ΘΕΩΡΗΜΑ (Αντίστροφης απεικόνισης)

Έστω $X, Y$ χώροι Banach, $T: X \to Y$ φραγμ. τελεστής, 1-1, επί. Τότε $T^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής

Αποδ

Έστω $S = T^{-1}: Y \to X$.

Αρκεί να δ.ο $A \subseteq X$ ανοιχτό $\Rightarrow S^{-1}(A) \subseteq Y$ ανοικτό.

Έχω $y \in S^{-1}(A) \Leftrightarrow S(y) \in A \Leftrightarrow T^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \in T(A)$

Άρα $\left.\begin{array}{l} S^{-1}(A) = T(A) \\ A = \text{ανοικτό},\ T: X \to Y \text{ ανοικτή} \end{array}\right\} \Rightarrow S^{-1}(A) = \text{ανοικτό}$ $\square$

Παράδειγμα:

Έστω $Y = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ με νορμα $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$

Δείξτε ότι ο $Y$ όχι Banach

Αποδ Έστω $Y =$ Banach

Θεωρώ $T: X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to Y$ με $T(f) = f$

Έχω $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$

Άρα $\|T(f)\|_1 \leq \|f\|_\infty$

Επομένως ο $T =$ συνεχής τελεστής

Επειδή $T =$ 1-1, επί τότε από το Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης $T^{-1}: Y \to X$ συνεχής

Θεωρώ $f_n(t) = t^n \Rightarrow \|f_n\|_1 = \int_0^1 |t^n|dt = \frac{1}{n+1} \to 0$

Άρα $\|f_n\|_\infty = \|T^{-1}(f_n)\|_1 = \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$

Άτοπο, διότι $\|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n$

Άρα ο $Y$ όχι Banach

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κλειστού γραφήματος)

Έστω $X, Y$ χώροι Banach, $T: X \to Y$ γραμμική,

$$X \oplus Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\} =$$

= χώρος Banach με νόρμα $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$

$$G_r(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\} = \text{γράφημα της } T.$$

Αν $G_r(T)$ κλειστό υποσύνολο του $X \oplus Y$, τότε $T$ = συνεχής

Αποδ.

- Έχω $\left.\begin{array}{l} X \oplus Y \text{ Banach} \\ G_r(T) = \text{κλειστό στον } X \oplus Y \end{array}\right\} \Rightarrow G_r(T) = \text{Banach}$

- Ορίζω: $P_1 : G_r(T) \to X, \ P_1(x, T(x)) = x$

  $P_2 : G_r(T) \to Y, \ P_2(x, T(x)) = T(x)$

Οι $P_1, P_2$ είναι συνεχείς φ.γ.τ.

Επιπλέον η $P_1$ = 1-1, επί, άρα από το Θεώρημα αντιστροφής απεικόνισης,

$$P_1^{-1} : X \to G_r(T) = \text{συνεχής}$$

Έχω

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P_1^{-1}"] \arrow[dr, "T"'] & G_r(T) \arrow[d, "P_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$$P_2 \circ P_1^{-1}(x) = P_2(x, T(x)) = T(x) \quad \forall x \in X$$

Άρα $T = P_2 \circ P_1^{-1}$ = συνεχής □

## Θεώρημα (Αρχή ομοιόμορφου φράγματος)

Έστω $X$ = Banach, $Y$ = χώρος με νόρμα,

$T_\iota : X \to Y$, $\iota \in I$ φραγμένοι τελεστές, ώστε $\sup_\iota \|T_\iota(x)\| < +\infty$

$\forall x \in X$.

Τότε υπάρχει $M > 0$: $\sup_{\iota \in I} \|T_\iota\| \le M$

**Απόδειξη**

· Έστω $A_n = \{x \in X : \|T_\iota(x)\| \le n \ \forall \iota \in I\}$, $n \in \mathbb{N}$

· Αν $f_\iota(x) = \|T_\iota(x)\|$, $x \in X$, τότε η $f_\iota$ = συνεχής και

άρα $f_\iota^{-1}([0,n])$ = κλειστό $\forall \iota \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $A_n = \bigcap_{\iota \in I} f_\iota^{-1}([0,n])$ = κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$

· Αν $x \in X$, αφού $\sup_\iota \|T_\iota(x)\| < +\infty$, $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|T_\iota(x)\| \le n \ \forall \iota \in I \Rightarrow x \in A_n$$

· Επομένως $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Από το Θεώρημα Baire, $\exists n_0$: $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in X, \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subseteq A_{n_0}$$

· Έστω $x \in X$, $\|x\| = 1$, για κάθε $\iota \in I$ έχουμε

$$\|T_\iota(x)\| = \frac{2}{\delta}\|T_\iota(\tfrac{\delta x}{2})\| = \frac{2}{\delta}\|T_\iota(\tfrac{\delta x}{2} + x_0) - T_\iota(x_0)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|T_\iota(x)\| \le \frac{2}{\delta}\|T_\iota(\tfrac{\delta x}{2} + x_0)\| + \frac{2}{\delta}\|T_\iota(x_0)\| \quad (1)$$

Έχω $\frac{\delta x}{2} + x_0 \in B(x_0, \delta) \Rightarrow \frac{\delta x}{2} + x_0 \in A_{n_0} \Rightarrow \|T_\iota(\frac{\delta x}{2} + x_0)\| \le n_0$

όμοια $\|T_\iota(x_0)\| \le n_0$

· Άρα από (1) $\Rightarrow \|T_\iota(x)\| \le \frac{2}{\delta} n_0 + \frac{2}{\delta} n_0 = \frac{4 n_0}{\delta}$

- Άρα $\|T_i(x)\| \le \frac{4n_0}{\delta}$ $\forall x: \|x\|=1$

- Επομένως $\|T_i\| \le \frac{4n_0}{\delta}$ $\forall i\in I \Rightarrow \sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$ □

**Θεώρημα (Banach-Steinhaus)**

Έστω $X$ = Banach και $Y$ = χώρος με νόρμα,
$T_n: X\to Y$ ΦΓΤ ώστε υπάρχει το $\lim_n T_n(x)\in Y$ $\forall x\in X$

Τότε ο τελεστής
$T: X\to Y$, $T(x)=\lim_n T_n(x)$ είναι φραγμένος

**Απόδειξη**

- Έστω $x\in X \Rightarrow \exists\, y\in Y: y=\lim_n T_n(x) \Rightarrow \|y\|=\lim_n\|T_n(x)\|$

Άρα η ακολουθία $(\|T_n(x)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη,

Δηλαδή $\sup_n \|T_n(x)\|<+\infty$ $\forall x\in X$

- Από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος,

$$M=\sup_n\|T_n\|<+\infty$$

- Έτσι $\|T_n(x)\|\le M\|x\|$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$

Αφήνω $n\to+\infty$ και έχω

$$\|T(x)\|\le M\|x\| \quad \forall x\in X$$

Άρα $T$ = φ.Γ.Τ. □

**Παρατήρηση:** Η υπόθεση ότι $X$ = Banach στην αρχή του ομοιομ. φράγματος είναι απαραίτητη

**Παράδειγμα:**

Έστω $X=c_{00}$, $T_n: X\to\mathbb{F}$, $T_n(x)=\sum_{i=1}^{n} i x_i$, $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$

Αν $x\in X$, $x=(x_1,\dots,x_m,0,\dots)$

Άρα $|T_n(x)|\le \sum_{i=1}^{m} i|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} i\right)\|x\|_\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\sup_n |T_n(x)|<+\infty$ $\forall x\in X$

Όμως $\|T_n\|\ge \|T_n(e_n)\|=n$ $\forall n \Rightarrow \sup_n\|T_n\|=+\infty$ □

# Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τοπολογικός χώρος, είναι ένα ζεύγος $(X, \tau)$ όπου $X$ = σύνολο και $\tau$ = οικογένεια υποσυνόλων του $X$, ώστε

(i) $\phi, X \in \tau$

(ii) Η $\tau$ κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις στοιχείων της

Δηλ. $\{G_i : i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

(iii) Αν $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

→ Η $\tau$ ονομάζεται τοπολογία στο $X$ και τα στοιχεία της, ανοικτά σύνολα

→ Ο $(X, \tau)$ λέγεται Hausdorff αν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $G_1, G_2 \in \tau$ με $x \in G_1$, $y \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = \phi$

Παραδείγματα:

(i) Αν $X$ = σύνολο, $\tau = \{\phi, X\}$ = τοπολογία στο $X$

Είναι η μικρότερη τοπολογία στο $X$

(ii) Αν $X$ = σύνολο, $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$ = τοπολογία στο $X$

Είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο $X$ και ονομάζεται διακριτή τοπολογία

(iii) Αν $(X, d)$ = μετρικός χώρος,

$$\tau_d = \{A \subseteq X : A = d\text{-ανοικτό}\} = \text{τοπολογία στο } X$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:
Ο τοπολογικός χώρος $(X, \tau)$ λέγεται μετρικοποιήσιμος αν η τοπολογία του προκύπτει από μετρική

Δηλ. υπάρχει μετρική $d$ στο $X$ ώστε $\tau = \tau_d$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(X, \tau)$ τοπολογικός χώρος.
Μια οικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \tau$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\tau$, αν κάθε $G \in \tau$, είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$

<u>Παραδείγματα:</u>
Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος,

$$\mathcal{B} = \{ B_d(x,\varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0 \} = \text{βάση της } \tau_d$$

Διότι κάθε $G \in \tau$ γράφεται $G = \bigcup_{\varepsilon \in I} B(x,\varepsilon)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(X, \tau)$ τοπολογικός χώρος

(i) Ένα σύνολο $N \subseteq X$ λέγεται περιοχή του $x \in X$, αν υπάρχει $G \in \tau$ ώστε $x \in G \subseteq N$

(ii) Η οικογένεια όλων των περιοχών του $x$, $\mathcal{N}_x$, ονομάζεται σύστημα περιοχών του $x$

(iii) Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ λέγεται βάση περιοχών του $x \in X$ αν $\forall N \in \mathcal{N}_x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x :\ B \subseteq N$

<u>Παραδείγματα:</u>
Αν $(X, d)$ μετρικός χώρος, $x \in X$,

$$\mathcal{B}_x = \{ B_d(x, \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \} = \text{βάση περιοχών του } x$$

(Διότι $\forall\ G \subseteq X$ ανοικτό με $x \in G$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$:
$B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq G$ )

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $(X, \tau)$ = τοπολ. χώρος, $A \subseteq X$

(i) Το $A$ λέγεται κλειστό αν $X \setminus A \in \tau$

(ii) Το $A$ λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του έχει πεπερ. υποκάλυμμα

(iii) $\bar{A} = \bigcap \{ F : F = \text{κλειστό},\ A \subseteq F \}$ = κλειστή θήκη του $A$

(Το $\overline{A}$ = το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A)

(iii) $\mathring{A} = \cup \{ G : G \in \mathcal{T}, G \subseteq A \}$ = εσωτερικό του A

(Το $\mathring{A}$ = το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A)

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω X, Y τ.χ και $f: X \to Y$

(i) Η f λέγεται συνεχής στο $x \in X$ αν $\forall V \in \eta_{f(x)}$, $\exists U \in \eta_x : f(U) \subseteq V$

(ii) Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής $\forall x \in X$

(iii) Η f λέγεται ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής, 1-1, επί και η $f^{-1}: Y \to X$ συνεχής.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

(i) Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ λέγεται κατευθυνόμενο αν $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\exists \lambda \in \Lambda$: $\lambda_1 \leq \lambda$ και $\lambda_2 \leq \lambda$

(ii) Δίκτυο σε ένα σύνολο X είναι μια απεικόνιση $x: \Lambda \to X$ όπου $(\Lambda, \leq)$ = κατευθυνόμενο σύνολο

Συμβολίζω $x(\lambda) = x_\lambda$

Παραδείγματα

(1) Οι ακολουθίες είναι δίκτυα

(2) Οι απεικονίσεις $\mathbb{Z} \to X$ είναι δίκτυα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω X = τ.χ, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο στο X

Λέμε ότι το $(x_\lambda)$ συγκλίνει στο $x \in X$ αν $\forall U \in \eta_x$, $\exists \lambda_0 : x_\lambda \in U \ \forall \lambda \geq \lambda_0$

π.χ: $X = \mathbb{R}$, το δίκτυο $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0 διότι $\forall U \in \eta_0$, $\exists n_0 : \frac{1}{n} \in U \ \forall n \geq n_0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ:

(i) $(X,\tau)$ = Τ.χ, $x \in X$, $A \subseteq X$

Τότε $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ δίκτυο $(x_\delta) \subseteq A$, $x_\delta \to x$

(ii) $X, Y$ = τχ, $f: X \to Y$

Η $f$ συνεχής στο $x \in X$ ανν $\forall$ $(x_\delta)$ δίκτυο στο $x$

ώστε $x_\delta \to x$ τότε $f(x_\delta) \to f(x)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $X_\iota$, $\iota \in I$ οικογένεια Τ.χ

$$X = \prod_{\iota \in I} X_\iota = \{ (x_\iota)_{\iota \in I} : x_\iota \in X_\iota \}$$

$$\pi_j : X \to X_j, \quad \pi_j((x_\iota)) = x_j$$

Η μικρότερη τοπολογία ως προς την οποία οι προβολές $\pi_j : X \to X_j$ είναι συνεχής ονομάζεται τοπολογία γινόμενο

Παρατηρήσεις:

(i) Ως προς την τοπολογία γινόμενο αν $x \in X$, ένα δίκτυο $(x_\delta)$ συγκλίνει στο $x$ ανν $\pi_\iota(x_\delta) \to \pi_\iota(x)$ $\forall \iota \in I$

(ii) Μια βάση ως προς την τοπολογία γινόμενο είναι σύνολα της μορφής $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ όπου $G_\iota \subseteq X_\iota$ ανοικτό, $\{\iota : G_\iota \neq X_\iota\}$ = πεπερασμένο

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

(i) Το καρτεσιανό γινόμενο χώρων Hausdorff είναι χώρος Hausdorff

(ii) Το καρτεσιανό γινόμενο αριθμήσιμης οικογένειας μετρικοποιήσιμων χώρων είναι μετρικοποιήσιμος

(iii) (Tychonoff) Το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών Τ.χ είναι συμπαγής.

**Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και τοπικά κυρτοί χώροι**

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Ένας τοπολογικός διανυσμ. χώρος (τ.δ.χ) είναι ένας γραμμικός χώρος $X$ με μία τοπολογία ώστε

(i) $\{0\}$ = κλειστό

(ii) $+ : X \times X \to X$, $(x,y) \to x+y$ είναι συνεχής
($X \times X$ με τοπολογία γινόμενο)

(iii) $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$, $(t,x) \to tx$ είναι συνεχής
($\mathbb{F} \times X$ με τοπολογία γινόμενο)

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(i) Εάν $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{F}^*$, οι απεικονίσεις

$f : X \to X$, $f(x) = x_0 + x$

$g : X \to X$, $g(x) = t_0 x$

είναι ομοιομορφισμοί.

Από αυτά προκύπτουν τα ακόλουθα:

(α) $V$ = περιοχή του $0 \Leftrightarrow x_0 + V$ = περιοχή του $x_0$

(αι) $V$ = περιοχή του $x_0 \Leftrightarrow t_0 V$ περιοχή του $t_0 x_0$

(αιι) $\left.\begin{array}{l} \{x_0\} = f(\{0\}) \\ \{0\} = \text{κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_0\} = \text{κλειστό}$

Άρα όλα τα μονοσύνολα σε τ.χ $X$ είναι κλειστά.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Κάθε τ.δ.χ. είναι Hausdorff

<u>Απόδειξη:</u>

· Έστω $x, y \in X$: $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \notin \{x-y\} \Rightarrow 0 \in X \setminus \{x-y\} = \text{ανοικτό}$$

· Άρα $\exists$ περιοχή $V$ του $0$ ώστε

$$0 \in V \subseteq X \setminus \{x-y\}$$

· Από την συνέχεια της πρόσθεσης,

$$\exists\ U = \text{περιοχή του } 0 : \quad U + U \subseteq V$$

· <u>Ισχυρισμός</u> $(x-U) \cap (y+U) = \emptyset$

Πράγματι, αν $z \in (x-U) \cap (y+U) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x - u_1 \\ z = y + u_2 \\ u_1, u_2 \in U \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - z = u_1 \in U \\ z - y = u_2 \in U \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y \in U + U \subseteq V \subseteq X \setminus \{x-y\}$$

Άρα $x - y \in X \setminus \{x-y\}$ Άτοπο

· Έχω $x - U$ = ανοικτό σύνολο που περιέχει το $x$

$y + U$ = ανοικτό σύνολο που περιέχει το $y$

$$(x-U) \cap (y+U) = \emptyset$$

· Άρα ο $X$ = Hausdorff $\square$