ΟΡΣ Έστω $p>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Οι p, q λέγονται συζυγείς εκθέτες

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν p,q συζυγείς εκθέτες τότε $(\ell^p)^* \cong \ell^q$

ΑΠΟΔ

• Θέλω να ορίσω $T: \ell^q \to (\ell^p)^*$

Δηλ. θέλω $\forall x \in \ell^q$, $T(x): \ell^p \to \mathbb{F}$ γραμ. συνεχής

• Ορίζω $T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$

→ $T(x)$ = καλά ορισμένη; Σωστά από Holder

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p\right)^{1/p} = \|x\|_q \|y\|_p \quad (1)$$

→ $T(x)$ = γραμμική

$$T(x)(\lambda y + z) = \lambda T(x)(y) + T(x)(z) \quad \forall y, z \in \ell^p, \lambda \in \mathbb{F}$$

→ $T(x)$ = συνεχής

$$(1)$$

$$|T(x)(y)| = \left|\sum_n x(n)y(n)\right| \leq \sum_n |x(n)y(n)| \leq \|x\|_q \|y\|_p$$

Άρα $\|T(x)\| \leq \|x\|_q$ (2)

• Έχω ορίσει $T: \ell^q \to (\ell^p)^*$

→ T = γραμμική $(T(\lambda x + w) = \lambda T(x) + T(w))$

→ T = συνεχής λόγω της (2)

→ T = επί

Έστω $y^* \in (\ell^p)^*$, ορίζω $x = (y^*(e_n))_n$

Θα δω $x \in \ell^q$

Ορίζω $z_n = \begin{cases} \dfrac{|y'(e_n)|^q}{y'(e_n)}, & y'(e_n) \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{m} |y'(e_n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y'(e_n) = y'\Big(\sum_{n=1}^{m} z_n e_n\Big) \leq$$

$$\leq \|y'\| \, \Big\| \sum_{n=1}^{m} z_n e_n \Big\|_p = \|y'\| \Big(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p \Big)^{1/p} =$$

$$= \|y'\| \Big(\sum_{n=1}^{m} |y'(e_n)|^{p(q-1)} \Big)^{1/p} = \|y'\| \Big(\sum_{n=1}^{m} |y'(e_n)|^q \Big)^{1/p}$$

- Διαιρώ την λεσοχείρευν ανισότητα με

$$\Big(\sum_{n=1}^{m} |y'(e_n)|^q \Big)^{1/p} \text{ και έχω}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{m} |y'(e_n)|^q \Big)^{1-1/p} \leq \|y'\| \Rightarrow \Big(\sum_{n=1}^{m} \underset{x(n)}{\underset{\parallel}{|y'(e_n)|}}^q \Big)^{1/q} \leq \|y'\|$$

Αφήνω $m \longrightarrow +\infty$ και έχω

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q \Big)^{1/q} \leq \|y'\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x\|_q \leq \|y'\| < +\infty \quad ③$$

- Άρα $x \in \ell^q$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχω } T(x)(e_n) = x(n) = y'(e_n) \ \forall n \\ T(x),\ y' = \text{γραμ. + συνεχής} \\ \ell^q = \overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x) = y'$$

Άρα T = επί

→ T = ισομετρία

Λόγω της (2) αρκεί $\|x\|_q \leq \|T(x)\|$

Έστω $y^\Delta = T(x)$ από την (3) έπεται ότι

$\|x\|_q \leq \|T(x)\|$

$\square$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ:</u> Από τις προηγούμενες προτάσεις έχουμε

(i) $c_0^\Delta \cong \ell^1 \Rightarrow c_0^{\Delta\Delta} \cong (\ell^1)^\Delta = \ell^\infty$

(ii) $(\ell^p)^\Delta \cong \ell^q \Rightarrow (\ell^p)^{\Delta\Delta} \cong (\ell^q)^\Delta \cong \ell^p$

(iii) $(\ell^2)^\Delta \cong \ell^2$ διότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

- Στο προηγούμενο θεώρημα χρησιμοποιούμε
$$X \cong Y \Rightarrow X^\Delta \cong Y^\Delta$$
(Η απόδειξη, άσκηση)

<u>ΕΡΓΑΣΙΑ:</u>

(i) Έστω $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Δείξτε

$$T: L^p(X, \mu) \longrightarrow (L^q(X, \mu))^\Delta$$

$$T(f)(g) = \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x)$$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός

(ii) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερ. μέτρου. Δείξτε

$$T: L^\infty(X, \mu) \longrightarrow (L^1(X, \mu))^\Delta$$

$$T(f)(g) = \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x)$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Το Θεώρημα Hahn-Banach

Σχόλιο $X, Y =$ διαν. χώροι, $Y \subseteq X$, $\Lambda_0 : Y \to F$ γραμμική, τότε υπάρχει $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ ώστε $\Lambda|_Y = \Lambda_0$

Ερώτημα: Αν $\Lambda_0 =$ ΦΓΤ υπάρχει $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ ΦΓΤ που να επεκτείνει την Λ_0;

Η απάντηση από το Θεώρημα Hahn-Banach είναι ναι και μάλιστα μπορούμε να έχουμε $\|\Lambda\| = \|\Lambda_0\|$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $q : X \to \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν

(i) $q(x+y) \leq q(x) + q(y) \quad \forall x, y \in X$

(ii) $q(\lambda x) = \lambda q(x) \quad \forall x \in X,\ \lambda \geq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια απεικόνιση $p : X \to [0, +\infty)$ λέγεται ημινόρμα, αν

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| . p(x) \quad \forall x \in X,\ \lambda \in \mathbb{F}$

Παρατηρήσεις:

(i) Νόρμα $\Rightarrow$ Ημινόρμα $\Rightarrow$ Υπογραμμικό συναρτησοειδές

(ii) Αν $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ γραμμική η $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = |\Lambda(x)|$, $x \in X$ είναι ημινόρμα.

ΛΗΜΜΑ:

$X = \mathbb{R}$-διαν. χώρος, $q : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό

$Y =$ υπόχωρος του X: $\dim(X/Y) = 1$,

$\phi : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική ώστε

$\phi(y) \leq q(y) \quad \forall y \in Y$ Τότε υπάρχει $F : X \to \mathbb{R}$, γραμμική, $F|_Y = \phi$, $F(x) \leq q(x)$ $\forall x \in X$

<u>Απόδ</u>

Έστω ότι $X = Y \oplus [x_0] = \{y + t x_0 : y \in Y, t \in \mathbb{R}\}$

Αν $y_1, y_2 \in Y$, τότε

$$\phi(y_1) + \phi(y_2) = \phi(y_1 + y_2) \leq q(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(y_1) - q(-x_0 + y_1) \leq -\phi(y_2) + q(x_0 + y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$

Επιλέγω $\alpha_0 \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{y \in Y}\left[\phi(y) - q(-x_0 + y)\right] \leq \alpha_0 \leq \inf_{y \in Y}\left[-\phi(y) + q(x_0 + y)\right] \quad (1)$$

$\rightarrow$ Έχω $\alpha_0 \leq -\phi(\frac{y}{t}) + q(x_0 + \frac{y}{t})$ $\forall y \in Y, t > 0$ (2)

Ορίζω

$F: X \to \mathbb{R}$, $F(y + t x_0) = \phi(y) + t\alpha_0$

Η F = γραμμική και $F|_Y = \phi$

$$F(y + t x_0) = \phi(y) + t\alpha_0 \underset{(2)}{\leq} \phi(y) - \phi(y) + q(y + t x_0) \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

$\rightarrow$ έχω $\phi(y) - q(-x_0 + y) \leq \alpha_0$ $\forall y$

$$\phi\left(\frac{y}{-t}\right) - q\left(-x_0 - \frac{y}{t}\right) \leq \alpha_0 \quad \forall y, t < 0$$

Πολ/ζω με $-t$ και έχω

$$\phi(y) - q(t x_0 + y) \leq -t\alpha_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(y) + t\alpha_0 \leq q(y + t x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(y + t x_0) \leq q(y + t x_0) \quad \forall t < 0 \quad (4)$$

$\rightarrow$ Από (3), (4) έχω

$$F(y + t x_0) \leq q(y + t x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, y \in Y$$

Δηλ. $F(x) \leq q(x)$ $\forall x \in X_0$