<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω X = γραμμικός χώρος, $\mathcal{P}$ = οικογένεια ημινορμών στο X που έχουν την ιδιότητα

$$p(x)=0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x=0$$

① Αν $x \in X$, $\varepsilon>0$, $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ ορίζουμε

$$V_{x,p_1,\dots,p_n,\varepsilon}=\{y \in X : p_i(x-y)<\varepsilon \ \forall i=1,2,\dots,n\}$$

② Ορίζουμε τοπολογία στο X ως εξής

$G \subseteq X$ ανοικτό αν $\forall x \in G$, $\exists V_{x,p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$ ώστε

$V_{p,x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \subseteq G$. Συμβολίζω την τοπολογία με $\tau_{\mathcal{P}}$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι $\tau_{\mathcal{P}}$ = [illegible] τοπολογία στον X.

• Παρακάτω θα δ.ο. $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ = τ.δ.χ.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν (x_λ) δίκτυο στον $(X,\tau_{\mathcal{P}})$ τότε

$$x_\lambda \to x \iff p(x_\lambda - x) \to 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

<u>Απόδειξη</u>:

$\boxed{\Rightarrow}$

Έστω $x_\lambda \to x$ και $p \in \mathcal{P}$, $\varepsilon>0$

Θεωρώ το βασικό σύνολο $V_{x,p,\varepsilon}=\{y : p(x-y)<\varepsilon\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } x_\lambda \to x \\ V_{p,x,\varepsilon} \in \mathcal{U}_x \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lambda_0 : x_\lambda \in V_{p,x,\varepsilon} \ \forall \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x_\lambda - x)<\varepsilon \ \forall \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow p(x_\lambda - x) \to 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$

- Έστω $p(x_\delta - x) \to 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$

Θα δ.ο. $x_\delta \to x$ ως προς $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$.

Αρκεί να δ.ο. $\forall p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \ \epsilon > 0,$

$\exists \delta_0 : \ x_\delta \in V_{x, p_1, \dots, p_n, \epsilon} \quad \forall \delta \geq \delta_0$

- Αφού $p_i(x_\delta - x) \to 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, $\exists \delta_i$

$p_i(x_\delta - x) < \epsilon \quad \forall \delta \geq \delta_i$

Επιλέγω $\delta_0 \geq \delta_i$, $1 \leq i \leq n$ και έχω

$p_i(x_\delta - x) < \epsilon \quad \forall \delta \geq \delta_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_\delta \in V_{x, p_1, \dots, p_n, \epsilon} \quad \forall \delta \geq \delta_0$ □

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Έστω X = γραμ. χώρος, $\mathcal{P}$ = οικογένεια ημινορμών στον X, ώστε αν $p(x) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 0$. Τότε ο X με την τοπολογία που επάγεται από την $\mathcal{P}$ είναι τ.δ.χ.

<u>Απόδ</u>

<u>$+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ είναι συνεχής</u>

Έστω $(x_\delta, y_\delta) \to (x, y)$ ως προς την τοπολογία γινόμενο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_\delta \to x \\ y_\delta \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p(x_\delta - x) \to 0 \\ p(y_\delta - y) \to 0 \end{matrix} \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

Έτσι $p((x_\delta + y_\delta) - (x + y)) \leq p(x_\delta - x) + p(y_\delta - y) \to 0$

Αρα $x_\nu + y_\nu \to x+y$ ως προς την τ_P

• : <u>$\mathbb{F}\times X \to X$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχής</u>

Έστω $(\lambda_\nu, x_\nu) \to (\lambda, x) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_\nu \to \lambda & \Rightarrow |\lambda_\nu - \lambda| \to 0 \\ x_\nu \to x & p(x_\nu - x) \to 0 \quad \forall p \in P \end{cases}$

Θα δ.ο. $\lambda_\nu x_\nu \to \lambda x \Leftrightarrow p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x) \to 0$

Έχω

$$p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x) \le p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x_\nu) + p(\lambda x_\nu - \lambda x) =$$
$$= |\lambda_\nu - \lambda|\, p(x_\nu) + |\lambda|\, p(x_\nu - x) \quad (1)$$

$p(x_\nu) \le p(x_\nu - x) + p(x)$

Αφού $p(x_\nu - x) \to 0$, $\exists \nu_1 : p(x_\nu - x) < 1 \ \forall \nu \ge \nu_0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x_\nu) \le 1 + p(x) \quad \forall \nu \ge \nu_1$

Αρα από (1)

$$p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x) \le (1 + p(x))\,|\lambda_\nu - \lambda| + |\lambda|\, p(x_\nu - x) \quad \forall \nu \ge \nu_1 \quad (2)$$

Επιλέγω $\nu_2 : |\lambda_\nu - \lambda| < \dfrac{\epsilon}{2(1+p(x))} \quad \forall \nu \ge \nu_2$ και

$\nu_3 : p(x_\nu - x) < \dfrac{\epsilon}{2|\lambda|}$

Έστω $\nu_0 : \nu_0 \ge \nu_1, \nu_0 \ge \nu_2, \nu_0 \ge \nu_3$

Από την (2) έχω ότι:

$$p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x) \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall \nu \ge \nu_0$$

Αρα $p(\lambda_\nu x_\nu - \lambda x) \to 0$

• $\{0\}$ = κλειστό

• Αρκεί να δ.ο. $X \setminus \{0\}$ = ανοικτό.

• Αν $x \in X \setminus \{0\}$, τότε $\exists\, p \in \mathcal{P}: p(x) \neq 0$

Έστω $\epsilon = \frac{p(x)}{2}$ και

$$A = V_{p,x,\epsilon} = \{y : p(x-y) < \epsilon\} = \text{ανοικτό}.$$

• Έχω ότι $0 \notin A$ διότι αν $0 \in A \Rightarrow p(x) < \epsilon \Rightarrow p(x) < \frac{p(x)}{2}$ Άτοπο

Άρα $A \subseteq X \setminus \{0\}$

• Επομένως $X \setminus \{0\}$ = ανοικτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τοπικά κυρτός χώρος (Τ.Κ.Χ) είναι ένας τ.δ.χ του οποίου η τοπολογία καθορίζεται από μία οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ που έχουν την ιδιότητα $p(x) = 0\ \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 0$

Παράδειγμα:

X = μετρικός χώρος,

$C(X) = \{f : X \to \mathbb{F},\ f = \text{συνεχής}\}$

Αν $K \subseteq X$ συμπαγές, ορίζουμε

$$p_K : C(X) \to \mathbb{R}, \quad p_K(f) = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$$

και $\mathcal{P} = \{p_K : K \subseteq X \text{ συμπαγές}\}$

$\to$ p_K = ημινόρμα $\forall K \subseteq X$ συμπαγές

$\to$ $p_K(f) = 0\ \forall K \subseteq X$ συμπαγές $\Rightarrow f = 0$

- Επομένως η $\mathcal{P}$ ορίζει μια τ.δ.κ τοπολογία στον $C(X)$. Ως προς την τοπολογία αυτή ένα δίκτυο $(f_\lambda) \subseteq C(X)$ συγκλίνει σε $f \in C(X)$ αν

$$\sup\{|f_\lambda(x) - f(x)| : x \in K\} \to 0$$

$\forall\, K \subseteq X$ συμπαγές.

Παράδειγμα:

Έστω X = χώρος με νόρμα. Αν $x^* \in X^*$, ορίζω

$$p_{x^*} : X \to \mathbb{R}, \quad p_{x^*}(x) = |x^*(x)| \Rightarrow p_{x^*} = \text{ημινόρμα}$$

Έστω $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$

Αν $x \in X$: $p_{x^*}(x) = 0 \ \forall x^* \Rightarrow x^*(x) = 0 \ \forall x^* \Rightarrow x = 0$

Άρα η $\mathcal{P}$ εφοδιάζει τον X με μία τοπολογία ως προς την οποία είναι τδκ χώρος.

Η τοπολογία αυτή ονομάζεται ασθενής τοπολογία και συμβολίζεται με τ_w.

Αν (x_i) δίκτυο στον X και $x \in X$, τότε

$$x_i \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow p_{x^*}(x_i - x) \to 0 \ \forall x^* \in X^* \Leftrightarrow x^*(x_i - x) \to 0$$

$$\forall x^* \in X^* \Leftrightarrow x^*(x_i) \to x^*(x).$$

Παρατήρηση:

Η ασθενής τοπολογία είναι ασθενέστερη της νορμ τοπολογίας $\tau_{\|\cdot\|}$.

$$x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow x_i \xrightarrow{w} x$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα

Αποδ.

(i) Αν $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x \underset{\text{συνεχής}}{\overset{x^*}{\Longrightarrow}} x^*(x_n) \to x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$

(ii) Έστω $X = \ell^2$, $T: \ell^2 \to (\ell^2)^*$, $T(x)(y) = \sum_n x(n) y(n)$

Ο T = ισομετρικός ισομορφισμός.

Άρα $(\ell^2)^* = \{T(x) : x \in \ell^2\}$ (1)

Θεωρώ την ακολουθία $(e_n) \subseteq \ell^2$

Έχω $T(x)(e_n) = x(n) \to 0 \quad \forall x \in \ell^2 \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} x^*(e_n) \to 0 \quad \forall x \in \ell^2 \Rightarrow e_n \xrightarrow{w} 0$

Όμως η (e_n) δεν συγκλίνει ποτέ στο 0

καθόσον $\|e_n\|_2 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ □

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω X = χώρος με νόρμα με δυϊκό τον X^*.

Αν $x \in X$, ορίζουμε

$p_x : X^* \to \mathbb{R}$, $p_x(x^*) = |x^*(x)| \Rightarrow p_x$ = ημινόρμα

Έστω $P = \{p_x : x \in X\}$

Αν $p_x(x^*) = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow x^*(x) = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow x^* = 0$

Άρα η P εφοδιάζει τον X^* με μια τοπολογία

ως προς την οποία είναι τλκ χώρος

Η τοπολογία αυτή λέγεται ασθενής-* τοπολογία

και συμβολίζεται με τ_{w^*}

Αν (x_i^*) δίκτυο στον X^*, τότε

$x_i^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow p_x(x_i^* - x^*) \to 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x_i^* - x^*)(x)| \to 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow x_i^*(x) \to x^*(x) \quad \forall x \in X$

Παρατήρηση:

Στον X^* έχω ορίσει 3 τοπολογίες:

→ Η νορμ τοπολογία

$$x_j^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* \iff \|x_j^* - x^*\| \to 0 \iff \sup_{\|x\|=1} |x_j^*(x) - x^*(x)| \to 0$$

→ Η ασθενής τοπολογία που επάγεται από τον X^{**}

$$x_j^* \xrightarrow{w} x^* \iff x^{**}(x_j^*) \to x^{**}(x^*) \quad \forall x^{**} \in X^{**}$$

→ Η ασθενής-* τοπολογία που επάγεται από τον X

$$x_j^* \xrightarrow{w^*} x^* \iff x_j^*(x) \to x^*(x) \quad \forall x \in X$$

Ισχύει ότι $\tau_{w^*} \subseteq \tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$ δηλαδή ισοδύναμα

$$x_j^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* \Rightarrow x_j^* \xrightarrow{w} x^* \Rightarrow x_j^* \xrightarrow{w^*} x^*$$

Απόδειξη:

(i) Αν $x_j^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* \Rightarrow \|x_j^* - x^*\| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{**}(x_j^* - x^*) \to 0 \quad \forall x^{**} \in X^{**} \Rightarrow x_j^* \xrightarrow{w} 0$

(ii) Έστω $x_j^* \xrightarrow{w} x^* \Rightarrow x^{**}(x_\lambda^* - x^*) \to \; \forall x^{**} \in X^{**}$ (1)

Θεωρώ $J: X \to X^{**}$ την κανονική εμφύτευση

Από (1) έχω ότι $J(x)(x_j^* - x^*) \to 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow x_j^*(x) - x^*(x) \to 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow x_j^*(x) \to x^*(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow x_j^* \xrightarrow{w^*} 0$

<u>Ασκηση</u> Δείξτε ότι η w^*-τοπολογία μπορεί να είναι γνήσια μικρότερη της w-τοπολογίας.

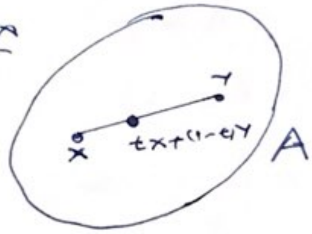
Δηλαδή μπορεί $x_j^* \xrightarrow{w^*} x^*$ και να μην ισχύει $x_j^* \xrightarrow{w} x^*$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subseteq X$.

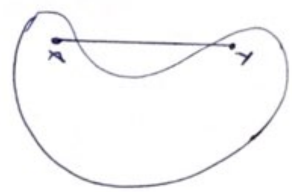
(i) Το A λέγεται κυρτό αν $\forall x, y \in A$,

$\forall t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$

<u>π.χ</u>



$=$ κυρτό



$B =$ όχι κυρτό

(ii) Η κυρτή θήκη του A είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A

$co(A) = \cap \{C : C = \text{κυρτό},\ A \subseteq C\}$

<u>π.χ</u> $A = \{x, y\}$

$co(A) =$ 

<u>π.χ</u> $A =$ επιφάνεια της μπάλας,

$co(A) =$ η κλειστή μπάλα που ορίζεται από το A

(iii) Αν $X =$ τδχ, η κλειστή κυρτή θήκη του A είναι το μικρότερο κυρτό και κλειστό σύνολο που περιέχει το A:

$$\overline{co}(A) = \cap \{C : C = \text{κυρτό},\ C = \text{κλειστό},\ A \subseteq C\}$$

<u>π.χ</u> $A =$ ανοικτή μπάλα $\Rightarrow \overline{co}(A) =$ κλειστή μπάλα

ΘΕΩΡΗΜΑ: $X = \text{ΤΔΧ}$, $A \subseteq X$

(i) $A =$ κυρτό $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\mathring{A} =$ κυρτό

(ii) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$

Απόδ

(i) Έστω $0 < t < 1$

$$(1-t)\overline{A} + t\overline{A} \subseteq \overline{(1-t)A} + \overline{tA} \subseteq \overline{(1-t)A + tA} \subseteq \overline{A}$$

Άρα $\overline{A} =$ κυρτό

$$\left.\begin{array}{l}(1-t)\mathring{A} + t\mathring{A} \subseteq (1-t)A + tA \subseteq A \\ (1-t)\mathring{A} + t\mathring{A} = \text{ανοικτό}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-t)\mathring{A} + t\mathring{A} \subseteq \mathring{A}$$

Άρα $\mathring{A} =$ κυρτό

(ii)

$$\left.\begin{array}{l}co(A) \subseteq \overline{co}(A) \\ \overline{co}(A) = \text{κλειστό ως τομή κλειστών}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{co(A)} \subseteq \overline{co}(A) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{co(A)} = \text{κλειστό} + \text{κυρτό από το (i)} \\ A \subseteq co(A)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{co}(A) \subseteq \overline{co(A)} \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$ □

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> X = γραμμικός χώρος, $A \subseteq X$

(i) A = απορροφούν αν $\forall x \in X$, $\exists\, \varepsilon > 0 : \varepsilon x \in A$

→ Πχ το $A = [-1, +\infty)$ είναι απορροφούν στο $\mathbb{R}$

→ Παρατήρηση ότι A = απορροφούν $\Rightarrow 0 \in A$

(ii) A = ισορροπημένο αν $\forall x \in A$, $\lambda \in F$, $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in A$

→ Πχ οι ανοιχτές και κλειστές μπάλες με κέντρο το 0

→ Παρατήρηση ότι A = ισορροπημένο $\Rightarrow 0 \in A$

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω X = τΔχ

(i) A = ισορροπημένο $\Rightarrow \overline{A}$ = ισορροπημένο

<u>Απόδ</u>

Έστω $x \in \overline{A}$, $|\lambda| \leq 1$, θα δ.ο. $\lambda x \in \overline{A}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Έστω } (x_n) \subseteq A : x_n \to x \Rightarrow \lambda x_n \to \lambda x \\ &x_n \in A \Rightarrow \lambda x_n \in A \quad \forall n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda x \in \overline{A} \quad \square$$

(ii) A = ισορροπημένο, $0 \in \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A}$ = ισορροπημένο

<u>Απόδ</u>

Έστω $x \in \mathring{A}$, $|\lambda| \leq 1$ θα δ.ο. $\lambda x \in \mathring{A}$

Για $\lambda = 0$ ισχύει. Έστω $0 < |\lambda| \leq 1$

$$\left.\left.\begin{aligned} &\lambda \mathring{A} \subseteq \lambda A \subseteq A \\ &\lambda \mathring{A} = \text{ανοιχτό} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda \mathring{A} \subseteq \mathring{A} \\ &x \in \mathring{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda x \in \mathring{A} \quad \square$$

(iii) Για καθε περιοχη V του $0 \in X$, $\exists$ U = ισορροπημένη περιοχη του 0 ωστε $U \subseteq V$

Αποδ

Εστω $f: \mathbb{F} \times X \to X$, $f(\lambda, x) = \lambda x$

Απο την συνέχεια της f στο $(0,0)$ $\exists$ W = περιοχη του 0 και $\delta > 0$: $f((-\delta, \delta) \times W) \subseteq V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{|\lambda| < \delta} \lambda W \subseteq V$$

Θετω $U = \bigcup_{|\lambda| < \delta} \lambda W \Rightarrow U \subseteq V$

Αν $|\mu| \leq 1$, $x \in U \Rightarrow x = \lambda w$, $|\lambda| < \delta$, $w \in W$

Επειτα $\left. \begin{array}{l} \mu x = \lambda \mu w \\ |\lambda \mu| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \mu x \in U$

Αρα U = ισορροπημένο

(iv) Εστω V = κυρτή περιοχή του $0 \in X$.

Τοτε $\exists$ κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του 0, U ωστε $U \subseteq V$

Αποδ

Απο το προηγούμενο, $\exists$ U_0 ισορροπημένη περιοχη του 0 με $U_0 \subseteq V$

Εστω $U = (co(U_0))^{\circ} \Rightarrow U$ = κυρτο και ανοικτό.

Επισης U_0 = ισορροπημενο $\Rightarrow co(U_0)$ = ισορροπημενο $\Rightarrow$

$\Rightarrow co(U_0)^{\circ}$ = ισορροπημενο $\Rightarrow$

$\Rightarrow U$ = ισορροπημένο $\square$