<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(E, <,>)$ λέγεται χώρος Hilbert αν ως προς την νόρμα $\|x\| = <x,x>^{1/2}$ είναι πλήρης δηλ. Banach

<u>Παραδείγματα:</u>

(α) Ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert

(β) Ο $C[-\pi,\pi]$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)$$

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $f_n(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t \le 0 \\ nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < t \le \pi \end{cases}$

- Παρατηρώ για $m \ge n$ ότι $\begin{cases} f_n(t) = f_m(t), & t \notin [0, \frac{1}{n}] \\ |f_n(t) - f_m(t)| \le 2 & \forall t \end{cases}$

Άρα

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/n} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \le \frac{1}{2\pi} \frac{4}{n} = \frac{2}{n\pi} \to 0$$

Άρα η (f_n) είναι $\|\cdot\|_2$-Cauchy

- Αν ο $C[-\pi,\pi]$ ήταν πλήρης θα υπήρχε $f \in C[-\pi,\pi]$ ώστε $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = \int_{-\pi}^{0} |f(t) - f_n(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt = \|f - f_n\|_2^2 \to 0$$

- Άρα $\int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2 dt + \int_{0}^{\pi} |f(t) - 1|^2 dt = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & -n \le t < 0 \\ 1, & 0 < t \le n \end{cases}$$

Άτοπο αφού f συνεχής

- Άρα $C[-n,n]$ όχι πλήρης □

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω H = χώρος Hilbert, E = κλειστός υπόχωρος του H, $x \in H$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ ώστε

$\|x-y\| = d(x,E)$

Απόδειξη:

- Αν $x \in E$ παίρνω $y = x$. Έστω $x \in H \setminus E$
- Έστω $\delta = d(x,E) \Rightarrow \exists (y_n) \subseteq E : \|y_n - x\| \to \delta$
- Από τον κανόνα του παρ/μου έχω

$$2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 = \|y_n - x + y_m - x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2 \quad (1)$$

Επειδή $\frac{y_n + y_m}{2} \in E \Rightarrow \left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\| \ge \delta$

Άρα

$$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \longrightarrow 0 \text{ όταν } n, m \to \infty$$

Άρα (y_n) = Cauchy.

- Επειδή E = πλήρης $\exists y \in E : y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$

Άρα $\|y - x\| = \lim_n \|y_n - x\| = \delta = d(x,E)$

- Μοναδικότητα y:

Έστω $y_1, y_2 \in E : \|y_1 - x\| = \delta = \|y_2 - x\|$

Έχω: $0 \le \|y_1 - y_2\|^2 \overset{(1)}{=} 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\|^2 =$

$$= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\|^2$$

Επειδή $\frac{y_1+y_2}{2} \in E \Rightarrow \delta \le \left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\|$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le \|y_1 - y_2\|^2 \le 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$ □

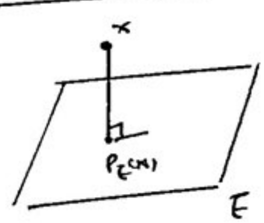
ΟΡΙΣΜΟΣ: Το y στην προηγούμενη πρόταση λέγεται ορθή προβολή του x στο E. Συμβολίζω $P_E(x) = y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: H = χώρος Hilbert, E = κλειστός υπόχωρος του H

(i) Αν $x \in E$ τότε $x - P_E(x) \perp E$

(ii) Αντίστροφα αν $\left.\begin{array}{l} x - y_0 \perp E \\ y_0 \in E \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = P_E(x)$

Απόδειξη:



(i) • Έστω $z = x - P_E(x)$. Από την προηγούμενη πρόταση, $\|z\| = d(x, E)$. Θα δ.ο. $z \perp E$.

• Έστω $y \in E$, $y_1 = P_E(x)$, $E_0 = [y, y_1]$

• Το y_1 = το πλησιέστερο ως προς το x διάνυσμα του E άρα και του E_0

• Το $\dim(E_0) < +\infty \overset{\text{Λήμμα}}{\Rightarrow} z \perp E_0 \Rightarrow z \perp y$

(ii) Έστω $y_0 \in E$ και $x - y_0 \perp E \Rightarrow$

$$\Rightarrow x - y_0 \perp y_0 - y \quad \forall y \in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x-y_0\|^2 + \|y_0-y\|^2 = \|(x-y_0)+(y_0-y)\|^2 = \|x-y\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x-y\|^2 \geq \|x-y_0\|^2 \quad \forall y \in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x-y_0\| = d(x,E) \Rightarrow y_0 = P_E(x) \quad \square$$

<u>Λομμα:</u> H = χώρος Hilbert, M = κλειστός υπόχωρος του H, $M \subsetneq H$. Τοτε $\exists\, z \in H$: $z \neq 0$, $z \perp M$

<u>Αποδειξη:</u>

Εστω $x \in H \setminus M$. Θεσω $z = x - P_M(x) \Rightarrow z \perp M$, $z \neq 0$

<u>Λομμα:</u> H = χώρος Hilbert, E = υπόχωρος του H.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\overline{E} = H$

(ii) Για καθε $x \perp E \Rightarrow x = 0$

<u>Αποδειξη:</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Εστω $x \perp E$, αφου $H = \overline{E}$, υπαρχει $(x_n) \subseteq E$: $x_n \to x \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle \\ &\text{Ομως } \langle x_n, x\rangle = 0 \quad \forall n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Εστω $\overline{E} = M$ και M γνησιος υπόχωρος του H

Απο το προηγούμενο λόρισμα $\exists\, z \in H$: $z \neq 0$, $z \perp M \Rightarrow$

$$\Rightarrow z \perp E \overset{\text{υποθεση}}{\Rightarrow} z = 0$$

Ατοπο. Αρα $M = H$ $\square$