Ασκήσεις Κατηγορηματικής Λογικής

1)

i) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι όροι της πρωτοβάθμιας Κατηγορηματικής Λογικής (κι εξηγείστε γιατί δεν είναι, όποιες δεν είναι). Κάντε λογικές υποθέσεις σχετικά με το είδος των συμβόλων:

$$\oplus(f(x,y),e),\ \oplus(\oplus(\otimes(x,x),\otimes(y,y)),1),\ a \in \{x,y\},\ \oplus(1,1),\ 1 \approx x$$

ii) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι της πρωτοβάθμιας Κατηγορηματικής Λογικής (κι εξηγείστε γιατί δεν είναι, όποιες δεν είναι):

$$\exists x(x \approx x_1 \wedge p(x,x_1)),\ (x \approx y) \vee x,\ (\exists x \approx x_1) p(x,x_1),\ \exists x_1(p(x_1,1))$$

iii) Ποιες από τις εμφανίσεις των μεταβλητών x_1, x_2 είναι ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες στους παρακάτω τύπους;

$$\forall x_1(x_1 \approx x_2) \rightarrow p(x_1),\ \forall x_1(s(x_1,x_2) \rightarrow p(x_1)),\ \forall x_1(s(x_1,x_2) \rightarrow p(x_1)) \wedge p(x_2),$$

$$\forall x_1 \forall x_2(s(x_1,x_2) \rightarrow p(x_1)) \wedge p(x_2),\ \forall x_1 \forall x_2(s(x_1,x_2) \rightarrow p(x_1)) \rightarrow p(x_2))$$

iv) Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι προτάσεις;

$$\forall x_1 \forall x_2(s(x_1,x_2)) \rightarrow (p(x_1) \rightarrow p(x_2)),\ \exists x_1(x_1 \approx e) \wedge \forall x_1 \exists x_2(p(x_1,e) \vee (x_1 \approx x_2)),$$

$$\exists x_1((x_1 \approx e) \wedge \exists x_2(p(x_1,e) \vee (x_1 \approx x_2))),\ \exists x_1(x_1 \approx e) \wedge \exists x_2((p(x_1,e) \vee (x_1 \approx x_2))$$

2) Έστω η πρωτοβάθμια γλώσσα με σύμπαν τους φυσικούς αριθμούς, ένα σύμβολο σταθεράς το 0, και δύο συναρτησιακά σύμβολα, το μονομελές s που ορίζεται σαν s(x)=x+1 και το διμελές * που ορίζεται σαν την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, γράψτε στην γλώσσα αυτή τον τύπο που την εκφράζει.

i) Ο x είναι άρτιος αριθμός,

ii) Ο x είναι πρώτος αριθμός,

iii) Κάθε αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη.

3) Να μεταφραστεί στη γλώσσα της Πρωτοβάθμιας Λογικής καθεμιά από τις παρακάτω εκφράσεις, εισάγοντας τα απαιτούμενα σύμβολα σχέσεων και σταθερών, σύμφωνα με το παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα</u>

Κάθε μουσικός παίζει ακριβώς ένα όργανο.

Κατηγορήματα:

Μ = μουσικός, Ο = όργανο, Π = παίζει

$\forall x(M(x) \rightarrow \exists y(O(y) \wedge \Pi(x,y) \wedge \forall z((O(z) \wedge \neg(y \approx z)) \rightarrow \neg\Pi(x,z))))$

1. Κανένας μουσικός που παίζει έγχορδο δεν παίζει πνευστό όργανο.
2. Κάποιος μουσικός παίζει ή πιάνο, ή κάποιο πνευστό όργανο, αλλά όχι σαξόφωνο.
3. Ένας μουσικός θεωρείται επιτυχημένος αν έχει εκδώσει τουλάχιστον ένα χρυσό άλμπουμ.
4. Υπάρχουν τουλάχιστον δυο μουσικοί που παίζουν τουλάχιστον δυο όργανα ο καθένας, αν και όχι τα ίδια.
5. Ο Γιάννης είναι μουσικός, όπως και η Ράνια, αλλά ενώ το όργανο που παίζει ο Γιάννης είναι πιάνο, η Ράνια παίζει μόνον τρομπόνι.

4) Σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα σύμβολο σταθεράς c θεωρήστε τις προτάσεις

1. $\exists x\, \exists y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
2. $\forall x \forall y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
3. $\forall x \forall y\, [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow x \approx c \vee y \approx c]$
4. $\forall x \forall y\, [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow P(x,y)]$
5. $\exists x(f(x)=c)$

Εξετάστε αν οι παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς η ψευδείς σε καθεμιά από τις παρακάτω δομές:

α) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών *N*, όπου το $\mathrm{P}(x, y)$ σημαίνει $x < y$, το f(x) δίνει τον επόμενο του x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 7.

β) Στο διμελές σύνολο $\{0,1\}$ όπου το $\mathrm{P}(x, y)$ σημαίνει $x \leq y$, f(x)=1-x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 0.

γ) Στην δομή που περιγράφει μια οικογένεια που αποτελείται από τους δύο γονείς Γιώργο και Δήμητρα και τα τρία τους παιδιά Κώστα, Μαρία και Ελένη. Ως σύμπαν θεωρούμε το σύνολο των μελών της οικογένειας {**Γιώργος**, **Δήμητρα**, **Κώστας**, **Μαρία**, **Ελένη**} ενώ το $\mathrm{P}(x, y)$ σημαίνει ότι οι x,y είναι αδέρφια, το f(x) δίνει τον πατέρα του x αν ο x είναι παιδί και τον σύζυγο του x αν ο x είναι γονέας, και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο **Κώστας**.

δ) Στη δομή με σύμπαν το υποσύνολο των μελών της παραπάνω οικογένειας {**Κώστας**, **Ελένη**} όπου το $\mathrm{P}(x, y)$ σημαίνει ότι οι x,y έχουν τους ίδιους γονείς, f(x)=x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο **Κώστας**.

5) Θεωρούμε το σύνολο {1,2,3} και συμβολίζουμε με P({1,2,3}) το δυναμοσύνολό του, δηλαδή το σύνολο που περιέχει σαν στοιχεία τα οκτώ υποσύνολα του {1,2,3}:

$$P(\{1,2,3\}) = \{ \varnothing , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

Ερμηνεύουμε στη δομή αυτή το κατηγορηματικό σύμβολο **Q** με τη σχέση «είναι υποσύνολο του» (δηλαδή **Q**(x,y) αν και μόνον $x \subseteq y$) και το σύμβολο σταθεράς **c** με το στοιχείο $\varnothing$,

Γράψτε προτάσεις της Κατηγορηματικής Λογικής που να δηλώνουν ότι

i. το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου

ii. υπάρχει σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα.

iii. το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του

iv. για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (γνωστό ως τομή συνόλων)

v. για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό σύνολο που τα περιέχει και είναι το μικρότερο δυνατό (γνωστό ως ένωση συνόλων)

6) Θεωρούμε την πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται στο σύνολο των γραφημάτων και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P η ερμηνεία του οποίου είναι P(x,y): «οι κορυφές x και y του γραφήματος ενώνονται με ακμή». Στην γλώσσα αυτή γράψτε τύπους που να δηλώνουν:
   i) Στο γράφημα δεν υπάρχει ανακύκλωση (δηλαδή ακμή που τα δύο άκρα της ταυτίζονται).
   ii) Το γράφημα δεν περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3).
   iii) Υπάρχουν στο γράφημα 3 διαφορετικές κορυφές βαθμού 3.
   iv) Υπάρχει στο γράφημα κορυφή που συνδέεται με όλες τις άλλες εκτός από μία.
   v) Υπάρχει μία μόνο κοινή γειτονική κορυφή στις κορυφές x και y.

7) Ερμηνεύουμε στους φυσικούς αριθμούς (που περιλαμβάνουν και το 0) το κατηγόρημα P(x,y) σαν «ο x διαιρεί τον y». Ποιοί από τους παρακάτω τύπους αληθεύουν;
   i) $\exists x \forall y P(x, y)$
   ii) $\exists y \forall x P(x, y)$
   iii) $\neg \exists x \forall y (P(y,x) \rightarrow y \approx 1 \vee y \approx x)$
   iv) $\forall x \forall y \forall z (P(z, y) \wedge P(y,x) \rightarrow P(z,x))$

8) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο g. Έστω ερμηνεία της L με σύμπαν το σύνολο $N-\{0\}$ στην οποία στο g ανατίθεται η γνωστή μας πρόσθεση φυσικών αριθμών ενώ στο f ανατίθεται η συνάρτηση που για κάθε φυσικό αριθμό n επιστρέφει 1 αν $n=1$, και αν το n είναι διάφορο του 1 επιστρέφει το μικρότερο πρώτο αριθμό που είναι διαιρέτης του n. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

i. Ο τύπος $\exists x \exists y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

ii. Ο τύπος $\forall x \forall y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

iii. Ο τύπος $\exists x \forall y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

iv. Ο τύπος $\forall x \exists y (f(g(x,y)) \approx f(x))$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

β) Έστω μία γλώσσα L πρώτης τάξης με μιά σταθερά **c**, ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\oplus$, και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\otimes$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

i. Ο τύπος $F_1 \equiv \forall u \forall v \exists x (\neg(v \approx c) \rightarrow (u \oplus (v \otimes x) \approx c))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

ii. Ο τύπος $\neg F_1$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους ακέραιους αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

iii. Ο τύπος $F_2 \equiv \forall u \forall v \forall w \exists x (\neg(w \approx c) \rightarrow (u \oplus (v \otimes x) \oplus ((w \otimes (x \otimes x)) \approx c)))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους μιγαδικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

iv. Ο τύπος $\neg F_2$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

9) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους αληθεύουν *μόνο στους φυσικούς ή μόνο στους πραγματικούς*. (Στην ουσία δηλαδή ένας τέτοιος τύπος διαχωρίζει τους πραγματικούς από τους φυσικούς.) Το διμελές κατηγόρημα $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x<y$ και το «$\cdot$» είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού.

i) $\exists x \forall y (P(x,y) \vee x \approx y)$

ii) $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)))$

iii) $\forall x \exists y (y \approx 2 \cdot x)$

iv) $\exists x \forall y (y \approx x \cdot y)$

v) $\exists x \forall y P(x, y)$

vi) $\exists x \forall y P(y, x)$

10) Δίνονται οι πρωτοβάθμιοι τύποι:

i) $\forall x P(x, x)$

ii) $\forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$

iii) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z))$

α) Πείτε με λόγια ποια ιδιότητα εκφράζει η διμελής σχέση P σε κάθε περίπτωση.

β) Για κάθε έναν από τους τρεις παραπάνω τύπους διαδοχικά, βρείτε μια δομή που να ισχύουν οι άλλοι δύο αλλά όχι αυτός. (Π.χ. Θέλουμε δομή που να ισχύουν οι (i), (ii) αλλά όχι ο (iii) κλπ.)