**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω $X$ = δ.χ. και $A \subseteq X$ απορροφούν σύνολο.

Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε,

$$p_A(x) = \inf\{t>0 : x \in tA\}$$

Το $p_A(x)$ καλά ορισμένο διότι $A$ = απορροφούν.

Η απεικόνιση $p_A : X \to \mathbb{R}$ λέγεται συναρτησοειδές του Minkowski.

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** $X$ = δχ και $A \subseteq X$ κυρτό + απορροφούν.

(i) $p_A$ = υπογραμμικό

(ii) $[p_A<1] = \{x \in X : p_A(x)<1\} \subseteq A \subseteq [p_A \leq 1]$

(iii) Αν επιπλέον $A$ = ισορροπημένο τότε $p_A$ = ημινόρμα

**Απόδειξη:**

(i) Έστω $x, y \in X$ και $t_1>0$, $t_2>0$ ώστε $x \in t_1 A$, $y \in t_2 A$. Έχω

$$x+y \in t_1 A + t_2 A = (t_1+t_2)\left[\frac{t_1}{t_1+t_2}A + \frac{t_2}{t_1+t_2}A\right] \underset{\text{κυρτό}}{\overset{A}{\subseteq}} (t_1+t_2)A$$

Άρα $p_A(x+y) \leq t_1+t_2$

Συμπεραίνω παίρνοντας inf

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) \quad (1)$$

Έστω $s>0$ τότε

$$p_A(sx) = \inf\{t>0 : sx \in tA\} = \inf\{t>0 : x \in \tfrac{t}{s}A\} =$$

$$= s\inf\{\tfrac{t}{s}>0 : x \in \tfrac{t}{s}A\} = s\,p_A(x) \quad (2)$$

Απο (1), (2) $\Rightarrow$ $p_A$ = υπογραμμικό.

(ii) Αν $x \in A \Rightarrow x \in 1 \cdot A \Rightarrow p_A(x) \leq 1$

Αρα $A \subseteq [p_A \leq 1]$

Αν $p_A(x) < 1 \Rightarrow \exists\ 0 < t < 1: x \in tA \subseteq tA + (1-t)A \subseteq A$

Αρα $[p_A < 1] \subseteq A$

(iii) Εστω $A$ = κυρτο + απορροφημένο + ισορροπημένο

Εστω $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, έχω

$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0: \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0: x \in \frac{t}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{\lambda} A\}$

Επειδη $A$ = ισορροπημένο, έχουμε $\frac{|\lambda|}{\lambda} A = A$. Αρα

$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0: x \in \frac{t}{|\lambda|} A\} = |\lambda| \cdot \inf\{\frac{t}{|\lambda|}: x \in \frac{t}{|\lambda|} A\} =$

$= |\lambda| \inf\{t > 0: x \in tA\} = |\lambda|\, p_A(x)$

Αρα $p_A$ = ημινόρμα $\square$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> $X$ = Τ.Δ.χ, $U$ = ανοιχτο + κυρτό υποσύνολο του $X$, $0 \in U$

(i) $U$ = απορροφούν, αρα ορίζεται το $p_U$

(ii) $U = [p_U < 1]$

<u>Αποδειξη</u>

(i) Ορίζω $f: \mathbb{F} \times X \to X$, $f(\lambda, x) = \lambda x$

Εστω $x_0 \in X \Rightarrow f(0, x_0) = 0 \in U$

Αρα $\exists\ \delta > 0$, $V$ = περιοχή του $x_0$ ώστε

$f((-\delta,\delta)\times V) \subseteq U$

Άρα $\frac{\delta}{2}x_0 \in U \Rightarrow U=$ απορροφών

(α) Έχουμε δείξει ότι $[p_U<1] \subseteq U$

Αρκεί να δείξουμε ότι $U \subseteq [p_U<1]$ (1)

Έστω $x_0 \in U$, $f: \mathbb{F}\times X \to X$, $f(\lambda,x_0)=\lambda x_0$

Έχω $f(1,x_0)=x_0 \in U$. Άρα από την συνέχεια της $f$,

$\exists\, \delta>1: \delta x_0 \in U \Rightarrow x_0 \in \frac{1}{\delta}U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{\delta}<1$

Άρα $x_0 \in [p_U<1]$

Επομένως $U \subseteq [p_U<1] \overset{(1)}{\Rightarrow} U=[p_U<1]$ $\square$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> $\tau_1, \tau_2 =$ τοπολογίες πάνω $X$

(i) $\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \forall x\in X,\ \forall G \in \mathcal{N}_x^{\tau_1},\ \exists\, U \in \mathcal{N}_x^{\tau_2}: U \subseteq G$

(ii) $B_1^x, B_2^x$ βάσεις των $\tau_1, \tau_2$ στο $x$

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall G \in B_1^x,\ \exists\, U \in B_2^x: U \subseteq G$

(iii) Έστω $(X,\tau_1), (X,\tau_2)$ Τ.Δ.Χ και

$B_1, B_2$ βάσεις των $(X,\tau_1), (X,\tau_2)$ στο $0\in X$, τότε

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow \forall\, G \in B_1,\ \exists\, U \in B_2: U \subseteq G$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Έστω $X$ τ.δ.χ τότε

$X=$ ΤΚΧ $\Leftrightarrow$ Υπάρχει μια βάση περιοχών του $0$ που
αποτελείται από ανοικτά + κυρτά + ισορροπ. σύνολα

<u>Απόδειξη:</u>

$\boxed{\Rightarrow}$

Έστω $X$ τπκ και $P$ η οικογένεια των ημινορμών που ορίζει την τπκ τοπολογία του $X$, $\tau_P$

Μια βάση των περιοχών του $0$ ως προς $\tau_P$ είναι τα σύνολα της μορφής

$$V_{p_1,\dots,p_n,\epsilon} = \{x : p_i(x) < \epsilon,\ 1 \le i \le n\},\ p_1,\dots,p_n \in P,\ \epsilon > 0$$

Το σύνολο $V_i = [p_i < \epsilon]$ = ανοικτό + κυρτό + ισόρροπο

Άρα $V_{p_1,\dots,p_n,\epsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ = ανοικτό + κυρτό + ισόρροπο.

$\boxed{\Leftarrow}$

- Έστω $\tau$ = τοπολογία στο $X$ που έχει βάση για το $0 \in X$ μια οικογένεια $\mathcal{B}$ που αποτελείται από ανοικτά + κυρτά + ισόρροπα.
- Αν $U \in \mathcal{B} \Rightarrow p_U$ = ημινόρμα και $U = [p_U < 1]$
- Ορίζω $P = \{p_U : U \in \mathcal{B}\}$
- Η $P$ διαχωρίζει τον $X$ διότι αν
  $p_U(x) = 0\ \forall U \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in U\ \forall U \in \mathcal{B} \Rightarrow x = 0$
- Έστω $\tau_P$ η τπκ τοπολογία που επάγεται από την $P$

  Θα δ.ο. $\tau = \tau_P$
- Έστω $U = [p_U < 1] \in \tau_P\ \forall U \in \mathcal{B} \Rightarrow U \in \tau_P\ \forall U \in \mathcal{B} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \tau_P \Rightarrow \tau \subseteq \tau_P$ (1)
- Έστω $G \in \tau_P$ ανοικτή περιοχή του $0$, τότε

  $$V_{p_1,\dots,p_n,\epsilon} = \{x \in X : p_i(x) < \epsilon\} \subseteq G$$
- Έστω $p_i = p_{U_i}$ τότε

  $$[p_{U_i} < 1] = \{x : p_{U_i}(x) < 1\} = \{x : p_{U_i}(\epsilon x) < \epsilon\} =$$
  $$= \frac{1}{\epsilon}\{\epsilon x : p_{U_i}(\epsilon x) < \epsilon\} = \frac{1}{\epsilon} V_{p_{U_i},\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} V_{p_i,\epsilon} \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow V_{p_i,\epsilon} = \epsilon [p_{U_i} < 1] = \epsilon U_i \in \tau$$
- Άρα $V_{p_1,\dots,p_n,\epsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i,\epsilon} \in \tau \Rightarrow \tau_P \subseteq \tau \overset{(1)}{\Rightarrow} \tau_P = \tau$ □