

Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Εφαρμογές στην Κατηγορηματική Λογική

Επιπεδότητα

1)

i) Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά, συνεκτικά, μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα και περιλαμβάνει το κατηγορηματικό σύμβολο P . Το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή γράψτε δύο τύπους $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ που να δηλώνουν αντίστοιχα ότι «η κορυφή x έχει βαθμό 2» (αντίστοιχα 3).

ii) Δώστε τύπο φ που να δηλώνει «όλες οι κορυφές βαθμού 2 συνδέονται με όλες τις κορυφές βαθμού 3 και καμία κορυφή βαθμού 3 δεν συνδέεται με άλλη κορυφή βαθμού 3».

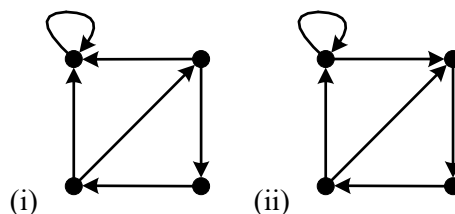
iii) Δώστε γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές που να επαληθεύει τον τύπο του (i).

2) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $Q(x,y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y ».

i) Δίνεται η πρόταση $\theta = \exists x \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists y [Q(x, x_1) \wedge Q(x_1, x_2) \wedge Q(x_2, x_3) \wedge Q(x_3, y)]$.

Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) ποια γραφήματα επαληθεύουν την θ . Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 4 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ . Να δώσετε μια δομή με το πολύ 3 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ .

ii) Να διατυπώσετε μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) παραπλεύρως και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii).



iii) Δίνεται η πρόταση $\varphi = \exists x \{ \neg Q(x, x) \wedge \forall y [x \neq y \rightarrow (Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z))] \}$.

Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού κορυφής) ποια γραφήματα επαληθεύουν την φ . Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 5 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση φ .

Υπόδειξη: Σκεφθείτε ποιες κορυφές ικανοποιούν τον τύπο $\psi(x) = \forall y [x \neq y \rightarrow (Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z))]$.

Υπενθύμιση: Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, ο έξω-βαθμός μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από την u .

3) Έστω $S_n = \{1, \dots, n\}$ και έστω $P(S_n)$ το σύνολο των υποσυνόλων του S_n . Ονομάζουμε επίπεδο $E_m, m = 1, \dots, n$ το υποσύνολο του $P(S_n)$ που αποτελείται από τα σύνολα με ακριβώς m στοιχεία. Θεωρούμε τα S_3 και $P(S_3)$. Εισάγουμε το κατηγορηματικό σύμβολο Q το οποίο ερμηνεύουμε ως εξής: $Q(x,y)$ αν και μόνο αν $x \subseteq y$.

α) Σχεδιάστε το κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών τέτοιο που κάθε κορυφή να αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του $P(S_3)$ και σύνολο ακμών το $A_3 = \{(x,y) | x, y \in P(S_3) \text{ και } Q(x,y)\}$.

β) Χρησιμοποιώντας το $Q(x,y)$, δώστε ένα τύπο $\varphi(x)$ που να ικανοποιείται από τις κορυφές του επιπέδου 2 και μόνον από αυτές.

- γ) Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους δώστε την ερμηνεία του στα ελληνικά αναφορικά με το παραπάνω γράφημα και πείτε αν ικανοποιείται ή όχι στο γράφημα αυτό.
1. $\varphi_1(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$
 2. $\varphi_2(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 ((y_1 \neq y_2) \wedge (y_2 \neq y_3) \wedge (y_1 \neq y_3) \wedge Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$
 3. $\psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \wedge x = y$
 4. $\psi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \wedge x = y$

4) Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε μη κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P και δύο μονομελή A και M . Το $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγαριών κορυφών που συνδέονται με ακμή ενώ το $A(x)$ (αντιστοίχως, $M(x)$) δηλώνει ότι η κορυφή x είναι άσπρη (αντιστοίχως μαύρη).

1. Χρησιμοποιώντας τα $A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο φ_1 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική δηλαδή έχει ένα και μόνο χρώμα».
2. Χρησιμοποιώντας τα $P(x, y)$, $A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο φ_2 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και γειτονεύει με κορυφές διαφορετικού χρώματος από αυτή».
3. Όπως παραπάνω με τον τύπο φ_3 να δηλώνει τώρα «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος είναι μαύρη».
4. Δώστε δομή με 6 κορυφές που να επαληθεύει τους τύπους των (2) και (3) ταυτόχρονα.

5) α) Θεωρήστε μία επίπεδη αποτύπωση ενός γραφήματος και έστω C ένας κύκλος ο οποίος περιλαμβάνει ακριβώς δύο όψεις της αποτύπωσης. Δείξτε ότι αν κάθε μία από τις όψεις είναι άρτιος κύκλος, τότε και ο C είναι άρτιος κύκλος. Γενικεύστε για την περίπτωση που ο C περικλείει αυθαίρετο αριθμό όψεων και όλες είναι άρτιοι κύκλοι.

β) Δείξτε ότι ένα απλό επίπεδο γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν κάθε εσωτερική όψη του είναι άρτιος κύκλος.

6) Δείξτε ότι ένα απλό επίπεδο γράφημα με 8 κορυφές και 13 ακμές δε μπορεί να χρωματιστεί με δύο χρώματα.

7) α) Έστω G απλό επίπεδο γράφημα. Συμβολίζουμε με n τον αριθμό των κορυφών του και με m τον αριθμό των ακμών του. Δείξτε ότι $m \leq 3n - 6$. Στη συνέχεια, δείξτε ότι αν επιπλέον ισχύει ότι κάθε όψη του G είναι τρίγωνο, τότε $m = 3n - 6$.

β) Έστω G ένα απλό επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε όψη είναι τρίγωνο. Συμβολίζουμε με p_i τον αριθμό των κορυφών βαθμού i στο G . Δείξτε ότι $\sum (6 - i)p_i = 12$, όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλους τους βαθμούς i που έχουν οι κορυφές του G .

8) Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών το $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ στο οποίο κάθε κορυφή v_i συνδέεται με το πολύ $k-1$ ($k \geq 1$) από τις κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Δείξτε με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών, ότι το G έχει έγκυρο χρωματισμό με k χρώματα, δηλαδή χρωματισμό στον οποίο δύο γειτονικές κορυφές χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα.

9) Σε ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα με n κορυφές στο οποίο κάθε ακμή αποτελεί σύνορο ακριβώς δύο όψεων, συμβολίζουμε με f_i τον αριθμό των όψεων του που έχουν βαθμό (ή αλλιώς, μήκος) i .

i) Δείξτε χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler ότι $\sum_{i=3}^n (i-2)f_i = 2(n-2)$.

ii) Ένα γράφημα ονομάζεται εξω-επίπεδο (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο έτσι ώστε το σύνορο της εξωτερικής όψης να είναι απλός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

(Παράδειγμα εξω-επίπεδου γραφήματος είναι ο κύκλος C_n , $n \geq 4$, στον οποίο προσθέτουμε μία χορδή, ενώ παράδειγμα επίπεδου αλλά όχι εξω-επίπεδου γραφήματος είναι το K_4 .) Βασιζόμενοι στο (i) δείξτε ότι σε ένα εξω-επίπεδο γράφημα ισχύει ότι $\sum_{i=3}^n (i-2)f_i = (n-2)$ όπου τώρα με f_i συμβολίζουμε τον αριθμό των εσωτερικών όψεων του που έχουν βαθμό i .