ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN

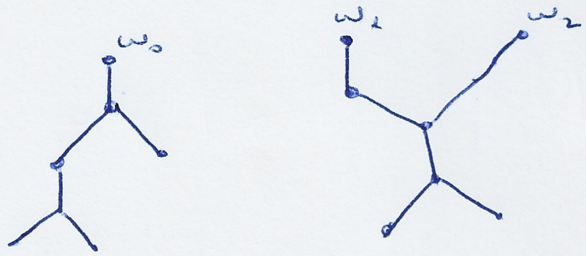
• Έστω $(\underline{\Omega}, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο.
Αλυσίδα στο $\underline{\Omega}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $\underline{\Omega}_0 \subseteq \underline{\Omega}$

• Αν κάθε αλυσίδα $\underline{\Omega}_0$ έχει άνω φράγμα στο $\underline{\Omega}$ δηλ.

$$\exists\, \phi \in \underline{\Omega}: \quad \omega \leq \phi \quad \forall\, \omega \in \underline{\Omega}_0$$

τότε το $\underline{\Omega}$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

Δηλ. $\exists\, \omega_0 \in \underline{\Omega}$ με την ιδιότητα να μην υπάρχει $\omega \in \underline{\Omega}: \omega_0 \leq \omega, \ \omega_0 \neq \omega$



Θεώρημα: Έστω X δ.χ. επί $\mathbb{R}$, $q: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές, Y = υπόχωρος του X, $\phi: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική με $\phi(y) \leq q(y) \ \forall\, y \in Y$.

Τότε $\exists$ γραμμική $F: X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$F|_Y = \phi, \quad F(x) \leq q(x) \ \forall\, x \in X$$

Απόδειξη

• Ορίζω

$$\underline{\Omega} = \{(Z, f): Y \leq Z \leq X, \ f: Z \to \mathbb{R} \text{ γραμμ.}, \ f|_Y = \phi, \ f \leq q\}$$

• Ορίζουμε στο $\underline{\Omega}$ μερική διάταξη

$$(Z_1, f_1) \leq (Z_2, f_2) \iff \begin{cases} Z_1 \leq Z_2 \\ f_2|_{Z_1} = f_1 \end{cases}$$

• Έστω $\underline{\Omega}_0 = \{(Z_i, f_i): i \in I\}$ αλυσίδα στο $\underline{\Omega}$

Ορίζω $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$, $f: Z \to \mathbb{R}$, $f|_{Z_i} = f_i$

Τότε το (Z, f) είναι άνω φράγμα για το Ω.

- Από το λήμμα του Zorn το Ω έχει μεγιστικό στοιχείο (Z_0, f_0)

  Αρκεί να δ.ο. $Z_0 = X$

- Εάν $Z_0 \subsetneq X$ άρα $\exists\, x_0 \in X \setminus Z_0$

  Ορίζεται ο γραμ. χώρος $Z' = Z_0 \oplus [x_0]$

  - Από το προηγούμενο λήμμα,

    $\exists\, f : Z' \to \mathbb{R}$ γραμ. ώστε $f|_{Z_0} = f_0$, $f \leq q$

    Άρα $(Z', f) \in \Omega$

  - Άτοπο διότι $(Z_0, f_0) \lneq (Z', f)$ και $(Z_0, f_0) =$ μεγιστικό.

  - Άρα $Z_0 = X$ $\square$

<u>Θεώρημα (Hahn-Banach)</u>

Εάν X = δ.χ. επί $\mathbb{F}$, $Y \leq X$, $p : X \to [0, +\infty)$ ημινόρμα

Αν $f : Y \to \mathbb{F}$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y$$

τότε υπάρχει $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ γραμμική με $\Lambda|_Y = f$ και

$$|\Lambda(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

<u>Απόδ</u>

<u>α' περ</u> $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Από το προηγούμενο Θεώρημα $\exists\, \Lambda : X \to \mathbb{F}$

γραμμική με $\Lambda|_Y = f$ και

$$\Lambda(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Έτσι $\Lambda(-x) \leq p(-x) \Rightarrow -\Lambda(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$

Άρα $|\Lambda(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$

<u>β' περ</u> $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Θεωρώ $g = \mathrm{Re} f : Y \to \mathbb{R}$

Η g είναι γραμμική και

$$|g(y)| \leq |f(y)| \leq p(y) \quad \forall y \in Y$$

Άρα από την α' περίπτωση, $\exists\, G : X \to \mathbb{R}$ γραμ. ώστε $G|_Y = g$, $|G(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$

· Ορίζω $\Lambda : X \to \mathbb{C}$, $\Lambda(x) = G(x) - iG(ix)$

→ Η Λ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική

→ $\Lambda|_Y = f$ διότι

$$\Lambda(y) = G(y) - iG(iy) = g(y) - ig(iy) = \mathrm{Re} f(y) - i\,\mathrm{Re} f(iy) =$$

$$= \mathrm{Re} f(y) - i\,\mathrm{Re}(i f(y)) =$$

$$= \mathrm{Re} f(y) + i\,\mathrm{Im} f(y) = f(y)$$

→ $|\Lambda(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$

Αν $x \in X$, $\theta \in \mathbb{R}$

$$|\Lambda(x)| = e^{i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{i\theta}x) = G(e^{i\theta}x) - iG(ie^{i\theta}x)$$

Έχω $|\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$

$$G(e^{i\theta}x) \in \mathbb{R}$$

Άρα $iG(ie^{i\theta}x) \in \mathbb{R} \Rightarrow G(ie^{i\theta}x) = 0$

Άρα

$$|\Lambda(x)| = G(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|\,p(x) = p(x) \quad \forall x \in X$$

$\square$

Πόρισμα 1 $X=$ χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος X, $y^* \in Y^*$

Τότε υπάρχει $x^* \in X^*$: $x^*|_Y = y^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$

Απόδ.

- Ορίζω την ημινόρμα $p: X \to [0,+\infty)$, $p(x) = \|y^*\| \, \|x\|$

  Έχω $\forall y \in Y$, $|y^*(y)| \leq \|y^*\| \, \|y\| = p(y)$

- Άρα από το Θεώρημα Hahn-Banach, $\exists \, x^* \in X^*$

  $x^*|_Y = y^*$ και

  $|x^*(x)| \leq p(x) \Rightarrow |x^*(x)| \leq \|y^*\| . \|x\| \quad \forall x \in X$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα, } \|x^*\| \leq \|y^*\| \\ &\text{Επίσης, αφού } x^*|_Y = y^* \Rightarrow \|y^*\| \leq \|x^*\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|x^*\| = \|y^*\|$$

□

Πόρισμα 2 $X=$ χώρος με νόρμα, $Y=$ κλειστός υπόχωρος X, $x_0 \notin Y$

Τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$, $\|x_0^*\| = 1$, $x_0^*|_Y = 0$, $x_0^*(x_0) = d(x_0, Y)$

Απόδ.

- Θέτω $Z = Y \oplus [x_0]$, $\delta = d(x_0, Y)$

  Ορίζω $z^*: Z \to \mathbb{F}$, $z^*(y + \lambda x_0) = \lambda . \delta$

  Έχω $z^*|_Y = 0$

- Η $z^* =$ συνεχής,

$$\sup_{\|z\|=1} |z^*(z)| = \sup_{z \neq 0} \frac{|z^*(z)|}{\|z\|} = \sup_{\substack{y \in Y \\ \lambda \neq 0}} \frac{|\lambda| \, \delta}{\|y + \lambda x_0\|} =$$

$$= \sup_{y \in Y} \frac{\delta}{\|y + x_0\|} = \frac{\delta}{\inf\limits_{y \in Y} \|y + x_0\|} = \frac{\delta}{d(x_0, Y)} = \frac{\delta}{\delta} = 1$$

Άρα $\|z\|=1$

- Από το προηγούμενο πόρισμα, $\exists\, x_0^* \in X^*$:

$$\|x_0^*\| = \|z^*\| = 1, \quad x_0^*\big|_Z = z^*$$

Άρα $x_0^*(x_0) = z^*(x_0) = \delta = d(x_0, Y)$

- Προφανώς $x_0^*\big|_Y = 0$ □

Πόρισμα 3 X = χώρος με νόρμα, $x_0 \neq 0$

Τότε $\exists\, x_0^* \in X^*$: $\|x_0^*\| = 1$, $x_0^*(x_0) = \|x_0\|$

Απόδ

- Έστω $Y = \{0\}$ = κλειστός υπόχωρος του X

$d(x_0, Y) = \|x_0\|$

- Από το πόρισμα 2, $\exists\, x_0^* \in X^*$: $x_0^*(x_0) = d(x_0, Y) = \|x_0\|$

και $\|x_0^*\| = 1$. □

Πόρισμα 4

Για κάθε $x \in X$, $\|x\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|$

Απόδ

- Έχουμε $|x^*(x)| \leq \|x\|$ $\forall\, x^*: \|x^*\| = 1$

- Άρα $\sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \leq \|x\|$ (1)

- Από το πόρισμα 3, $\exists\, x_0^* \in X^*$: $\|x_0^*\| = 1$,

$x_0^*(x) = \|x\|$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \|x\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Έστω X = χώρος με νόρμα

Αν X^* = διαχωρίσιμος τότε X = διαχωρίσιμος.

<u>Απόδ</u>

- Έστω $S_{X^*}(0,1) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$
- Αφού $S_{X^*}(0,1)$ = διαχωρίσιμο $\exists$ σύνολο $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S_{X^*}(0,1)$

  πυκνό στο $S_{X^*}(0,1)$
- Έστω $1 = \|x_n^*\| = \sup\{|x_n^*(y)| : y \in Y, \|y\| = 1\}$

  Άρα υπάρχει $x_n \in X$: $\|x_n\| = 1$ και $|x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}$
- Θέτω $Y = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$

  Αρκεί να δ.ο. $Y = X$
- Αν $Y \subsetneq X$ από το λήμμα 2, υπάρχει $x^* \in X^*$:

  $\|x^*\| = 1$, $x^*|_Y = 0$
- Αφού $x^* \in S_{X^*}(0,1) = \overline{\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$

  υπάρχει $m \in \mathbb{N}$: $\|x^* - x_m^*\| < \frac{1}{2}$. Τότε

  $$\frac{1}{2} < |x_m^*(x_m)| = |(x^* - x_m^*)(x_m)| \leq \|x^* - x_m^*\| \|x_m\| < \frac{1}{2}$$

  Άτοπο
- Άρα $Y = X$ □

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω X, Y χώροι με νόρμα και

$T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής

Ορίζω $T^* : Y^* \to X^*$, $T^*(y^*) = y^* \circ T$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "T^*(y^*)"'] & Y \arrow[d, "y^*"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση $T =$ φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^\prime\| = \|T\|$

Απόδ

$\to$ $T^\prime =$ γραμμική

$\to$ $\|T^\prime(y^\prime)\| = \|y^\prime \circ T\| \leq \|y^\prime\| \, \|T\|$ $\forall y^\prime \in Y^\prime$

Άρα $T^\prime =$ ΦΓΤ και $\|T^\prime\| \leq \|T\|$ (1)

$\to$ $\|T^\prime\| = \sup\{\|T^\prime(y^\prime)\| : \|y^\prime\| = 1\} =$

$= \sup\{\|y^\prime \circ T\| : \|y^\prime\| = 1\} =$

$= \sup\{|y^\prime \circ T(x)| : \|y^\prime\| = 1, \|x\| = 1\}$ (2)

• Έστω $x \in X$, $\|x\| = 1$

Από τα πορίσματα, $\exists\, y^\prime \in Y^\prime : |y^\prime(T(x))| = \|T(x)\|$ με $\|y^\prime\| = 1$

Άρα (2) $\Rightarrow$ $\|T^\prime\| \geq \|T(x)\|$ $\forall x : \|x\| = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\|T^\prime\| \geq \|T\|$ (3)

$\to$ Από (1), (3) $\Rightarrow$ $\|T^\prime\| = \|T\|$ $\square$

Άσκηση Αν $T: X \to Y$ ισομετρία επί τότε

$T^\prime : Y^\prime \to X^\prime$ ισομετρία επί

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $X =$ χώρος με νόρμα,

$$J: X \to X^{\prime\prime}, \quad J(x): X^\prime \to \mathbb{F},$$

$$J(x)(x^\prime) = x^\prime(x)$$

Η J λέγεται κανονική εμφύτευση.

Αν η J είναι επί του $X^{\prime\prime}$ ο X λέγεται

αυτοπαθής

Παρατήρηση: Η J = ισομετρία

Απόδ.

$\to$ $J(x+\lambda y)(x') = x'(x+\lambda y) = x'(x) + \lambda x'(y) =$

$= J(x)(x') + \lambda J(y)(x') =$

$= (J(x) + \lambda J(y))(x') \quad \forall x' \in X'$

Άρα $J(x+\lambda y) = J(x) + \lambda J(y) \quad \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{F}$.

Επομένως J = γραμμική.

$\to$ $\|J(x)\| = \sup\limits_{\|x'\|=1} |J(x)(x')| = \sup\limits_{\|x'\|=1} |x'(x)| = \|x\| \quad \forall x \in X$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $1<p<+\infty$, ο ℓ^p είναι αυτοπαθής.

Αποδ

- Έστω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Ορίζονται οι ισομετρίες επί:

$T: \ell^p \to (\ell^q)', \quad T(x)(y) = \sum\limits_n x(n)y(n) \quad \forall x \in \ell^p, y \in \ell^q$

$S: \ell^q \to (\ell^p)', \quad S(y)(x) = \sum\limits_n y(n)x(n) \quad \forall x \in \ell^p, y \in \ell^q$

Τότε

- $S': (\ell^p)'' \to (\ell^q)'$ ισομετρία επί

Άρα $(S')^{-1}: (\ell^q)' \to (\ell^p)''$ επί

Άρα $(S')^{-1} \circ T: \ell^p \to (\ell^p)''$ επί

- Έχουμε την κανονική εμφύτευση

$J: \ell^p \to (\ell^p)'', \quad J(x)(x') = x'(x)$

Πρέπει να δ.ο $J =$ επί

Αρκεί να δ.ο $J = (S^{1})^{-1} \circ T \Leftrightarrow S^{1} \circ J = T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^{1}(J(x)) = T(x) \ \forall x \in \ell^{p} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J(x) \circ S = T(x) \ \forall x \in \ell^{p}$

Έστω $y \in \ell^{q}$, έχω

$J(x) \circ S(y) = J(x)(S(y)) = S(y)(x) = \sum_{n} y(n) x(n) = T(x)(y) \ \forall y \in \ell^{q}$

Άρα $J(x) \circ S = T(x) \ \forall x \in \ell^{p}$

Πρόταση: Ο C_0 όχι αυτοπαθής

Απόδ

Έχω $C_0^{1} \cong \ell^{1} \Rightarrow C_0^{11} \cong (\ell^{1})^{1} = \ell^{\infty}$

Αν ο C_0 ήταν αυτοπαθής, θα είχαμε $C_0 \cong C_0^{11}$

Άρα $C_0 \cong \ell^{\infty}$

Αυτό είναι άτοπο διότι ο $C_0 =$ διαχωρίσιμος και ο ℓ^{∞} όχι διαχωρίσιμος

Εργασία Για $1 < p < +\infty$ ο $L^{p}(X, \mu)$ είναι αυτοπαθής