**Πρόταση:** Έστω $T, S \in B(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε

(i) $(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S$

(ii) $T^{**} = T$

(iii) $(TS)^* = S^* T^*$

(iv) $\|T^*\| = \|T\|$

(v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

**Απόδειξη:**

(i) $\langle (T+\lambda S)^*(x), y\rangle = \langle x, (T+\lambda S)(y)\rangle = \langle x, T(y)\rangle + \bar{\lambda}\langle x, S(y)\rangle =$

$= \langle T^*(x), y\rangle + \bar{\lambda}\langle S^*(x), y\rangle = \langle T^*(x) + \bar{\lambda} S^*(x), y\rangle =$

$= \langle (T^* + \bar{\lambda} S^*)(x), y\rangle \quad \forall x, y \in H$, άρα

$(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$

(ii) $\langle T^{**}(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \overline{\langle T^*(y), x\rangle} = \overline{\langle y, T(x)\rangle} = \langle T(x), y\rangle$

$\forall x, y \in H$, άρα $T^{**} = T$

(iii) $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle x, TS(y)\rangle = \langle T^*(x), S(y)\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$

$\forall x, y \in H$ άρα $(TS)^* = S^*T^*$

(iv) $\|T^*\| = \sup\{ |\langle T^*(x), y\rangle| : \|x\|\le 1, \|y\|\le 1 \} =$

$= \sup\{ |\langle x, T(y)\rangle| : \|x\|\le 1, \|y\|\le 1 \} =$

$= \sup\{ |\langle T(y), x\rangle| : \|x\|\le 1, \|y\|\le 1 \} = \|T\|$

(v) $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle \le \|T^*T(x)\|\,\|x\| \le \|T^*T\|\,\|x\|^2$

Άρα $\|T(x)\| \le \sqrt{\|T^*T\|}\,\|x\| \quad \forall x \Rightarrow \|T\| \le \sqrt{\|T^*T\|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T\|^2 \le \|T^*T\|$

Από την άλλη μεριά $\|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$

Άρα $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ $\square$

**Ορισμοί:** $H$ = χώρος Hilbert, $T \in B(H)$

(i) Ο $T$ λέγεται φυσιολογικός αν $T^*T = TT^*$

(ii) Ο $T$ λέγεται αυτοσυζυγής αν $T^* = T$

(iii) Ο $T$ λέγεται ορθομοναδιαίος αν $T^*T = I$, $TT^* = I$

(iv) Ο $T$ λέγεται ισομετρία αν $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in H$

**Παραδείγματα:**

(i) Έστω $\alpha \in \ell^\infty$, ορίζω $D_\alpha : \ell^2 \to \ell^2$, $D_\alpha(b) = \alpha b = (\alpha(n) b(n))_n$

Δείξτε ότι ο $D_\alpha$ = φυσιολογικός

(ii) Έστω $S : \ell^2 \to \ell^2$, $S(e_n) = e_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

Δείξτε ότι $S$ = ισομετρία, όχι φυσιολογικός

(iii) Αν $f \in L^\infty[0,1]$, ορίζω $M_f : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $M_f(g) = fg$

Δείξτε ότι $M_f$ = φυσιολογικός τελεστής και $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

(iv) $\ell^2(\mathbb{Z}) = \overline{[\dots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots]}$

Ορίζω $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $U(e_n) = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Δείξτε ότι $U$ = ισομετρία

**Πρόταση:** $H$ = χώρος Hilbert, $T \in B(H)$

(i) $T$ = φυσιολογικός $\iff \|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ $\forall x \in H$

(ii) $T$ = αυτοσυζυγής $\iff \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H$

(iii) $T$ = ισομετρία $\iff T^*T = I \iff \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in H$

(iv) $T$ = ορθομοναδιαίος $\iff T$ = ισομετρία επί

**Απόδειξη:**

(i) $\|T(x)\|^2 - \|T^*(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle - \langle T^*(x), T^*(x)\rangle =$

$= \langle T^*T(x), x\rangle - \langle TT^*(x), x\rangle$ (1)

Έχω $T$ = φυσιολογικός $\Leftrightarrow T^*T = TT^* \Leftrightarrow \langle T^*T(x), x\rangle = \langle TT^*(x), x\rangle$

$\forall x \in H \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \|T(x)\| = \|T^*(x)\| \ \forall x \in H$

(i) $\langle T(x), x\rangle - \langle T^*(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle - \langle x, T(x)\rangle =$

$= \langle T(x), x\rangle - \overline{\langle T(x), x\rangle} = 2i \operatorname{Im} \langle T(x), x\rangle$ (2)

Έχω $T = T^* \Leftrightarrow \langle T(x), x\rangle = \langle T^*(x), x\rangle \ \forall x \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im}\langle T(x), x\rangle = 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x$

(ii) $T^*T = I \Leftrightarrow \langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y$

$T$ = ισομετρία $\Leftrightarrow \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle \ \forall x \Leftrightarrow T^*T = I$

(iii) $\boxed{\Rightarrow}$

Εάν $T$ = ορθομοναδιαίος $\Rightarrow \begin{cases} T^*T = I \overset{(ii)}{\Rightarrow} T = \text{ισομετρία} \\ TT^* = I \qquad T = \text{επί} \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Εάν $T$ = ισομετρία επί $\Rightarrow \left.\begin{matrix} T = \text{αντιστρέψιμος} \\ T^*T = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow T^* = T^{-1}$

Άρα $T^*T = I = TT^* \Rightarrow T$ = ορθομοναδιαίος

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν $E$ = διαν. χώρος, $P: E \to E$ γραμμική, η $P$ λέγεται προβολή αν $P^2 = P$

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Εάν $E$ = χώρος με νόρμα $P \in B(E)$

(i) $P$ = ταυτοδύναμη $\Leftrightarrow I-P$ = ταυτοδύναμη

(ii) Αν $P$ = ταυτοδύναμη, τότε

(α) $\operatorname{Im}P$, $\operatorname{Ker}P$ = κλειστοί υπόχωροι του $E$

(β) $E = \operatorname{Im}P \oplus \operatorname{Ker}P$

**Απόδειξη:**

(i) $(I-P)(I-P) = I - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P$

(ii) (α) $\operatorname{Ker}P = P^{-1}(\{0\}) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{P} \operatorname{Ker}P$ = κλειστό

• Αν $x \in \operatorname{Im}P \Rightarrow \exists y : P(y) = x \Rightarrow P^2(y) = P(x) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow (I-P)(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(I-P)$

Άρα $\operatorname{Im}P \le \operatorname{Ker}(I-P)$

• Εάν $x \in \operatorname{Ker}(I-P) \Rightarrow (I-P)(x) = 0 \Rightarrow P(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Im}P$

Άρα $\operatorname{Ker}(I-P) \le \operatorname{Im}P$

• Άρα $\operatorname{Im}P = \operatorname{Ker}(I-P) = (I-P)^{-1}(\{0\}) \Rightarrow \operatorname{Im}P$ = κλειστό

(β) Εάν $z \in \operatorname{Im}P \cap \operatorname{Ker}P \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = P(x) \\ Pz = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Pz = P^2 x = Px \\ Pz = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = 0 \Rightarrow z = 0$

Άρα $\operatorname{Im}P \cap \operatorname{Ker}P = \{0\}$

• Εάν $x \in E \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = P(x) + (I-P)(x) \\ P(x) \in \operatorname{Im}P \\ (I-P)(x) \in \operatorname{Im}(I-P) = \operatorname{Ker}P \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Im}P \oplus \operatorname{Ker}P$

• Άρα $E = \operatorname{Im}P \oplus \operatorname{Ker}P$

$\square$