Το Φασματικό Θεώρημα για συμμετρικούς τελεστές

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> E = γραμ. χώρος, $T: E \to E$ γραμμικός, το $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται ιδιοτιμή της T αν υπάρχει $x \in E$: $x \neq 0$ ώστε $T(x) = \lambda x$. Σε αυτή την περίπτωση το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα της T.

• Το σύνολο $M_\lambda = \{x \in E : T(x) = \lambda x\} = Ker(T - \lambda I)$ λέγεται ιδιοχώρος της T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή T

• Συμβολίζουμε $\sigma_p(T) = \{\lambda : \lambda = \text{ιδιοτιμή της } T\}$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(i) M_λ = αναλλοίωτος από την T δηλ. $T(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $x \in M_\lambda \Rightarrow T(x) = \lambda x \Rightarrow T(T(x)) = \lambda T(x) \Rightarrow T(x) \in M_\lambda$

(ii) Αν E = χώρος με νόρμα τότε M_λ = κλειστός διότι

$$M_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}(\{0\})$$

(iii) Αν λ, μ = ιδιοτιμές της T, $\lambda \neq \mu \Rightarrow M_\lambda \cap M_\mu = \{0\}$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\text{Αν } x \in M_\lambda \cap M_\mu \Rightarrow \begin{cases} T(x) = \lambda x \\ T(x) = \mu x \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \mu)x = 0 \overset{\lambda - \mu \neq 0}{\Rightarrow} x = 0$$

(iv) Αν $\dim(E) < +\infty$, E = δ.χ. επί του $\mathbb{C}$ τότε κάθε γραμμικός $T: E \to E$ έχει ιδιοτιμή.

<u>Απόδειξη</u>

λ = ιδιοτιμή $\Leftrightarrow$ λ = ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της T

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας όλα τα πολυώνυμα έχουν ρίζα στο $\mathbb{C}$.

(v) Δεν ισχύει το προηγούμενο αν $\dim E = +\infty$

Πχ:

$H = \ell^2$, $T: H \to H$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \dots)$$

η T δεν έχει ιδιοτιμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ: H = διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H)$. Η T λέγεται διαγωνιοποιήσιμη αν υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H ώστε $T(e_n) = \lambda_n e_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρήσεις

(i) $|\lambda_n| = \|T(e_n)\| \leq \|T\| \ \forall n$

Άρα η ακολουθία $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ (είναι φραγμένη)

(ii) Έστω T = διαγωνιοποιήσιμος ως προς την ορθοκ. βάση (e_n)

Έστω (f_n) η συνήθης ορθοκ. βάση του ℓ^2.

Ορίζω $U: H \to \ell^2$, $U(e_n) = f_n \ \forall n$

ο U = ορθομοναδιαίος τελεστής

- Έστω $T(e_n) = \lambda_n e_n \ \forall n$ και $\alpha = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Ορίζω $D_\alpha: \ell^2 \to \ell^2$, $D_\alpha(b) = \alpha b = (\alpha_n b_n)_n$

Τότε $T = U^* D_\alpha U \iff UT = D_\alpha U$. Πράγματι

$$\left.\begin{aligned} UT(e_n) &= U(\lambda_n e_n) = \lambda_n U(e_n) = \lambda_n f_n \\ D_\alpha U(e_n) &= D_\alpha(f_n) = \alpha \cdot f_n = \lambda_n f_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow UT(e_n) = D_\alpha U(e_n) \ \forall n \Rightarrow UT = D_\alpha U$$

(iii) Αν T = διαγωνοποιήσιμος, ο H έχει μία ορθοκανονική βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T

(iv) Έστω T = διαγωνοποιήσιμος. Αν $\sigma_p(T)$ = σύνολο ιδιοτιμών του T. $\exists\, (e_n)$ ορθοκαν. βάση του H και $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : T(e_n) = \lambda_n e_n \ \forall n\}$

Απόδειξη:

Έστω $\mu \in \sigma_p(T) \Rightarrow \exists\, x \neq 0 : T(x) = \mu x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } x = \sum_n a_n e_n \Rightarrow T(x) = \sum_n a_n T(e_n) = \sum_n a_n \lambda_n e_n \\ \mu x = \sum_n \mu a_n e_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n (a_n \lambda_n) e_n = \sum_n (\mu a_n) e_n \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a_n \lambda_n = a_n \mu \ \forall n \Rightarrow a_n(\lambda_n - \mu) = 0 \\ \text{Αφού } x \neq 0 \Rightarrow \exists\, n_0 : a_{n_0} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{n_0} = \mu$$

Άρα $\mu = \lambda_{n_0}$

(v) Έστω (e_n) = ορθοκ. βάση του H και $(\lambda_n) \in \ell^\infty$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot e_k \otimes e_k^*$ συγκλίνει κατά σημείο

Απόδειξη:

(Αν $\xi, \eta \in H$ τότε $\xi \otimes \eta^* : H \to H$, $\xi \otimes \eta^*(x) = \langle x, \eta \rangle \xi$)

Έστω $|\lambda_n| \leq M \ \forall n$ και $x \in H$. Ορίζω

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \otimes e_k^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Αρκεί να δω (y_n) = Cauchy

Έστω $z_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ τότε $z_n \to x$. Άρα (z_n) = Cauchy

Έστω $m > n$

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq$$

$$\leq M^2 \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 = M^2 \|z_m - z_n\|^2$$

Άρα $\left.\begin{array}{l}\|y_m - y_n\| \leq M \|z_m - z_n\| \\ (z_n) = \text{Cauchy}\end{array}\right\} \Rightarrow (y_n) = \text{Cauchy}.$

(vi) Έστω (e_n) και T όπως στον ορισμό. Τότε

$$T(x) = \lim_{m} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, e_k \otimes e_k^{\Delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot e_k \otimes e_k^{\Delta}$$

Απόδειξη:

- Από την προηγούμενη παρατήρηση, αν
$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \cdot e_n \otimes e_n^{\Delta}$$
τότε $\forall x \in H$ η $(S_m(x))_m$ συγκλίνει
- Άρα ορίζει φραγμένο τελεστή $S(x) = \lim_m S_m(x)$
- Αρκεί να δ.ο. $T = S$
- Έστω $T(e_k) = \lambda_k e_k = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n (e_n \otimes e_n^{\Delta})(e_k) = S_m(e_k)$

Άρα επίσης $S(e_k) = \lim_m S_m(e_k)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } T(e_k) = S(e_k)\ \forall k \\ (e_k) = \text{βάση ορθοκ.}\end{array}\right\} \Rightarrow T = S$

(vii) Έστω T, (e_n) όπως πριν υπόθεση. Τότε

$$T^* = \sum_n \bar{\lambda}_n e_n \otimes e_n^*, \quad \sigma_p(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T)\} = \{\bar{\lambda}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

<u>Απόδειξη</u>

· Λέμε ότι $S_i \xrightarrow{WOT} S$ αν $\langle S_i(x), y\rangle \to \langle S(x), y\rangle \ \forall x, y$

· Υπενθυμίζουμε ότι $S_i \xrightarrow{WOT} S \Rightarrow S_i^* \xrightarrow{WOT} S^*$ διότι $\forall x, y \in H$

$$\langle S_i^*(x), y\rangle = \langle x, S_i(y)\rangle = \overline{\langle S_i(y), x\rangle} \to \overline{\langle S(y), x\rangle} = \langle S^*(x), y\rangle$$

· Έστω $T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \otimes e_n^* \Rightarrow T_m^* = \sum_{n=1}^{m} \bar{\lambda}_n e_n \otimes e_n^*$

Επειδή $T_m \to T$ κατά σημείο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T_m \xrightarrow{WOT} T \Rightarrow T_m^* \xrightarrow{WOT} T^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n e_n \otimes e_n^*.$$

Από την παρατήρηση (vi) η σύγκλιση αυτής της σειράς δεν είναι μόνο WOT αλλά και κατά σημείο

· Επειδή $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n e_n \otimes e_n^* \Rightarrow \sigma_p(T^*) = \{\bar{\lambda}_n : n \in \mathbb{N}\}$

(viii) Κάθε διαγώνιος τελεστής είναι φυσιολογικός

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $T = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n^*$, τότε

$$T^*T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T^*(e_n \otimes e_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T^*(e_n) \otimes e_n^* \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow T^*T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_n e_n \otimes e_n^* \\ &\text{Ομοίως } TT^* = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \lambda_n e_n \otimes e_n^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow T^*T = TT^*$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: H = διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $T \in B(H)$. Τότε

T = διαγωνοποιήσιμος $\iff$ οι ιδιόχωροι του είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$

- Αν T = διαγωνοποιήσιμος, $\exists$ ορθοκ. βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ και $T \overset{KG}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot e_n \otimes e_n$

  όπου $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$

- Ο ιδιόχωρος M_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n είναι

$$M_n = \{x \in H : T(x) = \lambda_n x\}$$

- Παρατηρώ $T(e_n) = \lambda_n \cdot e_n \Rightarrow e_n \in M_n \ \forall n$

- Άρα $H = \overline{[M_n : n \in \mathbb{N}]}$

- Αρκεί να δω $\underset{n \neq m}{M_n \perp M_m}$

Ισοδύναμα αν λ, μ = ιδιοτιμές, $\lambda \neq \mu \Rightarrow M_\lambda \perp M_\mu$

Έστω $x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$. Υποθέτω ότι $\lambda \neq 0$ (αλλιώς $\mu \neq 0$)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x, T^*(y)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\langle x, \bar{\mu} y\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle x, y\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\langle x, y\rangle = 0 \overset{\mu \neq \lambda}{\Rightarrow} \langle x, y\rangle = 0$$

Άρα $M_\lambda \perp M_\mu$

$\boxed{\Leftarrow}$

. Έστω (α_n) = ιδιοτιμές της T, M_{α_n} = ιδιοχώροι, $n \in \mathbb{N}$

. Υποθέτω ότι $M_{\alpha_n} \perp M_{\alpha_m}$, $n \neq m$, $H = \overline{[\bigcup_n M_{\alpha_n}]}$ (A)

. Έστω P_n = προβολή στον M_{α_n} τότε

$$T(P_n(x)) = \alpha_n P_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in H$$

. Από (A) $\Rightarrow$ $P_n \perp P_m$, $n \neq m$, $I_H = \sum_n P_n$

. Έστω $M_n = P_n(H) = \overline{[e_1^n, \dots, e_m^n \dots]}$

όπου $e_1^n, \dots, e_m^n$ - ορθοκανονικά

Τότε $P_n = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^n \otimes (e_i^n)^\wedge$

. Άρα $T(x) = T(\sum_n P_n(x)) = \sum_n T(P_n(x)) = \sum_n \alpha_n P_n(x) =$

$$= \sum_n \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \, e_i^n \otimes (e_i^n)^\wedge (x)$$

. Παρατηρώ $T(e_i^n) = \alpha_n e_i^n \Rightarrow e_i^n$ = ιδιοδ. της T

$\{e_i^n : i, n \in \mathbb{N}\}$ = ορθοκ. βάση της H

. Άρα ... ορθοκ. βάσης ιδιοδιανυσμάτων της T

. Άρα T = διαγωνιοποιήσιμος

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν

T = διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές $\sigma_p(T) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$

και P_n = προβολή στον M_{α_n}, τότε

$$T \overset{\kappa.\sigma.}{=} \sum \alpha_n P_n$$

Δηλ. $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(x)$ $\forall x \in H$ □