατές διατάξεις που μπορεί να δώσει ένας κριτής είναι ισοπίθανες, ποια η πιθανότητα να προσληφθεί ο κος Παπαδόπουλος;

$$(Απ. (i) (3 \cdot 8!)^3 \text{ (ii) } 1/27)$$

- 7) Με πόσους τρόπους μπορούν να αντιμετωπιστούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου ώστε να μην εμφανίζονται οι λέξεις car, dog, run, byte;

$$(Απ. 26! - [3 \cdot 24! + 23!] + [3 \cdot 22! + 3 \cdot 21!] - [20! + 3 \cdot 19!] + 17!)$$

- 8) Πόσες λέξεις  $n$  ψηφίων από το αλφάβητο  $\{0,1,2\}$  υπάρχουν, όπου κάθε ψηφίο εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά;

$$(Απ.  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ )$$

- 9) Πόσα μη κατευθυντικά γραφήματα με σύνολο κορυφών  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  που δεν έχουν απομονωμένα σημεία και ανακυκλώσεις, υπάρχουν;

$$(Απ. 768)$$

- 10) Ένας πομπός εκπέμπει λόγω βλάβης με τυχαίο τρόπο μια ακολουθία από 12 διαφορετικά σύμβολα και 45 κενούς χαρακτήρες. Ποια η πιθανότητα στην ακολουθία να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών συμβόλων;

$$(Απ.  $C(22,12)/C(57,12)$ )$$

- 11) Ένας διαβάτης κινείται σε μια πόλη που οι δρόμοι της τέμνονται κάθετα και σχηματίζουν τετράγωνα. Ο διαβάτης βρίσκεται σε ένα σταυροδρόμι που θεωρούμε αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες  $(0,0)$ .

- i) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων μήκους  $2n$  (προς κάθε κατεύθυνση), που ξεκινούν από το  $(0,0)$ , διέρχονται από το σημείο  $(k,n-k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , και καταλήγουν στο  $(0,0)$ ;
- ii) Επιλέγουμε τυχαία μια ακολουθία βημάτων μήκους  $2n$  που ξεκινάει από το  $(0,0)$ . Σε κάθε βήμα, η πιθανότητα επιλογής κάθε μιας από τις 4 κατευθύνσεις είναι ίση με 0.25. Ποιά η πιθανότητα να καταλήξει η ακολουθία βημάτων στο  $(0,0)$ , αφού διέλθει από το σημείο  $(k,n-k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ ?

(Απ. (i)  $(C(n,k))^2$  (ii)  $(C(n,k)/4^n)^2$ )

- 12) Πόσες είναι οι ακέραιες μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$  με  $x_i \leq 7$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ;

(Απ. 246)

- 13) Ποια η πιθανότητα όταν ρίξουμε 4 ζάρια να έχουμε άθροισμα 22;

(Απ. 0.0077)

- 14) Έχουμε στη διάθεσή μας 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μέτρου το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.

(Απ.  $22!/2$ )

- 15) Παραλάβαμε ένα κιβώτιο με τους  $m$  τόμους μιας εγκυκλοπαίδειας και επιλέγουμε τυχαία  $n$  από αυτούς και τους τοποθετούμε επίσης τυχαία σε ένα ράφι. Ποια είναι η πιθανότητα οι  $n$  τόμοι να τοποθετήθηκαν στο ράφι από αριστερά προς τα δεξιά με αύξουσα λεξικογραφική σειρά;

(Απ.  $1/n!$ )

- 16) Ο Γιάννης και η Μαρία παίζουν το εξής παιχνίδι ρίχνοντας ταυτόχρονα 4 διακεκριμένα ζάρια: Αν τουλάχιστον ένα ζάρι φέρει τον αριθμό 6 κερδίζει ο Γιάννης. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει η Μαρία. Ποιός έχει τις περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει το παιχνίδι; Θα αλλάξει κάτι στο συλλογισμό σας αν τα ζάρια δεν είναι διακεκριμένα;

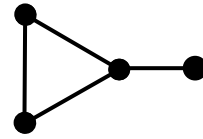
(Απ. Γιάννης:  $671/1296$ , Μαρία:  $625/1296$ )

- 17) Ένας πομπός εκπέμπει μια τυχαία δυαδική ακολουθία μήκους  $n$  bit η οποία περιέχει  $k$  1 ( $k \leq n-k+1$ ).

- i) Ποια η πιθανότητα η ακολουθία να μην έχει δύο διαδοχικά 1 αν το  $k$  είναι δεδομένο;
- ii) Αν δεν γνωρίζουμε πόσα είναι τα 1 στην ακολουθία, αλλά μόνο ότι ο αριθμός τους είναι  $\leq (n+1)/2$ , δείξτε ότι ο αριθμός των ακολουθιών  $Q_n$  μήκους  $n$  που δεν έχουν δύο διαδοχικά 1 είναι πληροί την αναδρομική σχέση  $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$ .

(Απ.  $C(n-k+1,k)/C(n,k)$ )

- 18) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το παραπλεύρως έχει το γράφημα  $K_4$ ; Πόσα το  $K_{20}$ ; Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή των  $K_4$  και  $K_{20}$  έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές τους είναι διακεκριμένες).



(Απ. 12 και  $12C(20,4)$ )

- 19) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το  $C_6$  (τον κύκλο με 6 κορυφές) έχει το διμερές πλήρες γράφημα  $K_{m,n}$  (δηλαδή με  $m$  κορυφές στο ένα τμήμα και  $n$  στο άλλο).

(Απ.  $6\binom{m}{3}\binom{n}{3}$ )

- 20) Στο επίπεδο υπάρχουν σημειωμένα 20 σημεία και επιλέγουμε τυχαία 4 ζεύγη σημείων και χαράζουμε τις 4 ακμές που έχουν άκρα αυτά τα ζεύγη. Ποια η πιθανότητα να σχηματιστεί το γράφημα της άσκησης 18;

(Απ.  $12\binom{20}{4}/\binom{190}{4}$ )