ΘΕΩΡΗΜΑ (Mazur)

Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό.

Τότε $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{w}$

Απόδειξη:

- Επειδή η w είναι ασθενέστερη τοπολογία της $\|\cdot\|$-τοπολογίας έχω ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}$
- Έστω $x_0 \in \overline{A}^{w} \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|}$

Έχω
$$\begin{cases} \{x_0\} = \text{συμπαγές + κυρτό} \\ \overline{A}^{\|\cdot\|} = \text{κλειστό + κυρτό} \\ \{x_0\},\ \overline{A}^{\|\cdot\|} = \text{ξένα} \end{cases}$$

- Άρα από το Θεώρημα Hahn-Banach, $\exists\ \Lambda \in (X,\|\cdot\|)^* = X^*$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathrm{Re}\,\Lambda(x_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\,\Lambda(x),\ \forall x \in A \quad (1)$$

- Όμως $x_0 \in \overline{A}^{w}$, άρα υπάρχει δίκτυο $(x_j) \subseteq A$:

$$x_j \xrightarrow{w} x_0 \overset{\Lambda \in X^*}{\Longrightarrow} \Lambda(x_j) \to \Lambda(x_0) \Rightarrow \mathrm{Re}\,\Lambda(x_j) \to \mathrm{Re}\,\Lambda(x_0)$$

Από (1) όμως έχω

$$\mathrm{Re}\,\Lambda(x_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\,\Lambda(x_j)\ \forall j.$$

Άτοπο.

- Επομένως $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{w}$ □

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Alaoglu)

Έστω X χώρος με νόρμα, τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ είναι w^*-συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδειξη:</u>

- Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο:

$$\Pi = \prod_{x\in X} \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\| \}$$

Επειδή το σύνολο $\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\| \}$ είναι συμπαγές, από το Θεώρημα Tychonoff το Π είναι συμπαγής ως προς την καρτεσιανή τοπολογία.

- Ορίζω $g : B_{X^*} \to \Pi$, $g(x^*) = (x^*(x))_{x\in X}$

Η g καλά ορισμένη διότι $|x^*(x)| \leq \|x\|$ $\forall x \in X$

Η g είναι ομοιομορφισμός διότι

$x_j^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow x_j^*(x) \to x^*(x)$ $\forall x \in X \Leftrightarrow g(x_j^*) \to g(x^*)$ ως προς την καρτεσιανή τοπολογία

- Αρκεί να δω $g(B_{X^*})$ = συμπαγές.

Επειδή $g(B_{X^*}) \subseteq \Pi$ και Π = συμπαγής αρκεί να δω

$$g(B_{X^*}) = \text{κλειστό στο } \Pi$$

- Έστω $\Lambda \in \overline{g(B_{X^*})}$ τότε υπάρχει δίκτυο $(x_j^*) \subseteq B_{X^*}$,

$$g(x_j^*) \to \Lambda \Rightarrow (x_j^*(x))_{x\in X} \to \Lambda = (\Lambda_x)_{x\in X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_j^*(x) \to \Lambda_x \ \forall x \in X$$

- Επειδή $|x_j^*(x)| \leq \|x\|$ $\forall x\in X \Rightarrow |\Lambda_x| \leq \|x\|$ $\forall x \in X$.

- Έχω

$$\Lambda_{x+y} = \lim_j x_j^*(x+y) = \lim_j \left(x_j^*(x) + x_j^*(y) \right) =$$

$$= \lim_j x_j^*(x) + \lim_j x_j^*(y) = \Lambda_x + \Lambda_y \quad \forall x, y \in X$$

Ομοια $\Lambda_{\lambda x} = \lambda \Lambda_x \ \forall x \in X$.

· Επομένως η $x_0^*: X \to \mathbb{F}$, $x_0^*(x) = \Lambda_x$ είναι γραμμική.

Επίσης $|x_0^*(x)| = |\Lambda_x| \leq \|x\| \ \forall x \in X$.

Άρα $x_0^* =$ συνεχής και $x_0^* \in B_{X^*}$.

· Έχω $g(x_0^*) = (x_0^*(x))_{x \in \Lambda} = (\Lambda_x)_{x \in X} = \Lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \Lambda \in g(B_{X^*})$

· Άρα το $g(B_{X^*})$ είναι κλειστό $\square$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Goldstine:</u>

Έστω X χώρος με νόρμα και

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

$$B_{X^{**}} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\}$$

Τότε $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$

<u>Απόδειξη:</u>

· Έστω $J: X \to X^{**}$, $J(x)(x^*) = x^*(x)$

Θα δ.ο $\overline{J(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$

· Από το Θεώρημα Alaoglu το $(B_{X^{**}}, w^*) =$ συμπαγές.

Άρα $B_{X^{**}}$ κλειστό στην w^*-τοπολογία

· Αν $x \in B_X \Rightarrow \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|J(x)\| = \|x\| \leq 1$

Άρα $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}} \Rightarrow \overline{J(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}}$.

Έστω $\overline{J(B_X)}^{w^*} \subsetneq B_{X^{**}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, x_0^{**} \in B_{X^{**}} \setminus \overline{J(B_X)}^{w^*}$$

• Επειδή $\{x_0^{**}\}$ = συμπαγές + κυρτό

$\overline{J(B_X)}^{w^*}$ = κλειστό + κυρτό

και τα σύνολα είναι ξένα, από το Θεώρημα Hahn-Banach

$\exists\, \Lambda \in (X^{**}, w^*)^* = X^*$ ώστε

$$Re(x^{**}(\Lambda)) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re(x_0^{**}(\Lambda)) \quad \forall x^{**} \in J(B_X) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow Re(J(x)(\Lambda)) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re(x_0^{**}(\Lambda)) \quad \forall x \in B_X \\ \text{Από την άλλη μεριά} \quad Re(x_0^{**}(\Lambda)) \le |x_0^{**}(\Lambda)| \le \|\Lambda\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re(\Lambda(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \|\Lambda\| \quad \forall x \in B_X. \ (I)$$

• Για κάθε $x : \|x\| \le 1$,

$$|\Lambda(x)| = e^{i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{i\theta}x) < \gamma_1$$

Άρα από την (I) $\Rightarrow$ $|\Lambda(x)| < \gamma_1 < \gamma_2 < \|\Lambda\| \quad \forall x \in B_X$

αυτό είναι άτοπο καθώς

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda(x)| : x \in B_X\}$$

• Άρα $\overline{J(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$

□

Θεώρημα: Αν X = διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, τότε ο (B_{X^*}, w^*) = μετρικοποιήσιμος

Απόδειξη:

- Έστω $D=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X
- Ορίζουμε $\Pi = \prod_{n=1}^{\infty}\{z\in\mathbb{F} : |z|\le \|x_n\|\}$

παρατηρώ $\alpha = (\alpha(n))_n \in \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(n)\in\mathbb{F} \\ |\alpha(n)|\le\|x_n\| \end{cases}$

- Ο Π είναι μετρικοποιήσιμος με μετρική

$$d(\alpha,b)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{|\alpha(n)-b(n)|}{1+|\alpha(n)-b(n)|}$$

- Ορίζω $g:(B_{X^*},w^*)\longrightarrow\Pi$, $g(x^*)=(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

→ Η g καλά ορισμένη διότι $|x^*(x_n)|\le\|x_n\|$ $\forall n$

→ Η g = 1-1 διότι

$$g(x^*)=g(y^*) \Leftrightarrow x^*(x_n)=y^*(x_n)\ \forall n \overset{\overline{D}=X}{\Longrightarrow} x^*(x)=y^*(x)\ \forall x\in X \Rightarrow x^*=y^*$$

→ Η g = συνεχής διότι:

$$x_j^* \xrightarrow{w^*} x^* \Rightarrow x_j^*(x_n)\longrightarrow x^*(x_n)\ \forall n \Rightarrow (x_j^*(x_n))_n \longrightarrow (x^*(x_n))_n$$ στην τοπολογία του Π

→ Η g είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της διότι (B_{X^*},w^*) = συμπαγής

Άρα $g(B_{X^*})$ μετρικοποιήσιμη ως υποσ. του $\Pi \Rightarrow B_{X^*}$ = μετρικοποιήσιμ.

Πόρισμα: X = χώρος με νόρμα, X^* = διαχωρ. $\Rightarrow (B_X, w)$ = μετρικοποιήσ.

Απόδειξη:

X^* = διαχωρ. $\Rightarrow (B_{X^{**}}, w^*)$ = μετρικοπ. $\Rightarrow J(B_X)$ μετρικοποιήσιμο ως υποσύνολο του $B_{X^{**}}$.

$J:(B_X,w)\longrightarrow(J(X),w^*)$ ομοιομορφ. $\Rightarrow (B_X,w)$ = μετρικοποιήσιμο

Χώροι Hilbert

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω E = διαν. χώρος, $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{F}$
Η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$

(ii) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in E$

(iv) $\langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle \quad \forall x_1, x_2, y \in E$

Παρατήρηση:

$$\langle x, \lambda y_1 + y_2\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$$

Παραδείγματα:

(i) Στον $\mathbb{F}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$

(ii) Στον ℓ^2, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$

Το εσωτερικό γινόμενο εδώ καλά ορισμένο διότι $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)\overline{y(k)}| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

(iii) Στον $C[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

Έστω E = χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x, y \in E$ τότε

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \cdot \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Απόδειξη:

- Αν $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$ και η ανισότητα ισχύει
- Αν $\langle x,x\rangle \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχω

$$0 \leq \langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle = \lambda^2\langle x,x\rangle + \lambda(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) + \langle y,y\rangle =$$

$$= \lambda^2\langle x,x\rangle + \lambda(2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle) + \langle y,y\rangle$$

Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, έχω

$$\Delta = \left(2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\right)^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \quad \forall x,y \in X \quad (1)$$

- Εάν $x,y \in X$ τότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$: $|\langle x,y\rangle| = e^{i\theta}\langle x,y\rangle \Rightarrow$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} |\langle x,y\rangle| = \langle e^{i\theta}x, y\rangle \leq \langle e^{i\theta}x, e^{i\theta}x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(E, \langle\,,\rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο ορίζουμε $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ $\forall x \in E$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η $\|\ \|: E \to \mathbb{R}^+$ είναι νόρμα

Απόδειξη:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \leq$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Άρα $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Οι άλλες ιδιότητες της νόρμας αποδεικνύονται εύκολα $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $(E, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτ. γινόμενο, η απεικόνιση $E \times E \to \mathbb{F}$, $(x,y) \to \langle x,y \rangle$ είναι συνεχής ως προς την νόρμα $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$.

Απόδειξη:

· Έστω $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$. Τότε

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x,y \rangle| = |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\| \quad (1)$$

· Η ακολουθία $(\|y_n\|)$ είναι φραγμένη διότι $\|y_n\| \to \|y\|$

Άρα $\exists\, M > 0 : \|y_n\| \leq M \;\; \forall n \geq n_0$

· Επομένως από (1) έπεται ότι

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x,y \rangle| \leq M \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \quad \forall n \geq n_0$$

Αφήνω $n \to +\infty \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x,y \rangle$ □

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(E, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτ. γινόμενο και $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ γράφουμε $A \perp B$ αν

$$\langle x,y \rangle = 0 \quad \forall x \in A, \; y \in B$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Αν $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Απόδειξη

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle}_{=0} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $(E, <,>)$ μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική αν $e_i \perp e_j$ για $i \neq j$ και $\|e_i\| = 1$ $\forall i$

Παρατήρηση:
Κάθε ορθοκανονική οικογένεια είναι γραμ. ανεξάρτητη

Απόδειξη:
Έστω $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq E$ με $e_i \perp e_j$, $i \neq j$

Υποθέτω ότι $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Τότε

$$< \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, e_i > = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_i < e_i, e_i > = 0 \quad \forall i \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \quad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Διαδικασία Gram-Schmidt)
Έστω $(E, <,>)$ και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία. Τότε υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε $[x_1, \dots, x_n] = [e_1, \dots, e_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη:

Θέτω
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - \frac{<x_2, y_1>}{\|y_1\|^2} x_1$$
$$\vdots$$
$$y_k = x_k - \frac{<x_k, y_{k-1}>}{\|y_{k-1}\|^2} x_{k-1} - \dots - \frac{<x_k, y_1>}{\|y_1\|^2} x_1$$
$$\vdots$$

Θέτω $e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ $\forall k$

(Απόδειξη όπως στην Γραμμική Άλγεβρα) $\square$

Παραδείγματα:

(i) $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i-\text{θέση}}{1}, 0, \dots) \in \ell^2 \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ = ορθοκανονική ακολουθία στον ℓ^2

(ii) Στον $C[-\pi,\pi]$ με εσωτερικό γινόμενο,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

η ακολουθία $e_k(t) = e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, $t \in [-\pi, \pi]$

είναι ορθοκανονική. □

Παρατήρηση: (Κανόνας παρ/μου)

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ και $x, y \in E$ τότε

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Απόδειξη:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle\right) + \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle\right) =$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

□

ΛΗΜΜΑ: Έστω $(E, \langle , \rangle)$ και $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq E$

ορθοκανονικό σύνολο, $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}^+$,

$$f((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|$$

(i) Η f έχει ολικό ελάχιστο για $a = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$

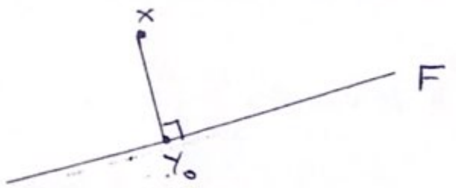
(Με άλλα λόγια το $y_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ είναι το

πλησιέστερο στο x στοιχείο του $F = [e_1, \dots, e_n]$)

(ii) $x - y_0 \perp F$

(iii) Αν $y \in F$, $x - y \perp F \Rightarrow y = y_0$

Απόδειξη:



(i) Έχω $\langle x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k, e_i\rangle = 0 \quad \forall i=1,2,\dots,n$

Άρα: $x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k \perp F$. (1)

Έχω $\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\|^2 = \|\underbrace{x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k}_{\in F^\perp} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\langle x,e_k\rangle-\lambda_k)e_k}_{\in F}\|^2 =$

$\overset{\text{Πυθαγ.}}{\underset{\text{θεώρημα}}{=}} \|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle-\lambda_k|^2 \geq \|x-y_0\|^2$ (2)

Επειδή κάθε $y\in F$ γράφεται $y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$ έχω από (2)

$$\|x-y\| \geq \|x-y_0\| \quad \forall y\in F$$

Άρα $\|x-y_0\| = d(x,F)$

(ii) Από (1) έπεται $x-y_0 \perp F$

(iii) Έστω $y\in F$ με $x-y\perp F \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x-y, e_k\rangle = 0 \ \forall k \Rightarrow \langle x,e_k\rangle = \langle y,e_k\rangle \ \forall k \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0 = y$.

Παρατήρηση: Έστω $(E, <,>)$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία. Τότε $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2$$

Απόδειξη:

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \|\underbrace{x - \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k}_{\in F^{\perp}}\|^2 + \|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k}_{\in F}\|^2 =$$

$$\overset{\Pi.\Theta}{=} \|x - \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k + \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k\|^2 = \|x\|^2 \quad \square$$

Πρόταση: (Ανισότητα Bessel)
Έστω $(E, <,>)$ και $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία. Τότε

(i) $\sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in [e_1, \dots, e_n]$

Απόδειξη:

(i) Βγαίνει από την προηγούμενη παρατήρηση

(ii) Αν $\sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2 = \|x\|^2 \overset{\text{Παρατ.}}{\Longleftrightarrow} \|x - \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k\| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \sum_{k=1}^{n} <x,e_k> e_k \Leftrightarrow x \in [e_1, \dots, e_n]$

Πόρισμα: Έστω $(E, <,>)$ και $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |<x,e_k>|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in E$

Απόδειξη

Από ανισότητα Bessel $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |<x,e_k>|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n$

Αφήνω $n \to +\infty$ και έχω $\sum_{k=1}^{\infty} |<x,e_k>|^2 \leq \|x\|^2 \quad \square$