Ασκήσεις Προτασιακής Λογικής

1) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **προτασιακοί τύποι**, ποιες όχι, και γιατί;

(1)	$(p \to (q \to r)) \to q$	(2)	$\neg (s \neg (p \to q) \to r) \to s$
(3)	$p \to (q \to r) \to (p \to r)$	(4)	$\neg\neg p \wedge \neg q \to \neg r \vee p$
(5)	$\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(6)	$(p \neg \vee q \to p \vee \neg q) \to p \wedge q$
(7)	$\neg\neg (\neg p \vee q) \to p$	(8)	$p \to (q \to p) \to q$
(9)	$p \wedge q \vee (r \wedge s)$	(10)	$p \vee (q \wedge r) \to (p \to r)$
(11)	$\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	(12)	$\neg (\neg (\neg (p \to q) \to r) \to s)$

Για όσες εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμα τους, και υπολογίστε το ύψος του και τον αριθμό των υποτύπων που υπάρχουν σε αυτό. (Δείτε στις διαφάνειες του 1^{ου} μαθήματος τους ορισμούς αυτών των εννοιών.)

2) Τέσσερις φοιτητές Α, Β, Γ, Δ καλούνται να λάβουν μέρος σε μια εκδήλωση. Αν p_A, p_B, p_Γ, p_Δ είναι προτασιακές μεταβλητές που αληθεύουν αν και μόνο αν ο αντίστοιχος φοιτητής θα συμμετέχει στην εκδήλωση, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους που εκφράζουν τις παρακάτω δηλώσεις:

   i) Στην εκδήλωση θα συμμετέχει τουλάχιστον ένας, αλλά όχι και οι τέσσερις φοιτητές.
   ii) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν όλοι ή κανένας από τους τέσσερις φοιτητές.
   iii) Αν συμμετέχει ο Α, τότε δεν θα συμμετέχει ο Δ και ο Β θα συμμετέχει αν και μόνο αν συμμετέχει ο Γ.
   iv) Στην εκδήλωση θα συμμετέχουν τρεις ακριβώς φοιτητές εκ των οποίων ένας θα είναι ο Α.

3) Εκφράστε με τύπους της Προτασιακής Λογικής κάθε μια από τις παρακάτω δηλώσεις αφού εισάγετε προτασιακές μεταβλητές που να κωδικοποιούν κατάλληλα επιλεγμένες προτάσεις της φυσικής γλώσσας.

   - Ο Γιάννης έχει αυτοκίνητο.
   - Δεν είναι δυνατόν ο Γιάννης να είναι ανήλικος και να έχει δίπλωμα οδήγησης.
   - Αν ο Γιάννης δεν έχει δίπλωμα οδήγησης, τότε δεν έχει αυτοκίνητο.

4) Έστω τέσσερις προτασιακές μεταβλητές p_1, p_2, p_3, p_4 και S ένα υποσύνολο του συνόλου {1,2,3,4}. Οι τέσσερις προτασιακές μεταβλητές ερμηνεύονται ως εξής: *p_k είναι αληθής αν και μόνο αν το στοιχείο k ανήκει στο S*. Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές p_k, κατασκευάστε προτασιακούς τύπους (οι οποίοι να εμπλέκουν αποκλειστικά τις τέσσερις προτασιακές μεταβλητές) που εκφράζουν κάθε μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

   i) Το S είναι κενό.
   ii) Το S έχει το πολύ τρία στοιχεία
   iii) Το S έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

5) Στη σύγκλητο της αρχαίας Ρώμης, οι τρεις ύποπτοι για το φόνο του Ιούλιου Καίσαρα δηλώνουν:

   - Μάρκος Αντώνιος: «*Το έκανε ο Κάσσιος ή ο Βρούτος (ή και οι δύο)*»
   - Κάσσιος: «*Δεν το έκανα εγώ. Ο Μάρκος Αντώνιος λέει ψέματα*»
   - Βρούτος: «*Αν το έκανα εγώ, τότε οι άλλοι δύο είναι συνένοχοι μου*».

   Υποθέτοντας ότι οι αθώοι λένε πάντα αλήθεια, ενώ οι ένοχοι πάντα ψέματα και ότι μόνο ένας από τους τρεις λέει αλήθεια, ποιος (ή ποιοί) σκότωσε τον Ιούλιο Καίσαρα;

6) Έστω οι προτασιακές μεταβλητές *p, q, r* οι οποίες κωδικοποιούν τις ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:
   - p: Ο καιρός είναι καλός
   - q: Έχει ηλιοφάνεια
   - r: Έχει κρύο

   Γράψτε προτάσεις της φυσικής γλώσσας που να αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους.

   i) $q \wedge p \rightarrow \neg r$
   ii) $p \rightarrow (q \vee \neg r)$
   iii) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
   iv) $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$
   v) $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$

7) Ποιοι από τους (ορθούς) τύπους της άσκησης (1) είναι ταυτολογίες, ποιοι είναι αντιφάσεις και ποιοι τίποτε από τα δύο;
8) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες. Οι p_1, p_2 και p_3

είναι προτασιακές μεταβλητές.

1. $(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
2. $(\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$
3. $((p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$
4. $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)) \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_3)$

9) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες. Οι φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι.

1. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$
2. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$
3. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

10) Έστω f τύπος της ΠΛ που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση και p προτασιακή μεταβλητή. Τότε:

i) Ο τύπος $f \wedge (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία
ii) Ο τύπος $f \vee (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία
iii) Ο τύπος $f \rightarrow (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία
iv) Ο τύπος $f \rightarrow (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία

11) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;
i) $\varphi \wedge \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.
ii) $\varphi \rightarrow \neg (\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\varphi$.
iii) Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ είναι ταυτολογία.
iv) Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ είναι αντίφαση.

12) Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές ισχύουν και ποιες όχι;
i) $\neg(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)) \models (\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi$
ii) $\neg(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)) \models \varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$
iii) $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi \models \neg(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi))$
iv) $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi) \models \neg(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi))$

13) Έστω A ένα σύνολο λογικών αποτιμήσεων με περιττό πλήθος στοιχείων (δηλαδή στο A υπάρχει περιττό πλήθος αποτιμήσεων). Έστω D το σύνολο των προτασιακών τύπων που επαληθεύονται από *μία πλειοψηφία αποτιμήσεων* (οι μισές συν μία τουλάχιστον) στο A. Αποδείξτε ή εξηγήστε γιατί δεν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

1. Αν φ τύπος, τότε είτε ο φ είτε ο $\neg\varphi$ ανήκει στο D.
2. Αν ο φ ανήκει στο D και ο $(\varphi \rightarrow \psi)$ είναι ταυτολογία, τότε ο ψ ανήκει στο D.
3. Αν φ και $(\varphi \rightarrow \psi)$ ανήκουν στο D, τότε ο ψ ανήκει στο D.

14) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T, να δειχθεί ότι:

(i) Αν $T \cup \{\varphi\} \models \psi$ και $T \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$, τότε $T \models \neg\varphi$.

(ii) Αν $T \cup \{\varphi\} \models \psi$ και $T \cup \{\chi\} \models \psi$, τότε $T \cup \{\varphi \vee \chi\} \models \psi$.

15) Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ προτασιακοί τύποι. Η παρακάτω ισοδυναμία, για $n = 2$, είναι ο γνωστός τύπος *De Morgan*:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i \equiv \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$$

Χρησιμοποιήστε επαγωγή για να αποδείξετε την γενίκευσή του για κάθε $n \geq 3$.

16) Είναι γνωστό ότι υπάρχουν 2^n αποτιμήσεις πάνω σε n προτασιακές μεταβλητές. Από το σύνολο όλων των δυνατών αποτιμήσεων πάνω σε n μεταβλητές, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα υποσύνολο X. Δείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον προτασιακός τύπος φ ο οποίος επαληθεύεται ακριβώς στις αποτιμήσεις του συνόλου X και διαψεύδεται σε όλες τις άλλες. (Σημείωση: αυτή η πρόταση είναι ισοδύναμη με την περισσότερο διαισθητική ότι αν σε ένα πίνακα αληθείας n προτασιακών μεταβλητών επιλέξουμε αυθαίρετα ένα υποσύνολο των γραμμών του, τότε υπάρχει ένας τύπος φ ο οποίος έχει «Α» στις επιλεγμένες γραμμές και «Ψ» στις υπόλοιπες.)

17) Θεωρούμε το σύνολο των προτασιακών τύπων $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ όπου $\varphi_1 = p_1$ και ο τύπος φ_i για $i = 2, \dots, n$ ορίζεται από την σχέση $\varphi_i = (\varphi_{i-1} \wedge \neg p_i) \vee (\neg\varphi_{i-1} \wedge p_i)$. Τα $p_1, \dots, p_n$ είναι προτασιακές μεταβλητές. Δείξτε με επαγωγή στο n ότι ο τύπος φ_n επαληθεύεται από όλες τις αποτιμήσεις (και μόνον αυτές) των μεταβλητών $p_1, \dots, p_n$ όπου περιττό πλήθος των μεταβλητών είναι αληθείς.

18) Εξετάστε αν είναι ικανοποιήσιμα τα παρακάτω σύνολα. Εργαστείτε πρώτα με πίνακα αληθείας και στην συνέχεια προσπαθώντας να ελέγξετε την ικανοποιησιμότητα των συνόλων απευθείας.

i) $T_1 = \{p \to \neg r,\ r \wedge (p \vee q),\ q \wedge r\}$

ii) $T_2 = \{p \to (q \to r),\ (p \to q) \to \neg r,\ p \wedge q\}$

Υπάρχει τύπος του συνόλου T_2, του προηγούμενου υποερωτήματος, που να είναι ταυτολογική συνέπεια του συνόλου T_1; Αν ναι, να εντοπιστεί.

19) Χρησιμοποιώντας τους νόμους της ΠΛ βρείτε τύπους που χρησιμοποιούν μόνο τους **συνδέσμους** $\{\neg, \to\}$ και είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι** με τους:

i) $\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)$ ii) $p \vee \neg(q \wedge r)$

20) Έστω $T_1 = \{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n\}$ και $T_2 = \{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n\}$ δύο πεπερασμένα ικανοποιήσιμα σύνολα προτασιακών τύπων. Να δειχθεί ότι $T_1 \cup T_2$ είναι μη ικανοποιήσιμο, αν και μόνο αν υπάρχει τύπος $\varphi \in T(\Gamma_0)$ τέτοιος ώστε $T_1 \models \varphi$ και $T_2 \models \neg\varphi$.

21) Έστω $T_\vee$ το σύνολο των προτασιακών τύπων που αποτελείται από τύπους οι οποίοι:

- είναι προτασιακές μεταβλητές ή
- είναι της μορφής $(\varphi \vee \psi)$, όπου $\varphi, \psi \in T_\vee$ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι του συνόλου $T_\vee$.

Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα του $T_\vee$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο αυτό δεν περιέχει αντιφάσεις.

22) Έστω *: $T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$ η συνάρτηση που ορίζεται, επαγωγικά, ως εξής

$p^* = \neg p$, όπου p προτασιακή μεταβλητή και,

$$\mathbf{(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi^*)}$$
$$(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$$
$$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$$
$$(\varphi \to \psi)^* = \neg(\varphi^*) \wedge \psi^*$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi)^* = (\varphi \to \psi)^* \vee (\psi \to \varphi)^*$$

όπου φ και ψ προτασιακοί τύποι.

Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ και αποτίμηση αλήθειας α ισχύει $\overline{\alpha}(\varphi^*) = \overline{\alpha}(\neg\varphi)$.