Ασκήσεις Συνδυαστικής

Διατάξεις-Συνδυασμοί με και χωρίς επανάληψη
Μεταθέσεις Ομάδων Αντικειμένων
Μοντέλα Μπαλών σε Υποδοχές

1) Θεωρούμε τις μεταθέσεις 21 διακεκριμένων αντικειμένων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{21}$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;
   i) Υπάρχουν $(10!)^2$ μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην 11η θέση.
   ii) Υπάρχουν 21!/2 μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται πριν το α_2
   iii) Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου τα α_1, α_2, και α_3 εμφανίζονται με αυτή την σειρά σε διαδοχικές θέσεις.
   iv) Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην 1η θέση και το αντικείμενο α_{21} εμφανίζεται στην 21η θέση.

(Απ. Λ-Σ-Σ-Σ)

2) Ο αριθμός των τρόπων διανομής n μη διακεκριμένων αντικειμένων σε m διακεκριμένες υποδοχές είναι:
   i) Όσες οι μεταθέσεις $n+m-1$ αντικειμένων από τα οποία τα n αποτελούν μια ομάδα μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και τα υπόλοιπα μια άλλη.
   ii) Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές με $m-1$ μηδενικά και n άσσους.
   iii) Όσες οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n + m$
   iv) Όσες οι επιλογές μιας διατεταγμένης n-άδας με δυνατότητα επανάληψης από m διακεκριμένα αντικείμενα.

(Απ. Σ-Σ-Σ-Λ)

3) Ποιο είναι το πλήθος των ακέραιων αριθμών από το 1 ως το 10,000 των οποίων το άθροισμα των ψηφίων είναι 7; Τέτοιοι αριθμοί είναι για παράδειγμα οι: 7, 25, 214, 2221.

(Απ. 120)

4) Σε 10 διακεκριμένα παιδιά πρόκειται να μοιραστούν 15 όμοιες (μη διακεκριμένες) σοκολάτες και 10 ακόμη διαφορετικά μεταξύ τους (διακεκριμένα) δώρα. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να μοιραστούν οι σοκολάτες και τα δώρα, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον μία σοκολάτα και ένα δώρο.

(Απ. 10!*C(14,5))

5) Σε ένα κυκλικό τραπέζι 10 θέσεων πρόκειται να καθίσουν 5 ζευγάρια (κάθε ζευγάρι αποτελείται από έναν διακεκριμένο άντρα και μια διακεκριμένη γυναίκα). Να υπολογίσετε τους διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην τοποθέτηση των 10 ατόμων.
   ii) Η γυναίκα και ο άντρας που αποτελούν κάθε ζευγάρι πρέπει να τοποθετηθούν σε γειτονικές θέσεις.

   (Θεωρήστε και στις δύο περιπτώσεις ως μη διαφορετικές τοποθετήσεις αυτές όπου υπάρχει κυκλική μετατόπιση στις θέσεις του τραπεζιού χωρίς να μεταβάλλεται η διάταξη των 10 διακεκριμένων ατόμων.)

   (Απ. (i) 9! (ii) $4!*2^5$)

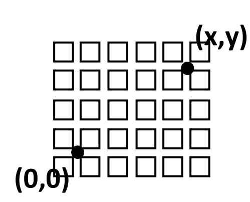
6) Μια σχολική τάξη αποτελείται από 30 διακεκριμένους μαθητές, 15 αγόρια και 15 κορίτσια. Εξετάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, ώστε κάθε μαθητής να ανήκει σε μία ομάδα, και να τους αναθέσουμε εργασίες για το μάθημα της Πληροφορικής. Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αν:
   i) Κάθε ομάδα αποτελείται από 2 άτομα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.
   ii) Κάθε ομάδα αποτελείται από 5 άτομα, ανεξαρτήτως φύλου, και υπάρχουν 6 θέματα εργασιών από τα οποία κάθε ομάδα επιλέγει ένα θέμα διαφορετικό από αυτό των άλλων ομάδων.
   iii) Κάθε ομάδα αποτελείται είτε από 5 αγόρια είτε από 5 κορίτσια, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.

   (Απ. (i) 15! (ii) $30!/(5!)^6$ (iii) $\frac{15!}{(5!)^3 3!} \times \frac{15!}{(5!)^3 3!}$)

7) Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου λαμβάνουν μέρος 16 ομάδες. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν οι ομάδες σε 4 ομίλους των 4 ομάδων ο καθένας, αν δεν παίζει ρόλο η σειρά τοποθέτησης των ομάδων στους ομίλους, και
   i) οι 4 όμιλοι θεωρούνται διακεκριμένοι,
   ii) οι 4 όμιλοι θεωρούνται μη διακεκριμένοι;
   iii) Μετά από την κλήρωση προέκυψε ένα πρόγραμμα 32 αγώνων που θα διεξαχθούν με συγκεκριμένη χρονική σειρά σε τρία γήπεδα (έστω Α, Β, Γ). Από αυτούς, 16 αγώνες θα διεξαχθούν στο γήπεδο Α, 8 αγώνες στο γήπεδο Β, και 8 αγώνες στο γήπεδο Γ. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο προγραμματισμός των γηπέδων για την διεξαγωγή όλων των αγώνων, αν μετά από κάθε αγώνα στο γήπεδο Β και επίσης μετά από κάθε αγώνα στο γήπεδο Γ, πρέπει να οριστεί ένας αγώνας στο γήπεδο Α;

   (Απ. (i) $16!/(4!)^4$ (ii) $16!/(4!)^5$ (iii) $16!/(8!)^2$)

8) Σε μια μοντέρνα πόλη όπου όλοι οι δρόμοι τέμνονται κάθετα μεταξύ τους ώστε να σχηματίζεται ένα πλέγμα, βρίσκεται ένας διαβάτης σε ένα σταυροδρόμι που



αυθαίρετα θεωρούμε αρχή των αξόνων και ονομάζουμε θέση (0,0). Ο διαβάτης θέλει να πάει στη θέση (x, y) με $x, y > 0$ που βρίσκεται x τετράγωνα δεξιά και y τετράγωνα πάνω κινούμενος μόνο προς τα δεξιά (Δ) και προς τα πάνω (Π). Για παράδειγμα, στο σχήμα έχουμε $x = 4$ και $y = 3$ και μια πιθανή διαδρομή είναι η ΔΠΔΠΠΔΔ με μήκος 7 τετραγώνων.

i) Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να ακολουθήσει ο διαβάτης για να πάει στο (x, y);
ii) Πόσες είναι οι διαφορετικές διαδρομές αν ο διαβάτης δεν μπορεί να κινηθεί δύο συνεχόμενα τετράγωνα προς τα δεξιά; Υποθέτουμε εδώ ότι $x \le y+1$.

(Απ. (i) $\frac{(x+y)!}{x!\,y!}$ (ii) $\binom{y+1}{y-x+1}$)

9) Σε ένα τμήμα μιας αίθουσας που αποτελείται από *n* θέσεις στη σειρά πρόκειται να καθίσουν *k* φοιτητές για να εξεταστούν σε ένα μάθημα. Οι επιτηρητές θέλουν να φροντίσουν ώστε να μην κάθεται κάποιος φοιτητής ακριβώς δίπλα σε κάποιον άλλο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να το επιτύχουν; Ποιό το αποτέλεσμα της άσκησης για *n*=10, *k* =3;

(Απ. 990)

10) Έστω σύνολο με 4 διαφορετικά στοιχεία Α=$\{x, y, w, z\}$. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διμελών σχέσεων που μπορούν να οριστούν στο Α και είναι:

i) Ανακλαστικές
ii) Συμμετρικές
iii) Συμμετρικές και περιλαμβάνουν το (*x*,*y*)
iv) Αντισυμμετρικές
v) Αντισυμμετρικές και περιλαμβάνουν το (*x*,*y*)

(Απ. (i) 2^{12} (ii) 2^{10} (iii) 2^{9} (iv) $2^4 * 3^6$ (v) $2^4 * 3^5$)

11) Ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο αποτελείται από τέσσερις παύλες (-), 10 τελείες (.) και τα γράμματα Α,Β.

i) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 30 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν οι υπόλοιπες 14 θέσεις συμπληρώνονται με κενά;
ii) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 16 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν απαγορεύεται η παρουσία τόσο της συμβολοσειράς ΑΒ όσο και της ΒΑ (δηλαδή απαγορεύεται η παρουσία του Α αμέσως μετά το Β αλλά και η παρουσία του Β αμέσως μετά το Α);

(Απ. (i) $\frac{30!}{4!\cdot 10!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 14!}$ (ii) $\frac{16!}{4!\cdot 10!} - 2\cdot\frac{15!}{4!\cdot 10!}$)

12) Έχουμε στη διάθεσή μας 3 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γεμίσει ένα ράφι μήκους 1 μέτρου, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι. (*Υπόδειξη: Εξετάστε περιπτώσεις τοποθέτησης των 3 βιβλίων των 10 εκατοστών στο ράφι.*)

(Απ. $20!+\binom{20}{18}\cdot 19!+\binom{20}{16}\cdot 18!/2+\binom{20}{14}\cdot 17!/3!$)

13) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά 50 φοιτητές του Α' έτους, 30 φοιτητές του Β' έτους, και 20 φοιτητές του Γ' έτους, όταν:
 i) οι φοιτητές του ίδιου έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν υπάρχουν περιορισμοί.
 ii) οι φοιτητές του ίδιου έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν πρέπει να υπάρχουν φοιτητές του Α' έτους σε διαδοχικές θέσεις.
 iii) όλοι οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν πρέπει να υπάρχουν φοιτητές του Α' έτους σε διαδοχικές θέσεις.

(Απ. (i) $\frac{100!}{50!20!30!}$ (ii) $51\frac{50!}{20!30!}$ (iii) $51(50!)^2$)

14) Σε ένα ράφι ενός σούπερ-μάρκετ βρίσκονται 8 κονσέρβες ενός είδους, 12 ενός δεύτερου και 10 ενός τρίτου. Όλες οι κονσέρβες αγοράστηκαν από τρεις πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια τέτοια αγορά;

(Απ. 2520)

15) Δύο ομάδες (έστω Α και Β) που αποτελούνται από 8 διακεκριμένους αθλητές η κάθε μια (έστω $A_1, A_2, \ldots, A_8$ και $B_1, B_2, \ldots, B_8$) πρόκειται να συναγωνιστούν σε μια σκυταλοδρομία 8x100. Ο προπονητής της πρώτης ομάδας ζητά από τον αθλητή A_3 να ξεκινήσει τον αγώνα και δε θέτει κανέναν άλλο περιορισμό ως προς τη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της πρώτης ομάδας. Με τη σειρά του ο προπονητής της δεύτερης ομάδας θέτει ως μοναδικό περιορισμό να παρεμβληθούν δύο ακριβώς αθλητές ανάμεσα στους B_1 και B_5 (ή στους B_5 και B_1) στη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της δεύτερης ομάδας.
 i) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Α;
 ii) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Β;
 iii) Με πόσους τρόπους μπορεί να διεξαχθεί ο αγώνας ως προς τη σειρά με την οποία θα αγωνιστούν οι αθλητές των δύο ομάδων;

(Απ. (i) 5040 (ii) 7200 (iii) 5040*7200)

16) Σε ένα εκλογικό κέντρο 300 ψηφοφόρων υπάρχουν 3 υποψήφιοι δήμαρχοι, ο Α, ο Β και ο Γ. Έχουν ψηφίσει 200 ψηφοφόροι και ο Α έχει πάρει 90 ψήφους, ο Β 60, ο Γ 40, 5 είναι άκυρα και 5 λευκά. Πόσοι δυνατοί τρόποι ψηφοφορίας των υπόλοιπων 100 ψηφοφόρων εξασφαλίζουν στον Α 50%+1 επί των εγγεγραμμένων ψηφοφόρων, (δηλαδή 151 ψήφους και άνω) με την προϋπόθεση ότι και οι 100 ψηφοφόροι θα προσέλθουν στο εκλογικό κέντρο;

(Απ. C(53,49))

17) Κάνοντας χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος αποδείξτε ότι η ποσότητα $(10!)!/(10!)^{9!}$ είναι ακέραιος αριθμός. (*Υπόδειξη: Σκεφτείτε ένα πρόβλημα απαρίθμησης που η ποσότητα αυτή είναι η απάντηση του.*)

18) Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n\geq 1$ ο αριθμός $(4n-1)!\cdot n$ διαιρείται από τον αριθμό $2^{3n-2}\cdot 3^n$. Παρόμοια ότι ο αριθμός $(n^2)!$ διαιρείται από τον $(n!)^n$.

19) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί με n+k ψηφία υπάρχουν αν τα n ψηφία είναι ίδια μεταξύ τους, τα k ανά δύο διαφορετικά (και με τα n) και δεν υπάρχουν δύο ίδια ψηφία σε γειτονικές θέσεις μεταξύ τους; Δίνεται ότι $n\leq k+1$.

(Απ. P(k,n-1)*(k+1)!/n!)

20) Κατά πόσους τρόπους 7 άνδρες μπορούν να επιλεγούν από 12 έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ’ αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί ούτε στους 7 ούτε στους 5. Γενικεύστε θέτοντας n αντί για 12 και k αντί για 7.

(Απ. 420)