ΛΗΜΜΑ: H = Hilbert, $T \in B(H)$ φυσιολογικός τελεστής

(i) $T(x) = \lambda x \iff T^*(x) = \bar{\lambda} x$

(ii) Αν $T = T^*$ τότε οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές

(iii) Ιδιόχωροι που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετοι

(iv) Αν M = ιδιόχωρος τότε $T(M) \subseteq M$, $T^*(M) \subseteq M$

Απόδειξη:

(i) T = φυσιολογικός $\Rightarrow T - \lambda I$ = φυσιολογικός, άρα

$$\|(T-\lambda I)x\| = \|(T-\lambda I)^*(x)\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)(x)\| = 0$$

Άρα $T(x) = \lambda x \iff T^*(x) = \bar{\lambda} x$

(ii) Έστω $T = T^*$ και $\lambda \in \sigma_p(T)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } T(x) = \lambda x \text{ με } x \neq 0 \\ \text{Από (i) } T^*(x) = \bar{\lambda} x. \text{ Όμως } T = T^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x = \bar{\lambda} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})(x) = 0 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(iii) Έστω $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$

Άρα υπάρχουν $x \neq 0, y \neq 0$: $T(x) = \lambda x$, $T(y) = \mu y$

Έστω:

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \mu \langle x, y\rangle$$

Άρα $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

Άρα $M_\lambda \perp M_\mu$

(iv) Γνωστή παρατήρηση ότι $T(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$.

Αρκεί να δ.ο. $T^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

Έστω $x \in M_\lambda \Rightarrow T(x) = \lambda x \Rightarrow T^*(x) = \bar{\lambda} x$, $x \in M_\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow T^*(x) \in M_\lambda$. Άρα $T^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> Έστω $T \in B(H)$, M = κλειστός υπόχωρος του H

(i) M = T-αναλλοίωτος $\Leftrightarrow$ $M^{\perp}$ = T^{*}-αναλλοίωτος

(ii) Έστω M = T-αναλλοίωτος, και $B = T|_M$

Τότε $B^{*} = T^{*}|_M \Leftrightarrow T^{*}(M) \subseteq M$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) $(\Rightarrow)$

Έστω $T(M) \subseteq M$ και $y \in M^{\perp}$. Τότε $\forall x \in M$

$$\left.\begin{array}{l} \langle x, T^{*}(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle \\ T(x) \in M,\ y \in M^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x, T^{*}(y)\rangle = 0 \Rightarrow T^{*}(y) \in M^{\perp}$$

Άρα $T^{*}(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$

$(\Leftarrow)$

Έστω $M^{\perp}$ = T^{*}-αναλλοίωτος από το $(\Rightarrow)$ έχω

$$\left.\begin{array}{l} \text{ότι } (M^{\perp})^{\perp} = T\text{-αναλλοίωτος} \\ (M^{\perp})^{\perp} = M \end{array}\right\} \Rightarrow M = T\text{-αναλλοίωτος}$$

(ii) $(\Leftarrow)$

Έστω $T(M) \subseteq M$, $T^{*}(M) \subseteq M$ και $B = T|_M : M \to M$

Έστω $x \in M$. Θα δ.ο. $T^{*}(x) = B^{*}(x)$

Για κάθε $y \in M$, έχουμε $B(y) = T(y)$ Άρα

$$\langle B^{*}(x), y\rangle = \langle x, B(y)\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle T^{*}(x), y\rangle$$

Άρα $\langle (B^{*} - T^{*})(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (B^{*} - T^{*})(x) \perp M \\ (B^{*} - T^{*})(x) \in M \end{array}\right\} \Rightarrow (B^{*} - T^{*})(x) = 0 \Rightarrow B^{*}(x) = T^{*}(x)$$

(118)

$(\Rightarrow)$

Έστω $B = T|_M$: $M \to M$ και $B^* = T^*|_M$

Τότε $T^*(M) \subseteq M$

Παρατήρηση: Αν $T \in B(H)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$. Τότε $|\lambda| \le \|T\|$.

Απόδειξη:

Έστω $x \neq 0$ και $T(x) = \lambda x$. Τότε

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|T(x)\| \le \|T\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \le \|T\|$$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $T \in B(H)$ συμπαγής, αυτοσυζυγής ($T = T^*$, τελεστής),

τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(T)$ ώστε $|\lambda| = \|T\|$

Απόδειξη

- Αρκεί να εξετάσω την περίπτωση $T \neq 0$

Έχουμε δ.ο. $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| \le 1\}$

- Άρα $\exists (x_n) \subseteq H$: $\|x_n\| = 1$ και

$$|\langle T(x_n), x_n\rangle| \longrightarrow \|T\|$$

- Τότε

$$\langle T(x_n), x_n\rangle = \langle x_n, T^*(x_n)\rangle = \langle x_n, T(x_n)\rangle = \overline{\langle T(x_n), x_n\rangle}$$

- Άρα η ακολουθία $(\langle T(x_n), x_n\rangle)$ είναι πραγματική

- Επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\langle T(y_n), y_n\rangle)$ ώστε

$$\langle T(y_n), y_n\rangle \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Προφανώς $|\lambda| = \|T\|$

- Αρκεί να δ.ο. $\lambda =$ ιδιοτιμή της T.

• Μένει να δω $\lambda \in \sigma_p(T)$. Έχω

$$0 \leq \|Ty_n - \lambda y_n\|^2 = \|Ty_n\|^2 - 2\lambda \langle Ty_n, y_n\rangle + \lambda^2 \leq$$
$$\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Ty_n, y_n\rangle + \lambda^2 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda\lambda + \lambda^2 = 0$$

• Άρα $\lim_n (T - \lambda I) y_n = 0$

• Έχω $(y_n) \subset B_H$ και T = συμπαγής. Άρα η (y_n) έχει υπακολουθία (z_n): $Tz_n \to z$

Αν δω $T(z) = \lambda z$ και $z \neq 0$, θα έχω τελειώσει

• Έχω:

$$\lim_n (T(z_n) - \lambda z_n) = \lim_n (T - \lambda I)(y_n) = 0$$

Άρα $\lim_n \lambda z_n = z \Rightarrow \lim_n \lambda T(z_n) = T(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow T(z) = \lambda z$$

• Επίσης

$$\langle z, z\rangle = \lim_n \langle T(z_n), \lambda z_n\rangle = \lambda \underbrace{\lim_n \langle T(z_n), z_n\rangle}_{\lambda} = \lambda^2 = \|T\|^2 > 0$$

Άρα $z \neq 0$ $\square$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής τότε

(i) Κάθε ιδιόχωρος του T που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερ. διάσ.

(ii) Αν (x_n) άπειρη ορθοκ. ακολουθία, $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, με $T(x_n) = \lambda_n x_n$, τότε $\lambda_n \to 0$

(iv) Αν $TT^* = T^*T$, το σύνολο $\sigma_p(T)$ ή είναι πεπερασμένο ή αποτελείται από ακολουθία συγκλίνουσα στο 0

Απόδειξη:

(i) Αν $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, τότε

$T(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ και $T|_{M_\lambda} = \lambda \, I|_{M_\lambda}$

Αφού T = συμπαγής $\overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} I|_{M_\lambda}$ = συμπαγής $\Rightarrow$ Ball(M_λ) =

= συμπαγής $\Rightarrow \dim(M_\lambda) < +\infty$

(ii) Επειδή T = συμπαγής έχω

$\langle T(x_n), x_n \rangle \to 0 \Rightarrow \lambda_n \langle x_n, x_n \rangle \to 0 \Rightarrow \lambda_n \to 0$

(iii) Έχω και το $\sigma_p(T)$ = άπειρο και θέλω να αποδείξω ότι μηδενική ακολουθία. Άρα $\exists \, \delta > 0$:

$\{ \lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \delta \}$ = άπειρο.

Άρα $\exists$ άπειρη ακολουθία διακεκριμένων, διοτιμών (λ_n) με $|\lambda_n| \geq \delta \quad \forall n$

Αν $x_n \neq 0$, $\|x_n\| = 1$ με $T(x_n) = \lambda_n x_n$ και άρα από το (ii) η ακολουθία (x_n) είναι ορθοκανονική και άρα

$\lambda_n \to 0$. Άτοπο

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> (Φασματικό 1ο μορφή)

$T \in B(H)$ συμπαγής, $TT^* = T^*T$, $M_\lambda = \ker(T - \lambda I)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$

Τότε:

(i) $M_\lambda \underset{\lambda \neq \mu}{\perp} M_\mu$, $\quad H = \overline{[\cup_\lambda M_\lambda]}$

(ii) $T|_{(\ker T)^\perp}$ διαγωνοποιείται

(Παρατήρηση: το (ε) είναι ισοδύναμο με το ότι ο T διαγωνοποιείται)

Απόδειξη:

- Έστω T = αυτοσυζυγής ($T = T^*$) από την προηγούμενη πρόταση $\exists\ \lambda \in \sigma_p(T)$: $\|T\| = \lambda$

Άρα $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

- Έστω δείξει ότι $\lambda \neq \mu \Rightarrow M_\lambda \perp M_\mu$

- Έστω $M = \overline{[\cup_\lambda M_\lambda]}$, θα δ.ο. $M = H$

Αρκεί να δ.ο. $M^\perp = \{0\}$.

- Έστω $M^\perp \neq \{0\}$

- Επειδή $T(M_\lambda) \subseteq M_\lambda\ \ \forall \lambda \Rightarrow T(M) \subseteq M \Rightarrow$

$\Rightarrow T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp \Rightarrow T(M^\perp) \subseteq M^\perp$

- Άρα ο $B = T|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$

ορίζει συμπαγή και αυτοσυζυγή τελεστή

συνεπώς από, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{C}$ δη $\exists\ x \in M^\perp$: $x \neq 0$

με $B(x) = \lambda x \Rightarrow T(x) = \lambda x \Rightarrow x \in M_\lambda \Rightarrow x \in M$

Άρα $x \in M \cap M^\perp \Rightarrow x = 0$ άτοπο

Άρα $M^\perp = \{0\}$

- Συνεπώς αν $T = T^* \Rightarrow T =$ διαγωνοποιήσιμος

- Έστω $T^*T = TT^* = S$

Έστω ως $S =$ συμπαγής και αυτοσυζυγής.

• Από το πρώτο μέρος της απόδειξης

$$H = \overline{\left[\cup \{ M_h(S) : h \in \sigma_p(S) \} \right]}$$

όπου $M_h(S)$ = ιδιόχωρος του S

• Ισχυρίζομαι ότι $T(M_h(S)) \subseteq M_h(S)$

Πράγματι, $TS = TT^*T = T^*T \cdot T = ST$

Αν $x \in M_h(S) \Rightarrow S(x) = hx \Rightarrow TS(x) = hT(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(T(x)) = hT(x) \Rightarrow T(x) \in M_h(S)$

• Άρα ο $A_h = T|_{M_h(S)}$ απεικόνιση του $M_h(S)$ στον $M_h(S)$

συνεπώς A_h = φυσιολογικός

• Αν $h \neq 0 \Rightarrow \dim(M_h(S)) < +\infty$

άρα A_h = φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερ. dim

• Από την Γραμμική Άλγεβρα $\exists$ ορθοκανονική βάση

του $M_h(S)$ ως προς την οποία ο A_h είναι διαγώνιος

Έστω ότι αυτή η βάση είναι

$$\mathcal{E}_h = \{ e_n^h : n = 1, 2, \dots, n_h \}$$

Προφανώς ο $\mathcal{E}_h$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

των A_h και άρα του T

• Επίσης $\bigcup_{h \in \sigma_p(S) - \{0\}} \mathcal{E}_h$ = ορθοκανονική βάση του

$$N = \overline{\left[\bigcup_{h \in \sigma_p(S) - \{0\}} \mathcal{E}_h \right]}$$

Άρα ο $T|_N$ = διαγωνιοποιήσιμος

- Για να είναι ο T διαγωνοποιήσιμος αρκεί να δ.ο.

$$T|_{N^\perp} = \text{διαγωνοποιήσιμος}$$

Θα δείξω κάτι ισχυρότερο ότι $N^\perp = \ker T$ και άρα $T|_{N^\perp} = 0$

- Από το 1ο μέρος της απόδειξης S = διαγωνοποιήσιμος.

Άρα:

$$H = \overline{\left[\bigcup_{\mu \in \sigma_p(S)} M_\mu(S)\right]} = \overline{\left[\bigcup_{\substack{\mu \in \sigma_p(S) \\ \mu \neq 0}} M_\mu(S)\right]} \oplus M_0(S) \Rightarrow$$

$\Rightarrow H = N \oplus M_0(S)$ όπου $M_0(S) = 0$ ιδιόχωρος του S

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0

Δηλ. $M_0(S) = \ker S$

- Άρα $H = N \oplus \ker S \xRightarrow{N \perp \ker S} \ker S = N^\perp$

- Άρα αρκεί να δ.ο. $\ker T = \ker S$

Πράγματι

$\rightarrow x \in \ker T \Rightarrow T(x) = 0 \Rightarrow T^* T x = 0 \Rightarrow S x = 0 \Rightarrow x \in \ker S$

$\rightarrow x \in \ker S \Rightarrow \langle Sx, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx, x\rangle = 0 \Rightarrow \|Tx\|^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in \ker T$

- Το ζητούμενο προκύπτει από το ότι

$$(\ker T)^\perp = (\ker S)^\perp = M_0(S)^\perp = N$$

και $T|_N$ = διαγωνοποιήσιμος

ΛΗΜΜΑ:

Έστω $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετες ανά δύο προβολές που δρουν σε χώρο Hilbert H και $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_n \to 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n$ συγκλίνει ως προς την νόρμα του $B(H)$

Απόδειξη:

- Έστω $x \in H$, $k > m$

$$\Big\| \sum_{n=m}^{k} \alpha_n P_n(x) \Big\|^2 = \sum_{n=m}^{k} \|\alpha_n P_n(x)\|^2 = \sum_{n=m}^{k} |\alpha_n|^2 \|P_n(x)\|^2 \leq$$

$$\leq \max\{|\alpha_n|^2 : m \leq n \leq k\} \sum_{n=m}^{k} \|P_n(x)\|^2 \leq$$

$$\leq \max\{|\alpha_n|^2 : m \leq n \leq k\} \|x\|^2$$

- Άρα $\Big\| \sum_{n=m}^{k} \alpha_n P_n \Big\| \leq \max\{|\alpha_n| : m \leq n \leq k\}$

- Έστω $S_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n P_n$. Έχω ότι

$$\| S_k - S_m \| \leq \max\{|\alpha_n| : m \leq n \leq k\}$$

- Επειδή $|\alpha_n| \to 0$ έχω ότι

$(S_n) =$ Cauchy στον $B(H)$ και άρα

η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n$ συγκλίνει ως προς τον $B(H)$ $\square$

Θεώρημα (Φασματικό, 2ο μέρος)

Έστω $T \in B(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Οι ιδιόχωροι M_λ, $\lambda \in \sigma_p(T)$ είναι ανά δύο κάθετοι, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H

(ii) Αν P_λ η προβολή στον ιδιόχωρο M_λ και το πλήθος των P_λ είναι αριθμήσιμο και αν $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $P_n = P_{\lambda_n}$

τότε
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P_n \overset{\kappa.\sigma}{=} I \\ T \overset{\|\,\|}{=} \sum_n \lambda_n P_n \quad \text{(ως προς την νόρμα του } B(H)\text{)} \end{cases}$$

(iii) $TT^* = T^*T$

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- Έστω $\{\lambda : M_\lambda = \text{ιδιόχωρος}\}$ = αριθμήσιμο σύνολο

Άρα $\sigma_p(T)$ = αριθμήσιμο $\Rightarrow \sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$

Από υπόθεση

$$H = \overline{\left[\bigcup_n M_{\lambda_n}\right]} \Rightarrow H = \overline{\left[\bigcup_n P_n(H)\right]} \Rightarrow I \overset{\kappa\sigma}{=} \sum P_n$$

- Από προηγούμενη πρόταση $\lambda_n \to 0$

τότε $T(x) = \sum_n T P_n(x) = \sum_n \lambda_n P_n(x)$

Από το προηγούμενο λήμμα

$$T \overset{\|\,\|}{=} \sum_n \lambda_n P_n$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Αφού $T = \sum_n \lambda_n P_n \Rightarrow T^* = \sum \bar{\lambda}_n P_n$

Για κάθε $x \in H$, έχω

$$\|T^*x\|^2 = \|\sum_n \bar{\lambda}_n P_n(x)\|^2 = \sum_n |\bar{\lambda}_n|^2 \|P_n(x)\|^2 =$$

$$= \sum_n |\lambda_n| \|P_n(x)\|^2 = \|\sum \lambda_n P_n(x)\|^2 = \|T(x)\|^2$$

Έτσι $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle$

$\forall x \in H$ Άρα $T^*T = TT^*$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Προκύπτει από το φασματικό Θεώρημα I

<u>Θεώρημα:</u> (φασματικό $\exists \equiv$ ύπαρξη)

Έστω $T \in B(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) T = συμπαγής και φυσιολογικός

(ii) $\exists$ πεπερασμένη ή απειρη ορθοκανονική ακολουθία (x_n)

και $T(x_n) = \lambda_n x_n$ $\forall n$ και

$$T \overset{\|\cdot\|}{=} \sum_{n=1}^{\omega} \lambda_n \cdot x_n \otimes x_n \quad \text{(ως προς την νόρμα του } B(H))$$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω T = συμπαγής και φυσιολογικός

Θεώρημα Ι.: $\exists$ πεπερασμένη ορθοκ. βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και

$(\ker T)^{\perp}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T

που αντιστοιχούν σε τις ιδιοτιμές

Δηλ. $Tx_n = a_n x_n$

. Επειδή $a_n \to 0$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \otimes x_n$ συγκλίνει νόρμα

από το προηγούμενο λήμμα

. Έστω $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \otimes x_n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } S|_{\ker T} = 0 = T|_{\ker T} \\ S(x_n) = a_n x_n = T(x_n)\ \forall n \\ \{x_n\}_n = \text{ορθοκ. βάση του } (\ker T)^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = T$

(ii) ⇒ (i)

. Αν $T = \|\cdot\| - \lim_m \sum_{n=1}^{m} a_n\, x_n \otimes x_n$

Επειδή $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\, x_n \otimes x_n\right)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία τελεστών

πεπερασμένης τάξης, ο T = συμπαγής

. Έστω $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n\, x_n \otimes x_n$. Άρα $\forall x \in H$

$$\|T(x)\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, x_n\rangle x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, |\langle x, x_n\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{a}_n|^2\, |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|T^* x\|^2$$

Άρα $T^*T = TT^* \Rightarrow T$ = φυσιολογικός $\square$