ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω F, E διανυσματικοί χώροι και $T: E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Η T λέγεται τελεστής πεπερασμένης τάξης, αν $\dim(T(E)) < +\infty$

Παρατήρηση: Οι τελεστές πεπερασμένης τάξης που είναι συνεχείς είναι συμπαγείς.

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } T(B_E) \subseteq T(E) \Rightarrow \overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T(E)} \\ \text{Επειδή } \dim(T(E)) < +\infty \Rightarrow \overline{T(E)} = T(E) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \overline{T(B_E)} \text{ κλειστό υποσύνολο του } T(E) \\ \text{Επειδή } T = \text{συνεχής} \Rightarrow T(B_E) = \text{φραγμένο} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \overline{T(B_E)} \text{ κλειστό + φραγμένο υποσύνολο του } T(E) \\ \dim T(E) < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{T(B_E)} = \text{συμπαγές.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: E, F = χώροι Banach, $(T_n) \subseteq B(E,F)$, T_n = συμπαγής $\forall n \in \mathbb{N}$, $T \in B(E,F)$ ώστε $\|T_n - T\| \to 0$. Τότε T = συμπαγής

Απόδειξη:

- Αρκεί να δ.ο. $T(B_E)$ = ολικά φραγμένο
- Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{N}: \|T_k - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$
- T_k = συμπαγής $\Rightarrow T_k(B_E)$ = ολικά φραγμένο.

Άρα, $\exists\, x_1, \dots, x_n \in B_E$: $T_k(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(T_k(x_i), \frac{\varepsilon}{3})$

• Επομένως αν $x \in B_E \Rightarrow \exists\, i$ $\|T_k(x) - T_k(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Άρα

$$\|T(x) - T(x_i)\| \le \|T(x) - T_k(x)\| + \|T_k(x) - T_k(x_i)\| + \|T_k(x_i) - T(x_i)\| <$$

$$\le \|T - T_k\|\,\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_k - T\|\,\|x_i\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\|x_i\| \le \varepsilon$$

• Άρα $T(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} B(T(x_i), \varepsilon)$

• Συνεπώς $T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(T(x_i), \varepsilon)$ □

<u>Θεώρημα</u>: H = Hilbert, $T \in B_H$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) T = συμπαγής

(ii) $\forall$ ορθοκ. ακολουθία (x_n): $\langle T(x_n), x_n \rangle \to 0$

(iii) $\exists$ ακολουθία από πεπερ. τάξης τελεστές (F_n) ώστε $\|F_n - T\| \to 0$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν (x_n) = ορθοκ. ακολουθία, $x \in H$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \le \|x\|^2 < +\infty$$

Άρα $\lim_n \langle x, x_n \rangle = 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} 0 \underset{\text{συμπαγής}}{\overset{T}{\Rightarrow}} \|T(x_n)\| \to 0$

Άρα $|\langle T(x_n), x_n \rangle| \le \|T(x_n)\|$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle T(x_n), x_n \rangle \to 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

• Έστω $n \in \mathbb{N}$, θέλω να κατασκευάσω ακολουθία μέγιστων

Τέτοιο υπάρχει λόγω της (F_n): $\|T-F_n\| \le \frac{1}{n}$.

- $\mathcal{Q}$ = η οικογένεια γνήσιων ορθοκανονικών υποσυνόλων $A \subseteq H$ ώστε $|\langle T(x), x\rangle| \ge \frac{1}{4n}$ $\forall x \in A$

- Αν $A \in \mathcal{Q}$ τότε A = πεπερασμένο.

(Αλλιώς $\exists$ άπειρο ορθοκανονικό σύνολο $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ ώστε
$$|\langle T(x_i), x_i\rangle| \ge \frac{1}{4n} \quad \forall i$$
Όμως $x_i \xrightarrow{w} 0 \overset{\text{υπόθεση}}{\Rightarrow} \langle T(x_i), x_i\rangle \to 0$)

- Η οικογένεια $\mathcal{Q}$ είναι μερικά διατεταγμένη ως προς την σχέση του περιέχεσθαι

- Η $\mathcal{Q}$ έχει μεγιστικό στοιχείο (Αλλιώς $\exists$ γνησίως αύξουσα άπειρη ακολουθία $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n \subsetneq \cdots$, $A_i \in \mathcal{Q}$

Αν $A_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ τότε A_0 = ορθοκ. σύνολο, άπειρο ώστε $|\langle T(x), x\rangle| \ge \frac{1}{4n}$ $\forall x \in A_0$. Άτοπο

- Έστω B = μεγιστικό στοιχείο της $\mathcal{Q}$ και
$$M = [b : b \in B] \Rightarrow \dim M < +\infty$$

- Αν $x \in M^{\perp}$ και $\|x\| = 1$ τότε
$$|\langle T(x), x\rangle| \le \frac{1}{4n}$$
(Αλλιώς $B \cup \{x\} \in \mathcal{Q}$ που αντιφάσκει με μεγιστικότητα της $\mathcal{Q}$)

- Έστω $u, v \in M^{\perp}$, $\|u\| \le 1$, $\|v\| \le 1$

Επειδή $\left\|\frac{u \pm v}{2}\right\| \le 1$, $\left\|\frac{u \pm iv}{2}\right\| \le 1$ έχω

$$|\langle T(u),v\rangle| = \Big|\langle T(\tfrac{u+v}{2}),\tfrac{u+v}{2}\rangle - \langle T(\tfrac{u-v}{2}),\tfrac{u-v}{2}\rangle +$$
$$+ i\langle T(\tfrac{u+iv}{2}),\tfrac{u+iv}{2}\rangle - i\langle T(\tfrac{u-iv}{2}),\tfrac{u-iv}{2}\rangle\Big| \le$$
$$\le \frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}=\frac{1}{n}$$

- Άρα $|\langle T(u),v\rangle| \le \frac{1}{n}$ $\forall u,v\in M^{\perp}$, $\|u\|\le 1$, $\|v\|\le 1$

- Έστω $x,y\in H$, $\|x\|\le 1$, $\|y\|\le 1$ και P = προβολή του M.

Τότε $u=(I-P)x$, $v=(I-P)y \in M^{\perp}$

- Άρα $|\langle T(I-P)x,(I-P)y\rangle| \le \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\langle (I-P)T(I-P)x,y\rangle| \le \frac{1}{n}$ $\forall x,y\in B_H \Rightarrow$

$\Rightarrow \|(I-P)T(I-P)\| \le \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T-(PT+TP-PTP)\| \le \frac{1}{n}$

- Θέτω $F_n = PT+TP-PTP$, Αφού $\dim P(H) < +\infty$ $\Big\} \Rightarrow F$ = τελεστής πεπερασμένης τάξης

και $\|T-F_n\| \le \frac{1}{n}$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω (F_n) πεπερασμένης τάξης τελεστές ακολ. τέτοια ώστε

$\|F_n - T\| \to 0$, Επειδή F_n = συμπαγής $\forall n$ $\Big\} \Rightarrow T$ = συμπαγής