Ασκήσεις Συνδυαστικής

Κανόνες αθροίσματος και γινομένου
Διατάξεις-Συνδυασμοί

1) Το τμήμα μαθηματικών στο οποίο σπουδάζει ένας φοιτητής προσφέρει 3 μαθήματα πληροφορικής, 2 μαθήματα φυσικής και 2 μαθήματα αστρονομίας.
   i) Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει ένα μόνο μάθημα από όλα τα παραπάνω;
   ii) Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει 1 μάθημα πληροφορικής, 1 μάθημα φυσικής και 1 μάθημα αστρονομίας;

   (Απ. (i) 7 (ii) 12)

2) Υπολογίστε τους τρόπους τοποθέτησης 10 διακεκριμένων ατόμων (5 ανδρών και 5 γυναικών) σε μια σειρά, ώστε στην πρώτη θέση της σειράς να τοποθετείται γυναίκα.

   (Απ.: 1,814,400)

3) Ένας πατέρας έχει 3 παιδιά και θέλει να δώσει χαρτζιλίκι από 1€ έως 5€ στο κάθε παιδί του.
   i) Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αν έχει να διαθέσει το πολύ 15€;
   ii) Τι αλλάζει σε σχέση με το i) αν έχει να διαθέσει το πολύ 13€;

   (Απ. (i) 125, (ii) 121)

4) Να δειχθούν οι παρακάτω σχέσεις.
   i) $(n)_1 = n$
   ii) $(n)_{n-1} = n!$
   iii) $(n)_k = n(n-1)_{k-1},\ k \geq 2$
   iv) $(n)_k = (n-k+1)\cdot(n)_{k-1},\ 2 \leq k \leq n+1$
   v) $(n)_k = (n)_r \cdot (n-r)_{k-r},\ 1 \leq r \leq k$
   vi) $(n)_k = \dfrac{n}{n-k}(n-1)_k,\ 1 \leq k \leq n-1$
   vii) $(n+1)_k = (n)_k + k(n)_{k-1},\ 1 \leq k \leq n$
   viii) $(n+1)_k = k! + k((n)_{k-1} + (n-1)_{k-1} + \cdots \quad),\ 1 \leq k \leq n$

5) Σε μια τάξη υπάρχουν *n* αγόρια και *n* κορίτσια. Να υπολογίσετε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να σχηματιστούν *n* ζευγάρια, ώστε κάθε ζευγάρι να αποτελείται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

   (Απ. n!)

6) Πόσοι άρτιοι αριθμοί μεταξύ 10000 και 79999 υπάρχουν με όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

   (Απ. 10752)

7) Πόσοι τρόποι τοποθέτησης σε ένα ράφι k διακεκριμένων βιβλίων άλγεβρας και k διακεκριμένων βιβλίων γεωμετρίας υπάρχουν;
   i) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
   ii) Αν δύο βιβλία άλγεβρας δεν πρέπει να τοποθετηθούν δίπλα.

(Απ. (i) (2k)! (ii) (k+1)!k!)

8) Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων 5×5 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι 0 ή 1;

(Απ. 2^{25})

9) Ποιος είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με τουλάχιστον 2 στοιχεία ενός συνόλου με n στοιχεία;

(Απ. $2^n - n - 1$)

10) Με πόσους τρόπους 3 αγόρια και 3 κορίτσια μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι 6 θέσεων αν κάθε αγόρι πρέπει να κάθεται ανάμεσα από δύο κορίτσια; Δύο τρόποι θεωρούνται ίδιοι αν κινούμενοι γύρω από το τραπέζι (ανεξάρτητα από φορά), συναντάμε με την ίδια σειρά, τα ίδια άτομα.
   i) Αν δεν έχουν σημασία τα καθίσματα που κάθεται κάθε άτομο.
   ii) Αν τα καθίσματα είναι αριθμημένα και έχει σημασία σε ποιο κάθισμα κάθεται κάποιο άτομο.

(Απ. (i) 6 (ii) 36)

11) Πόσοι αριθμοί από το 0 ως το 999.999 περιέχουν:
   (i) Ακριβώς μια φορά το 4;
   (ii) Τουλάχιστον μια φορά το 4;

(Απ. (i) $6\cdot 9^5$, (ii) 10^6-9^6)

12) Με πόσους τρόπους μπορούν να προγραμματισθούν οι εξετάσεις 8 μαθημάτων του 1ου έτους στις 30 ημέρες του Σεπτεμβρίου, αν:
   (i) Δεν εξετάζονται 2 μαθήματα την ίδια ημέρα και δεν ενδιαφέρει ποιο μάθημα εξετάζεται μια συγκεκριμένη μέρα;
   (ii) Δεν εξετάζονται 2 μαθήματα την ίδια ημέρα και ενδιαφέρει ποιο μάθημα εξετάζεται μια συγκεκριμένη μέρα;

(Απ. (i) $\binom{30}{8}$, (ii) $(30)_8$)

13) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να δημιουργηθούν 7 ομάδες των δύο ατόμων από ένα σύνολο 14 διακεκριμένων ατόμων.

(Απ. 13*11*9*7*5*3*1)

14) Θεωρούμε τις μεταθέσεις των συμβόλων {A,B,C,1,2,3,*}. Σημειώστε αν τα παρακάτω είναι αλήθεια.

   i) Υπάρχουν 7!/2 μεταθέσεις όπου το 1 εμφανίζεται πριν το 2.

ii) Υπάρχουν 3!·3! μεταθέσεις όπου το * εμφανίζεται στην μεσαία (4η) θέση.

iii) Υπάρχουν 5!/3! μεταθέσεις που περιέχουν την συμβολοσειρά ABC.

iv) Υπάρχουν 3!·3!·2 μεταθέσεις όπου το * εμφανίζεται στην πρώτη θέση ή στην τελευταία θέση και αμέσως μετά από κάθε γράμμα A,B,C βρίσκεται ένα ψηφίο 1,2,3.

(Απ. Σ-Λ-Λ-Σ)

15) Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 φύλλα (4 χρώματα με 13 χαρτιά το κάθε ένα). Στην επιλογή μας δεν ενδιαφέρει η σειρά. Σημειώστε αν τα παρακάτω είναι αλήθεια.

i) Ο αριθμός των επιλογών 4 φύλλων της τράπουλας ώστε να υπάρχει ένα από κάθε χρώμα είναι $13^4 \cdot 4!$.

ii) Ο αριθμός των επιλογών 4 φύλλων της τράπουλας ώστε να υπάρχει ένα από κάθε χρώμα είναι 13^4.

iii) Ο αριθμός των επιλογών 5 φύλλων της τράπουλας ώστε να είναι όλα από το ίδιο χρώμα είναι $4\binom{13}{5}$.

(Απ. Λ-Σ-Σ)

16) 10 επιβάτες που θεωρούνται διακεκριμένοι, βρίσκονται μέσα σε ένα λεωφορείο και απομένουν 3 στάσεις (ΣτΑ, ΣτΒ, ΣτΓ). Αν δεν έχει σημασία η σειρά:

i) Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν όλοι οι επιβάτες από το λεωφορείο με δεδομένο ότι σε κάθε στάση μπορούν να αποβιβάζονται από κανένας έως και 10 επιβάτες;

ii) Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν όλοι από το λεωφορείο αν πρέπει να κατέβουν από 4 σε δύο οποιεσδήποτε στάσεις και 2 στην άλλη;

(Απ. (i) 3^{10} (ii) 9450)

17) Σε μία συγκέντρωση συμμετέχουν 7 άνδρες και 3 γυναίκες. Όλοι οι άνδρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία, όλες οι γυναίκες μεταξύ τους και 3 από τους άνδρες με 2 από τις γυναίκες.

i) Πόσες είναι οι χειραψίες στις οποίες μετέχει τουλάχιστον ένας άνδρας;

ii) Πόσες είναι οι χειραψίες που συμμετέχει τουλάχιστον μία γυναίκα;

iii) Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός χειραψιών;

iv) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χειραψιών που κάνει ένα σύνολο 4 ανδρών σε αυτή τη συγκέντρωση;

(Απ. (i) 27 (ii) 9 (iii) 30 (iv) 24)

18) Αν n, k είναι θετικοί ακέραιοι δείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

i) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \ 1 \le k \le n$

ii) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}, \ 1 \le k \le n$

iii) $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}, \ 1 \le k \le n$

iv) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$, $0 \le r \le k \le n$

v) $(k)_r \binom{n}{k} = (n)_r \binom{n-r}{k-r}$, $0 \le r \le k \le n$

vi) $n\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k} = k\binom{n+1}{k+1} + \binom{n}{k+1}$

19) Πόσες ακολουθίες μήκους 15 που απαρτίζονται από 6 μηδενικά, 5 άσσους και 4 δυάρια μπορούμε να φτιάξουμε με την προϋπόθεση ότι το πρώτο στη σειρά μηδενικό που εμφανίζεται προηγείται του πρώτου άσσου;

(Απ. $\binom{15}{4} * \binom{10}{5}$)

20) Σε μια εταιρεία εργάζονται 8 άνδρες και 6 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συσταθεί το ΔΣ της εταιρείας το οποίο έχει 3 διακεκριμένες θέσεις αν είναι υποχρεωτικό να συμμετέχει σε αυτό μία τουλάχιστον γυναίκα;

(Απ. $(14)_3$-$(8)_3$)

21) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε δύο μη διακεκριμένα πιόνια στα 64 (8x8) διακεκριμένα τετραγωνίδια μιας σκακιέρας, όταν δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση των πιονιών σε γειτονικά τετραγωνίδια (γειτονικά τετραγωνίδια θεωρούνται εκείνα που είναι διαδοχικά σε μια γραμμή, στήλη η διαγώνιο).

(Απ. 1806)

22) Μια παρέα 10 διακεκριμένων ατόμων πρόκειται να ταξιδέψει με πλοίο και θα χρησιμοποιήσει 4 καμπίνες με χωρητικότητα 4,3,2 και 1 ατόμων αντίστοιχα. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα 10 άτομα στις 4 καμπίνες.

(Απ. 12600)

23) Έχουμε τέσσερις καναπέδες (τους Α, Β, Γ, Δ) τους οποίους μπορούμε να «ντύσουμε» με ταπετσαρίες 6 διαφορετικών χρωμάτων από δύο χρωματικές ομάδες, τα «γήινα» (κόκκινο, πορτοκαλί, χρυσαφί) και τα «θαλασσινά» (μπλε, θαλασσί και πράσινο).

i) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι το διαθέσιμο ύφασμα για κάθε χρώμα φτάνει για έναν μόνο καναπέ;
ii) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι ο ένας μόνο καναπές πρέπει να είναι οπωσδήποτε κόκκινος ή πράσινος και έχουμε απεριόριστο ύφασμα από κάθε χρώμα;
iii) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία μόνο χρωματική ομάδα για όλους τους καναπέδες (είτε τα «γήινα» ή τα «θαλάσσια» χρώματα) και έχουμε απεριόριστο ύφασμα από κάθε χρώμα;

(Απ. (i) 360 (ii) 512 (iii) 162)

24) Δεκαπέντε (διακεκριμένα) φορτηγά περνάνε με την σειρά (δηλαδή διατεταγμένα) από έναν τελωνιακό σταθμό. Για λόγους ασφαλείας (εύφλεκτα φορτία) δύο συγκεκριμένα από αυτά πρέπει να έχουν 3 ακριβώς άλλα φορτηγά ανάμεσά τους. Με πόσους τρόπους μπορούν να περάσουν από το τελωνείο τα φορτηγά;

(Απ. 2*11*13!)

25) Χαράσσουμε 6 παράλληλες μεταξύ τους ευθείες και άλλες 5 κάθετες σε αυτές. Πόσα διαφορετικά ορθογώνια θα σχηματιστούν;

(Απ. 150)

26) Έστω X ένα n-μελες σύνολο, α ένα στοιχείο του X και k θετικός ακέραιος μικρότερος του n.

i) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των n στοιχείων του X ανά k οι οποίοι περιέχουν το στοιχείο α;

ii) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των n στοιχείων του X ανά k οι οποίοι δεν περιέχουν το στοιχείο α;

iii) Χρησιμοποιώντας τα (i) και (ii) αποδείξτε την παρακάτω σχέση (τρίγωνο του Pascal).

$$\binom{\mathrm{n}}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

27) Το χρωματολόγιο μιας εταιρίας χρωμάτων αποτελείται από 8 βασικά χρώματα από τα οποία παράγονται όλα τα υπόλοιπα αναμιγνύοντάς τα με συγκεκριμένη δοσολογία («δόσεις»).

i) Πόσα χρώματα παράγονται με ανάμειξη <u>το πολύ τριών</u> από τα βασικά αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μόνο δόση από το κάθε ένα;

ii) Αν έχουμε μία μόνο δόση από κάθε βασικό χρώμα και θέλουμε να κατασκευάσουμε δύο χρώματα των 3 δόσεων και ένα χρώμα των δύο δόσεων με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(Απ. (i) 92 (ii) 280)

28) Δείξτε την ακόλουθη ταυτότητα του Vandermonde. Τα m, n, r είναι φυσικοί.

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$