ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σοφία Ζαφειρίδου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Πραγματική Ανάλυση

Σημειώσεις διαδικτύου

- ***Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού***
- ***Μελέτη συναρτήσεων***
- ***Αόριστα ολοκληρώματα***
- ***Ορισμένα ολοκληρώματα***
- ***Επικαμπύλια ολοκληρώματα***
- ***Γενικευμένα ολοκληρώματα***
- ***Μετασχηματισμός Laplace***
- ***Σειρές αριθμών***
- ***Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων***

Πάτρα 2021

Προλογος

Οι παρούσες σημειώσεις απευθύνονται κατά κύριο λόγο στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Η εκτιθέμενη ύλη καλύπτει το περιεχόμενο του μαθήματος ≪Απειροστικός Λογισμός ΙΙ≫, το οποίο διδάσκεται στο δεύτερο εξάμηνο.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για την μελέτη αυτών των σημειώσεων είναι
(*i*) βασικές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
(*ii*) ακολουθίες των πραγματικών αριθμών και όρια ακολουθιών,
(*iii*) όρια και συνέχεια πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής,
(*iv*) παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Ωστόσο στο παράρτημα των σημειώσεων παρατίθενται ο πίνακας των ορίων των ακολουθιών που αναφέρονται συχνά στις σημειώσεις και ο πίνακας παραγώγων των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Οι σημειώσεις αυτές από την πρώτη έκδοσή τους (το 2004) συνεχώς διορθώνονται και συμπληρώνονται. Ωστόσο πιθανόν να περιέχουν λάθη.

Με χαρά θα δεχτώ οποιεσδήποτε διορθώσεις ή παρατηρήσεις του αναγνώστη επί του κειμένου.

e-mail: zafeirid@math.upatras.gr

Πάτρα, Φεβρουάριος 2021

Σοφία Ζαφειρίδου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού.

Στο Κεφάλαιο αυτό αποδεικνύονται μερικά θεωρήματα διαφορικού λογισμού, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα Κεφάλαια.

Θα συμβολίζουμε με Δ ένα τυχαίο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, δηλαδή Δ είναι ένα από τα διαστήματα:

$$(a,b), [a,b), (a,b], [a,b], (a,\infty), [a,\infty), (-\infty,b), (-\infty,b].$$

1.1 Θεωρήματα Μέσης Τιμής.

Θεώρημα 1.1.1. ***(Fermat)*** *Έστω ότι Δ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Αν μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ παίρνει τη μέγιστη (ελάχιστη) τιμή σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ και υπάρχει $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη. Επειδή $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο Δ, ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ όταν $x < x_0$ και $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ όταν $x > x_0$.

Επομένως

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \text{ και } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Συνεπώς $f'(x_0) = 0$.

(Η απόδειξη είναι όμοια αν $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο Δ.)

$\square$

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Fermat.

Ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Συμφωνα με το Θεώρημα του Fermat. αν η f παίρνει τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της στο $[a, b]$ στο εσωτερικό σημείο x_0 του $[a, b]$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα Ox.

Θεώρημα 1.1.2. ***(Rolle)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε*

(i) f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$

(ii) f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b)

(iii) $f(a) = f(b)$.

Τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο $f'(c) = 0$.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, η f στο $[a, b]$ έχει μέγιστη τιμή $M = f(x_M)$ και ελάχιστη τιμή $m = f(x_m)$, όπου $x_m, x_M \in [a, b]$. Άρα,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Αν $m = M$, τότε η f είναι σταθερή, $f'(c) = 0$ για κάθε $c \in [a, b]$.

Αν $m < M$, $x_m \in (a, b)$ ή $x_M \in (a, b)$, τότε από το Θεώρημα του Fermat(αφού η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο x_m και μέγιστη τιμή στο x_M) έπεται ότι $f'(x_m) = 0$ ή $f'(x_M) = 0$.

Αν $m < M$, $x_m \notin (a, b)$ και $x_M \notin (a, b)$, τότε η f παίρνει τις τιμές m και M στα άκρα a και b. Επειδή $f(a) = f(b)$ προκύπτει ότι $M = m$, που είναι άτοπο.

□

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle.

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα του $[a, b]$, τότε για κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του $[a, b]$ η εφαπτομένη της $y = f(x)$ στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα Ox.

Θεώρημα 1.1.3. (Μέσης Τιμής) *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b), τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a),\ x \in [a, b].$$

Η F ικανοποιεί όλες τις συνθήκης του Θεωρήματος του Rolle: είναι συνεχής στο $[a, b]$, έχει στο (a, b) παράγωγο

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

και $F(a) = 0 = F(b)$. Άρα, από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο $F'(c) = 0$. Δηλαδή

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \tag{1.2}$$

Η ισότητα (1.2) είναι ισοδύναμη με την (1.1).

□

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Μέσης Τιμής.

Αν $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (AB) που διέρχεται από τα σημεία A και B ισούται με $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ο αριθμός $f'(c)$ είναι ο συντελεστής της εφαπτομένης της $y = f(x)$ στο σημείο $(c, f(c))$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b), τότε υπάρχει ένα σημείο $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$, της καμπύλης $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία (AB).

Θεώρημα 1.1.4. (Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής) *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (a, b) και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $g(b) \neq g(a)$, δηλαδή ότι το κλάσμα στο δεξιό μέλος της (1.3) έχει νόημα. Πράγματι, αν αντίθετα $g(b) = g(a)$, τότε από το Θεώρημα του Rolle. υπάρχει $c \in (a, b)$ στο οποίο $g'(c) = 0$, που είναι άτοπο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \, [g(x) - g(a)], \; x \in [a, b].$$

Η G ικανοποιεί όλες τις συνθήκης του Θεωρήματος του Rolle: είναι συνεχής στο $[a, b]$, έχει στο (a, b) παράγωγο

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a} g'(x)$$

και $G(a) = 0 = G(b)$. Άρα, από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο $G'(c) = 0$. Δηλαδή

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a} g'(c) = 0. \tag{1.4}$$

Η ισότητα (1.4) είναι ισοδύναμη με την (1.3).

□

Θεώρημα 1.1.5. ***(Darbux)*** *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και $f'(a) \neq f'(b)$, τότε για κάθε γ μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $c \in (a, b)$ για το οποίο $f'(c) = \gamma$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f'(a) < \gamma < f'(b)$.

Θέτουμε $F(x) = f(x) - \gamma x$. Τότε $F'(x) = f'(x) - \gamma$.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Επομένως η F είναι συνεχής στο $[a, b]$. Άρα, η F παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $c \in [a, b]$.

Θα δείξουμε ότι $c \in (a, b)$.

$F'(a) = f'(a) - \gamma < 0 \Longrightarrow \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0$ για $x \in (a, a + \delta) \Longrightarrow F(x) < F(a) \Longrightarrow F(a)$ δεν είναι ελάχιστη τιμή. Άρα, $c \neq a$.

$F'(b) = f'(b) - \gamma > 0 \Longrightarrow \dfrac{F(x) - F(b)}{x - b} > 0$ για $x \in (b - \delta, b) \Longrightarrow F(x) < F(b) \Longrightarrow F(b)$ δεν είναι ελάχιστη τιμή. Άρα, $c \neq b$.

Συνεπώς $c \in (a, b)$. Από το Θεώρημα του Fermat $F'(c) = 0$. Άρα, $f'(c) - \gamma = 0$, ισοδύναμα $f'(c) = \gamma$.

Αν $f'(b) < \gamma < f'(a)$, τότε όμοια αποδεικνύεται ότι η F παίρνει τη μέγιστη τιμή στο $c \in (a, b)$.

□

1.2 Απροσδιόριστες μορφές

Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, τότε το όριο του πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)}$ και η ύπαρξη του ορίου του πηλίκου εξαρτάται από τις συναρτήσεις f και g. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$ παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$, όταν $x \to a$.

Απροσδιόριστες μορφές είναι : $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$.

Παραδείγματα 1.2.1.

1. $\frac{0}{0} : \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2$

2. $\frac{\infty}{\infty} : \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{3^x} = 0,\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x}{x} = 1$

3. $\infty-\infty : \lim\limits_{x\to\infty}[(x^2+1)-x^2] = 1,\ \lim\limits_{x\to 0}[(x^2+3)-x^2] = 3$

4. $0\cdot\infty : \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot 3^x\right] = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\cdot x\right] = 1$

5. $1^\infty : \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = -\dfrac{1}{3}$

Παρατήρηση 1.2.2. Η συνάρτηση $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ παίρνει απροσδιόριστη μορφή όταν $x\to a$, όταν ο εκθέτης $v(x)\ln u(x)$ παίρνει απροσδιόριστη μορφή $0\cdot\infty$ όταν $x\to a$, δηλαδή στις ακόλουθες περιπτώσεις:

ή $u(x)\to\infty$ και $v(x)\to 0$ (μορφή ∞^0)
ή $u(x)\to 0$ και $v(x)\to 0$ (μορφή 0^0)
ή $u(x)\to 1$ και $v(x)\to\pm\infty$ (μορφή 1^∞)

Ο κανόνας του L' Hospital

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω ότι $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(a,b]$.*

Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x){=}\lim\limits_{x\to a^+} g(x){=}0$, $g'(x){\neq}0$ στο $(a,b]$, και $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, τότε $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b]$, και $F(a) = G(a) = 0$. Τότε F και G είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμες στο (a, b) και $G'(x) \neq 0$ στο (a, b). Επομένως για κάθε $x \in (a, b)$ οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχής στο $[a, x]$, παραγωγίσιμες στο (a, x) και $G'(x) \neq 0$ στο (a, x). Σύμφωνα με γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}, \; a < c_x < x < b$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{c_x \to a^+} \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω ότι $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(a, b]$.*

Αν $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ στο $(a, b]$, και $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, τότε $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Απόδειξη. Έστω ότι $L \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty \tag{1.5}$$

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 1$ για κάθε $x \in (a, a + \delta)$. Επόμένως η g είναι θετική στο $(a, a + \delta)$. Έστω ότι $x_0 \in (a, a + \delta)$. Επειδή $g(x_0) > 0$ και $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$, υπάρχει $c \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (a, c)$ να ισχύει $g(x) > g(x_0)$. Άρα, $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} > 0$ στο (a, c).

Έστω $x \in (a, c)$. Τότε $x \in (a, x_0)$. Από το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $c_x \in (x, x_0)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L. \tag{1.6}$$

Από την ισότητα

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - L \right) \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} \right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x)} - L + L \frac{g(x_0)}{g(x)}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - L\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_0)}{g(x)} + L - \frac{g(x_0)}{g(x)}L. \quad (1.7)$$

Από τις σχέσεις (1.5), (1.6) και (1.7) για $x \to a^+$ παίρνουμε $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Αν $L = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, τότε $f'(x) \neq 0$ σε ένα διάστημα $(a, a+\varepsilon)$. Οπότε $\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Παρατήρηση 1.2.5. Τα Θεωρήματα 1.2.3 και 1.2.4 ισχύουν αν στη θέση του a^+ θέσουμε a^- (αντίστοιχα, a) και στη θέση του $(a,b]$ θέσουμε $[b,a)$ (αντίστοιχα, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$).

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω ότι $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $[a,\infty)$.*

Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ στο $[a,\infty)$, και $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, τότε $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(t) = f(\frac{1}{t})$ και $G(t) = g(\frac{1}{t})$, $t \in (0, 1/a]$.

Τότε $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}$. Επειδή $\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} G(t) = 0$, από το Θεώρημα 1.2.3:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω ότι $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $[a,\infty)$.*

Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ στο $[a,\infty)$, και $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, τότε $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(t) = f(\frac{1}{t})$ και $G(t) = g(\frac{1}{t})$, $t \in (0, 1/a]$.

Τότε $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{F(t)}{G(t)}$. Επειδή $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} G(t) = \infty$, από το Θεώρημα 1.2.4:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t}) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Παρατήρηση 1.2.8. Τα Θεωρήματα 1.2.6 και 1.2.7 ισχύουν αν στη θέση του $x \to \infty$ θέσουμε $x \to -\infty$ και στη θέση του $[a, \infty)$ θέσουμε $(-\infty, a]$.

Παρατήρηση 1.2.9. Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{-g(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{-g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παραδείγματα 1.2.10.

Μορφή $\frac{0}{0}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[\ln(1+x)]'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})' \cdot \cos(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\cos(1/x)} = 1.$

Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{-\ln(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'}{\left(-\ln(x-1)\right)'} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}} =$

$$= \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x-1} = \infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]'}{[e^x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Μορφή $0 \cdot \infty$.

Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, τότε

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{[g(x)]'}{[\frac{1}{f(x)}]'}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Μορφή $\infty - \infty$.

Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ και ζητείται να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, τότε μετασχηματίζουμε την παράσταση $f(x) - g(x)$ ως εξής:

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)\cdot g(x)}\cdot f(x)\cdot g(x) = \frac{\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)\cdot f(x)}}$$

Αλλος τρόπος είναι:

$$f(x) - g(x) = f(x)\Big[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\Big],\ \text{αν}\ \frac{g(x)}{f(x)} \to a \neq 1$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}},\ \text{αν}\ \frac{g(x)}{f(x)} \to 1$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\Big) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[e^x - 1 - x]'}{[x(e^x - 1)]'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty}\Big(1 - \dfrac{\ln x}{x}\Big)x = L$ και

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \Longrightarrow L = (1-0)\cdot\infty = \infty.$

Μορφές $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$**.**

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(\sin x)}$ και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\sin x)]'}{[\frac{1}{x}]'} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\frac{-\sin x}{x}} = 0\end{aligned}$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(\sin x)} = e^0 = 1.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ και

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(1+x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0.$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^0 = 1.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^L$, όπου

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x - \ln x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} = -\frac{1}{3}$$

1.3 Τύπος του Taylor.

Πολυώνυμο βαθμού n ως προς x είναι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \text{ οπου } a_n \neq 0.$$

Το πλεονεκτήμα των πολυωνύμων είναι ότι οι τιμές τους βρίσκονται εύκολα με πεπερασμένο πλήθος πολλαπλασιασμών και προσθέσεων.

Όταν η διαφορά των τιμών μιας συνάρτησης από τις τιμές ενός πολυωνύμου είναι ελάχιστη, μπορούμε, για πρακτικούς λόγους, να χρησιμοποιήσουμε το πολυώνυμο για να υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης. Για τον λόγο αυτό είναι σημαντική η επίλυση του προβλήματος της προσέγγισης μιας συνάρτησης με ένα πολυώνυμο.

Παραγωγίζοντας διαδοχικά το πολυώνυμο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \Longrightarrow a_0 = p(0)\\
p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} \Longrightarrow a_1 = p'(0)\\
p''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3x + ... + (n-1)n a_n x^{n-2} \Longrightarrow a_2 = \frac{p''(0)}{2}\\
\dots\dots &\dots\dots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p^{(n)}(x) &= n!\, a_n \Longrightarrow a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$$

τότε

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Πόρισμα 1.3.1. *Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και στο $x_0 \in \Delta$ υπάρχουν παράγωγοι $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$. Τότε το πολυώνυμο*

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο με τις ιδιότητες:

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0), ...,\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Ορισμός 1.3.2. Το πολυώνυμο p_n καλείται *πολυώνυμο Taylor n-τάξης της f στη περιοχή του σημείου x_0.*

Για $x_0 = 0$ παίρνουμε το *πολυώνυμο Maclaurin*:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

της f, εφόσον $x_0 = 0 \in \Delta$ στο Πόρισμα 1.3.1.

Θεώρημα 1.3.3. *(**Taylor**) Αν η συνάρτηση f έχει παράγωγο $f^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε για οποιαδήποτε διαφορετικά $x, x_0 \in \Delta$, υπάρχει c μεταξύ των x και x_0, $x \neq c \neq x_0$, τέτοιο ώστε*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{1.8}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x_0 < x$ (για $x_0 > x$ η απόδειξη είναι όμοια).

Θεωρούμε της συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} k(t) &= f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n,\ t \in [x_0, x] \quad (1.9) \\ g(t) &= (x - t)^{n+1},\ t \in [x_0, x] \end{aligned}$$

Επειδή η $f^{(n+1)}$ υπάρχει στο $[x_0, x] \subseteq \Delta$, η $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[x_0, x]$.

Οι συναρτήσεις k και g από τον ορισμό τους είναι συνεχείς στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμες στο (x_0, x). Έχουμε

$$k'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \text{ και } g'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Επομένως $g'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (x_0, x)$. Από το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $c \in (x_0, x)$ για το οποίο

$$\frac{k'(c)}{g'(c)} = \frac{k(x) - k(x_0)}{g(x) - g(x_0)}. \tag{1.10}$$

Οπότε ο τύπος (1.10) γράφεται

$$\frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} = \frac{f(x) - k(x_0)}{-(x-x_0)^{n+1}}.$$

Επομένως

$$f(x) = k(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Αντικαθιστώντας το $k(x_0)$ από την ισότητα (1.9) στην τελευταία ισότητα παίρνουμε τον τύπο (1.8).

□

Ορισμός 1.3.4. Ο τύπος (1.8) καλείται *Τύπος του Taylor* της f στη περιοχή του x_0. Η συνάρτηση

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(όπου c_x ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα x και x_0) καλείται *υπόλοιπο (κατά Lagrange) για το πολυωνύμο Taylor της f τάξης n κέντρου x_0.*

Ο τύπος του Taylor (1.8) γράφεται $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, όπου p_n είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n. Ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο $R_n(x)$ γράφεται:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Θα εξετάσουμε το σφάλμα $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ της προσεγγίσης της συνάρτησης f με το πολυώνυμο του Taylor p_n.

Ας υποθέσουμε ότι επιπλέον των προυποθέσεων του Θεωρήματος Taylor η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ. Τότε η συνάρτηση $f^{(n+1)}$ ειναι φραγμένη στο κλειστό διάστημα με άκρα τα σημεία x και x_0. Συνεπώς

$$\lim_{x \to x_0} R_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0.$$

Για $x_0 = 0$ στον τύπο του Taylor παίρνουμε τον *τύπο του Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \text{ όπου } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Οταν το σφάλμα $R_n(x)$ είναι αρκετά μικρό, μπορούμε να το παραλείψουμε στον τύπο του Taylor και να πάρουμε τον προσεγγιστικό τύπο

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

ή, από τον τύπο του Maclaurin

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Παραδείγματα 1.3.5.

1. Θα βρούμε το πολυώνυμο Taylor n-τάξης της $f(x) = e^x$ στο $x_0 = 0$.

   Επειδή, $f'(x) = e^x, ..., f^{(n)}(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

   $$p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

2. Από τον προσεγγιστικό τύπο $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ για $x = 1$ παίρνουμε

   $$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

1.4 Ασκήσεις.

Θεωρήματα Μέσης Τιμής.

1.4.1. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - x\sin x - \cos x = 0$ έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες.

1.4.2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.

1.4.3. Να αποδειχθεί ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$, τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_c \in (a, b)$ για το οποίο $cf(x_c) + f'(x_c) = 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle στην $g(x) = e^{cx} f(x)$.

1.4.4. Αν υπάρχει f'' στο $[0, a]$ και $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $f(a) = \frac{a^2 f''(c)}{2}$, όπου $c \in (0, a)$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle στην $F(x) = f(x) - \frac{x^2}{a^2} f(a)$.

1.4.5. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, τότε $f'_+(a) = A$ (αντίστοιχα, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = B \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'_-(b) = B$).

Λύση. Αν $x \in (a, b)$, τότε $[a, x] \subseteq [a, b]$. Επομένως η f είναι συνεχής $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x). Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $c_x \in (a, x)$ για το οποίο $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Άρα, $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} f'(c_x) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A$.

1.4.6. Να βρεθούν $f'_+(-1)$ και $f'_-(1)$ για την $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την πρόταση της προηγούμενης άσκησης.

1.4.7. Δείξτε ότι $\dfrac{a}{1 + a} < \ln(1 + a) < a$ για κάθε $a \in (0, \infty)$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ. στην $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in [0, a]$.

1.4.8. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει δεύτερη παράγωγο f'' στο (a, b). Δείξτε ότι: αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$, τότε $f''(\xi) < 0$ για τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$.

Απροσδιόριστες μορφές

1.4.9. Βρείτε τα όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$, (β′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$, (γ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$, (δ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$, (στ′) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln x\cdot\ln(1+x)]$, (η′) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}+x\right)$.

Απαντήσεις:(α′) $\ln 2$, (β′) $\frac{3}{5}$, (γ′) $\frac{\ln 8-\ln 7}{\ln 6-\ln 5}$, (δ′) $\ln\frac{5}{4}$, (ε′) 0, (στ′) 0, (η′) -1.

1.4.10. Δείξτε ότι

(α′) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$

(β′) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

(γ′) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^p\ln x=\begin{cases}0 & \text{αν }, p>0\\ -\infty & \text{αν } p\le 0.\end{cases}$

(δ′) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,\ a\in\mathbb{R}$

(ε′) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$

(στ′) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$, για κάθε $n=1,2,\dots.$

(ζ′) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x(\ln x)^n]=0$ για κάθε $n=1,2,\dots.$

(η′) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Τύπος του Taylor.

1.4.11. Να γραφεί το πολυώνυμο Taylor 3-τάξης για την συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x-1}$ στο $x_0=2$.

1.4.12. Να γραφεί το πολυώνυμο Maclaurin n-τάξης των συναρτήσεων:

$$a^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ xe^x$$

1.4.13. Να γραφεί το πολυώνυμο Taylor n-τάξης για την συνάρτηση f στο x_0:

(α′) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = -1.$

(β′) $f(x) = x^3 \ln x,\ x_0 = 1$

(γ′) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4.$

1.4.14. Να γραφεί το πολυώνυμο Maclaurin 2ης τάξης της συνάρτησης f και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = p_2(x)$:

(α′) $f(x) = \arcsin x.$

(β′) $f(x) = \tan x.$

Κεφάλαιο 2

Μελέτη συναρτήσεων

Το Κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη μελέτη με την βοήθεια παραγώγων των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.

2.1 Διαστήματα μονοτονίας

Ορισμός 2.1.1. Έστω $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$.

- Η f λέγεται *αύξουσα (γνησίως αύξουσα)* στο S αν για κάθε $x, y \in S$ με $x < y$ ισχύει $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
- Η f λέγεται *φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα)* στο S αν για κάθε $x, y \in S$ με $x < y$ ισχύει $f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
- Η f λέγεται *μονότονη* στο S αν είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα στο S και *γνησίως μονότονη* στο S αν είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο S.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

Η f είναι σταθερή στο Δ αν και μόνον αν $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Απόδειξη. Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε σε κάθε x_0 στο εσωτερικό του Δ ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει: $f'(x) = 0$.
Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), σύμφωνα με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής 1.1.3:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2),$$

όπου $c \in (x_1, x_2)$ και, άρα, c είναι εσωτερικό σημείο του Δ. Από την υπόθεση $f'(c) = 0$. Επομένως $f(x_1) = f(x_2)$ και, συνεπώς ή f είναι σταθερή στο Δ.

□

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

(i) Η f είναι αύξουσα στο $\Delta \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

(ii) Η f είναι φθίνουσα στο $\Delta \Longleftrightarrow f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο Δ και x είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του Δ. Τότε για κάθε $h > 0$ τέτοιο ώστε $x + h \in \Delta$ ισχύει $f(x + h) \geq f(x)$. Επομένως

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Άρα,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Αντιστρόφως, έστω ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.
Θεωρούμε $x', x'' \in \Delta$ τέτοια ώστε $x' < x''$. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής 1.1.3 υπάρχει $\xi \in (x', x'')$ τέτοιο ώστε

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x').$$

Επειδή $f'(\xi) \geq 0$ και $x'' - x' > 0$, προκύπτει ότι $f(x'') - f(x') \geq 0$.
Άρα, $f(x') \leq f(x'')$. Συνεπώς η f είναι αύξουσα στο Δ

(ii) Αποδεικνύεται όμοια με την πρόταση (i).

□

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

Η f είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) στο Δ αν και μόνον αν

(i) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) για κάθε x στο εσωτερικό του Δ και

(ii) σε κάθε υποδιάστημα του Δ υπάρχει x τέτοιο ώστε $f'(x) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Τότε

(*i*) η f είναι αύξουσα στο Δ, άρα $f'(x) \geq 0$ από το προηγούμενο θεώρημα.

(*ii*) Αν Δ' είναι ένα υποδιάστημα του Δ και $x', x'' \in \Delta'$ με $x' < x''$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x', x'')$, τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα $f(x'') > f(x')$, άρα $f'(\xi) > 0$. Άρα, $\xi \in \Delta'$ και $f'(\xi) \neq 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f ικανοποιεί την (*i*) και (*ii*).

Θεωρούμε $x', x'' \in \Delta$ τέτοια ώστε $x' < x''$. Από την (*i*) και το προηγούμενο θεώρημα η f είναι αύξουσα στο Δ. Συνεπώς για κάθε $x \in [x', x'']$ ισχύει: $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$.

Αν $f(x') = f(x'')$, τότε $f(x') = f(x) = f(x'')$ για κάθε $x \in [x', x'']$. Επομένως $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (x', x'')$, που δεν συμφωνεί με την (*ii*).

Άρα, $f(x') < f(x'')$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

□

Πόρισμα 2.1.5. *Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

(i) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

(ii) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Παράδειγμα 2.1.6.

Θα βρούμε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = x\sqrt{x} + 3x$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $[0, \infty)$.

Έχουμε $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + 3 > 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$. Συνεπώς $f(0) = 0$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

2.2 Ακρότατα

Ορισμός 2.2.1. Έστω $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f έχει *τοπικό μέγιστο* $f(x_0)$ στο σημείο $x_0 \in S$ αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq S$ και $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

- Η συνάρτηση f έχει *τοπικό ελάχιστο* $f(x_0)$ στο σημείο $x_0 \in S$ αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq S$ και $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

- Η συνάρτηση f έχει *ακρότατο* $f(x_0)$ στο x_0 αν η f έχει στο x_0 ή τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

- Η συνάρτηση f έχει *απόλυτο μέγιστο (ελάχιστο)* $f(x_0)$ στο $x_0 \in S$ αν για κάθε $x \in S$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Παρατήρηση 2.2.2. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει ακρότατα μόνο στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, δηλαδή σε σημεία x_0 που περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού της f μαζί με ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και έχει απόλυτο μέγιστο στο $x_0 \in (a, b)$, τότε ή f έχει και τοπικό μέγιστο στο x_0 . Όμως η f μπορεί να έχει απόλυτο μέγιστο και σε ένα από τα άκρα a ή b. Συνεπώς, αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο καθένα από τα σημεία $x_1, ..., x_n \in (a, b)$, τότε το απόλυτο μέγιστο της f στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός $\max\{f(a), f(x_1), ..., f(x_n), f(b)\}$.

Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και έχει έχει τοπικό ελάχιστο στο καθένα από τα σημεία $x_1, ..., x_n \in (a, b)$, τότε το απόλυτο ελάχιστο της f στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός $\min\{f(a), f(x_1), ..., f(x_n), f(b)\}$.

Θεώρημα 2.2.3. *Αν μια συνάρτηση f έχει ακρότατο στο σημείο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω η f έχει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$. Άρα, η $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από το Θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι $f'(x_0) = 0$.

Το θεώρημα αποδεικνύεται όμοια αν η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

□

Ορισμός 2.2.4. Ένα σημείο x_0 καλείται *κρίσιμο σημείο* της συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$ όταν

(i) υπάρχει $\delta > 0$ για το οποίο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq S$ και

(ii) ή $f'(x_0) = 0$ ή στο x_0 η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Πόρισμα 2.2.5. *Αν μια συνάρτηση f έχει ακρότατο στο x_0, τότε x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f.*

Παρατήρηση 2.2.5. Τα σημεία στα οποία η f έχει ακρότατα αναζητούμε ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της f.

Παραδείγματα 2.2.6.

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-3)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

   Λύση: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

   $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-3) + x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$, αν $x \neq 0$.

   $f'_{-}(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}(x-3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x}} = \infty$

   $f'(x) = 0 \iff x = \frac{6}{5}$.

   Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι $x = 0$ και $x = \frac{6}{5}$.

   $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{6}{5}, \infty)$ και $f'(x) < 0 \iff x \in (0, \frac{6}{5})$.

   Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[\frac{6}{5}, \infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{6}{5}]$.

   Συνεπώς η f έχει τοπικό μέγιστο $f(0) = 0$ και τοπικό ελάχιστο $f(\frac{6}{5}) = -\frac{9}{5}\sqrt[3]{\frac{36}{25}}$.

2. Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

   Λύση: Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

   $x > 0 \implies f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \implies$ η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(0, \infty) \implies$ η f δεν έχει ακρότατα στο $(0, \infty)$.

   $x < 0 \implies f'(x) = (\sqrt{-x})' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} < 0 \implies$ η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-\infty, 0) \implies$ δεν έχει ακρότατα στο $(-\infty, 0)$.

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty \Longrightarrow$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

Επειδή η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αύξουσα στο $[0,\infty)$, το τοπικό ελάχιστο είναι το $f(0) = 0$.

Παρατηρήσεις 2.2.7.

1. Από την ισότητα $f'(x_0) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $f(x_0)$ είναι ακρότατο.

   Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\infty)$ και, συνεπώς, δεν έχει ακρότατα. Όμως $f'(0) = 0$.

2. Η μη ύπαρξη της $f'(x_0)$ δεν συνεπάγεται ότι το $f(x_0)$ είναι ακρότατο.

   Για παράδειγμα η $f(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\infty)$ και, συνεπώς, δεν έχει ακρότατα. Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ αφού

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty$$

3. Η ύπαρξη ακρότατου στο σημείο x_0 δεν συνεπάγεται ότι $f'(x_0) = 0$, αφού η f μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

   Για παράδειγμα αν $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, τότε $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ για $x \neq 0$.

   Επειδή $f'(x) < 0 = f(0)$ στο $(-\infty, 0)$ και $f'(x) > 0 = f(0)$ στο $(0,\infty)$ το σημείο $(0, f(0))$ είναι ακρότατο της f.

   Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ αφού

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \infty$$

4. Απαραίτητη προϋπόθεση για να μιλάμε για ακρότατο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 είναι η f να ορίζεται σε ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ γύρω από το x_0.

   Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x} + 3x$, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[0,\infty)$, παίρνει την ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 0$. Παρατηρούμε ότι $f'_+(0) = 3$.

Θεώρημα 2.2.8. *Έστω η f είναι συνεχής στο x_0 και παραγωγίσιμη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$.*

(*i*) *Αν $f'(x) > 0$ στο $(x_0-\delta, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, x_0+\delta)$, τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.*

(*ii*) *Αν $f'(x) < 0$ στο $(x_0-\delta, x_0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x_0, x_0+\delta)$, τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.*

(*iii*) *Αν η f' διατηρεί το πρόσημο στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, τότε $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f.*

Απόδειξη. (*i*) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, x_0+\delta)$. Άρα, $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, δηλαδή η f στο x_0 έχει τοπικό μέγιστο.

(*ii*) Αποδεικνύεται όμοια με την πρόταση (*i*).

(*iii*) Έστω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$.

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο καθένα από τα διαστήματα $(x_0-\delta, x_0]$ και $[x_0, x_0+\delta)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1 \in (x_0-\varepsilon, x_0) \subseteq (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ και $x_2 \in (x_0, x_0+\varepsilon) \subseteq (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Συνεπώς $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f.

□

Παρατήρηση 2.2.9. Το προηγούμενο θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η πρώτη παράγωγος f' να διατηρεί το πρόσημο και στο $(x_0-\delta, x_0)$ και στο $(x_0, x_0+\delta)$, όπως φαίνεται από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παραδείγματα 2.2.10.

1. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$

   τότε $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f' να διατηρεί το πρόσημο και στο $(-\delta, 0)$ και στο $(0, \delta)$. Επειδή σε κάθε $(-\delta, \delta)$ η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, $f(0)$ δεν είναι ακρότατο της f.

2. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2(1+\sin\frac{1}{x}), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$

   τότε $f(x) \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \neq 0$, συνεπώς $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

   Αν και $f'(0) = 0$, δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f' να διατηρεί το πρόσημο στο $(-\delta, 0)$ ή στο $(0, \delta)$.

Πρόταση 2.2.11. *Αν υπάρχει $\delta > 0$ για το οποίο η παράσταση $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ διατηρεί το πρόσημο στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$. Τότε $f(x)-f(x_0) > 0$ αν $x - x_0 > 0$ και $f(x) - f(x_0) < 0$ αν $x - x_0 < 0$.

Άρα $f(x) > f(x_0)$ αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$ και $f(x) < f(x_0)$ αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Συνεπώς $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f.

Η πρόταση αποδεικνύεται όμοια στην περίπτωση που $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.

□

Θεώρημα 2.2.12. *Έστω η f έχει συνεχή την n-τάξης παράγωγο $f^{(n)}$, $n \geq 2$, στο διάστημα $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ και*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \textit{ενώ } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(i) Αν n είναι άρτιος, τότε $f(x_0)$ είναι ακρότατο, επιπλέον
αν $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο,
αν $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

(ii) Αν n είναι περιττός, τότε $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο.

Απόδειξη. Αν $f^{(n)}$, $n \geq 2$, είναι συνεχής στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε στο διάστημα $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ η συνάρτηση $f^{(n)}$ να έχει το πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$.

Έστω $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$. Από το Θεώρημα του Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

όπου c είναι μεταξύ x και x_0. Αν $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, τότε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

όπου $f^{(n)}(c)$ έχει το πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$, αφού $c \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

(i) Αν n είναι άρτιος, τότε $(x - x_0)^n > 0$. Οπότε η παράσταση $f(x) - f(x_0)$ έχει το πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$.

Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε $f(x) - f(x_0) > 0$, δηλαδή $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$. Συνεπώς στο x_0 η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(ii) Αν n είναι περιττός, τότε $(x-x_0)^{n-1} > 0$ για κάθε $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\setminus\{x_0\}$.

Επειδή $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n-1}$, η παράσταση $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ έχει σταθερό πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Άρα, $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο.

$\square$

Παραδείγματα 2.2.13.

1. Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ έχει τοπικό ελάχιστο στο 0.

   Λύση:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - e^{-x} - 2\sin x \Longrightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x \Longrightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2\sin x \Longrightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 4 > 0 \end{aligned}$$

   Άρα η f έχει στο 0 τοπικό ελάχιστο.

2. Να βρεθούν τα σημεία του $[0, 2\pi]$ στα οποία η $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ έχει ακρότατα.

   Λύση: $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x =$

   $= 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = \dfrac{3}{2}\ \sin 2x(\sin x - \cos x)$

   $f'(x) = 0$ και $x \in [0, 2\pi] \iff \sin x = 0$ ή $\cos x = 0$ ή $\tan x = 1$ και $x \in [0, 2\pi] \iff x = 0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$.

   $f''(x) = 6\sin x \cos x(\cos x + \sin x) - 3(\sin^3 x + \cos^3 x)$

   $f''(0) = -3,\ f''(\pi) = 3,\ f''(2\pi) = -3,\ f''(\dfrac{\pi}{2}) = -3,\ f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 3$

   Αν $x = \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = \dfrac{5\pi}{4}$, τότε $\sin x = \cos x$, οπότε $f''(x) = 6\sin^3 x$.

   Άρα $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ και $f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) < 0$.

   Συνεπώς f έχει τοπικά μέγιστα στα σημεία $0, \dfrac{\pi}{2}, 2\pi, \dfrac{5\pi}{4}$ και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $\dfrac{\pi}{4}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$.

2.3 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Έστω Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.

Γεωμετρικός ορισμός. Μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά κυρτή (αντίστοιχα, κοίλη) στο Δ, όταν για κάθε $a, b \in \Delta$ η καμπύλη $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, βρίσκεται κάτω (αντίστοιχα, πάνω) από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα σημεία $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$ της καμπύλης $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ έχει εξίσωση

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ x \in [a, b].$$

Η καμπύλη $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, βρίσκεται κάτω από το AB όταν για κάθε $M = (x_0, y_0) \in AB$ με $x_0 \in (a, b)$ ισχύει $f(x_0) < y_0$. Επειδή $(x_0, y_0) \in AB$, ισχύει

$$y_0 = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{a - b}(x_0 - a)$$

Άρα, το γεγονός ότι η καμπύλη $y = f(x)$ που ενώνει τα σημεία A και B στο (a, b) βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα AB εκφράζεται με την ανισότητα:

$$f(x_0) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a),\ x_0 \in (a, b)$$

Ορισμός 2.3.1. Μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ καλείται *κυρτή* (*αυστηρά κυρτή*) στο διάστημα Δ αν για οποιαδήποτε $a, x_0, b \in \Delta$ τέτοια ώστε $a < x_0 < b$ ισχύει:

$$f(x_0) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a) \quad \left(f(x_0) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a) \right)$$

Ορισμός 2.3.2. Μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ καλείται *κοίλη* (*αυστηρά κοίλη*) στο διάστημα Δ αν για οποιαδήποτε $a, x_0, b \in \Delta$ τέτοια ώστε $a < x_0 < b$ ισχύει:

$$f(x_0) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a) \quad \left(f(x_0) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a) \right)$$

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.3. *Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα Δ, τότε η f είναι κυρτή (κοίλη) σε κάθε υποδιάστημα του Δ.*

Θεώρημα 2.3.4. *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και κυρτή (κοίλη) στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\Delta = (c, d]$. Το θεώρημα αποδεικνύεται όμοια σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Επειδή η f είναι κυρτή στο εσωτερικό (c, d) του Δ για οποιαδήποτε $a, x_0, b \in (c, d)$ με $a < x_0 < b$ έχουμε

$$f(x_0) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a),\ x_0 \in (a, b). \tag{2.1}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η ανισότητα (2.1) ισχύει και για $b = d$. Πράγματι, επειδή η f είναι συνεχής στο d, έπεται ότι $\lim\limits_{b \to d} f(b) = f(d)$. Όμως η (2.1) ισχύει για κάθε $b \in (x_0, d)$, επομένως

$$f(x_0) \leq f(a) + \lim_{b \to d} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x_0 - a) = f(a) + \frac{f(d) - f(a)}{d - a}\,(x_0 - a).$$

□

Σημείωση 2.3.5. Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάσημα Δ και $a, x_0, b \in \Delta$ με $a < x < b$. Η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$ μπορεί να γραφεί με δύο τρόπους:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \text{ και } y = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),\ x \in [a, b]$$

Επομένως το γεγονός ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ δεν μπορεί να βρίσκεται πάνω από το AB λόγω κυρτότητας της f μπορεί να γραφεί με δύο τρόπους:

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) \qquad (2.2)\\ f(x_0) &\leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - b) \end{aligned}$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν στην περίπτωση που η f είναι κοίλη στο Δ.

Θεώρημα 2.3.6. *Μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ αν και μόνον αν για κάθε $x_0 \in \Delta$ η συνάρτηση $k_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $\Delta \setminus \{x_0\}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ και $a, b \in \Delta$ με $a < b$.

Αν $a < x_0 < b$, τότε, επειδή $x_0 - x > 0$ και $x_0 - b < 0$, από τις σχέσεις (2.2) παίρνουμε

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}. \qquad (2.3)$$

Άρα, $k_{x_0}(a) = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = k_{x_0}(b)$

Αν $x_0 < a < b$, τότε από την κυρτότητα της f στο $[x_0, b]$ παίρνουμε

$$f(a) \leq f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(a - x_0).$$

Επομένως $k_{x_0}(a) = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = k_{x_0}(b)$.

Αν $a < b < x_0$, τότε από την κυρτότητα της f στο $[a, x_0]$ παίρνουμε

$$f(b) \leq f(x_0) + \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(b - x_0).$$

Επειδή $b - x_0 < 0$, παίρνουμε $k_{x_0}(a) = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = k_{x_0}(b)$.

Έστω, αντίστροφα η η k_{x_0} είναι άυξουσα στο $\Delta \setminus \{x_0\}$ για κάθε $x_0 \in \Delta$. Τότε για οποιαδήποτε $a, x_0, b \in \Delta$ τέτοια ώστε $a < x_0 < b$ έχουμε

$$k_a(x_0) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq k_a(b)$$

Επομένως $f(x_0) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a)$. Άρα, η f είναι κυρτή στο Δ.

□

Θεώρημα 2.3.7. *Αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα Δ και x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, τότε*

(i) υπάρχουν πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)$,

(ii) η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. *(i)* Έστω $x_1 < x_0 < x_2$, όπου $x_1, x_2 \in \Delta$. Επειδή η f είναι κυρτή στο Δ η συνάρτηση $k_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι άυξουσα στο $\Delta \setminus \{x_0\}$. Επομένως για $x_1 < x < x_2$ έχουμε

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Επειδή στο διάστημα (x_1, x_0) η k_{x_0} είναι άυξουσα και άνω φραγμένη από τον αριθμό $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$, έπεται ότι η k_{x_0} έχει φραγμένο όριο όταν $x \to x_0^-$. Άρα, $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$.

Στο διάστημα (x_0, x_2) η k_{x_0} είναι άυξουσα και κάτω φραγμένη από τον αριθμό $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως η συνάρτηση $F(t) = k_{x_0}(-t)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο $(-x_2, -x_0)$ από τον ίδιο αριθμό. Άρα, η F έχει φραγμένο όριο όταν $t \to -x_0^-$. Άρα,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{x=-t}{=} \lim_{t \to -x_0^-} \frac{f(-t) - f(x_0)}{-t - x_0} = \lim_{t \to -x_0^-} F(t) \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έχουμε $f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$.

Επειδή $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ και $\lim_{x \to x_0^-}(x - x_0) = 0$, έπεται ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Όμοια, επειδή $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$, έπεται ότι $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0.

□

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.*

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(*i*) *f κυρτή (αντίστοιχα, κοίλη) στο Δ.*

(*ii*) *f' είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) στο εσωτερικό του Δ.*

(*iii*) *Αν x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:*

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ (\textit{αντίστοιχα, } f(x) &\leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \end{aligned}$$

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Έστω x_1, x_2 εσωτερικά σημεία του Δ και $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι κυρτή στο Δ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ και } f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

Επειδή $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \Longrightarrow$$

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(x_2)$$

Συνεπώς $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, δηλαδή η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και $x \in \Delta$ με $x < x_0$ (στην περίπτωση που $x > x_0$ η πρόταση αποδεικνύεται όμοια).

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ.

Επειδή από την υπόθεση η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ και $\xi < x_0$, ισχύει $f'(\xi) \leq f'(x_0)$. Άρα

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Έστω $[a,b] \subseteq \Delta$ και $x_0 \in (a,b)$. Από την υπόθεση

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \text{ και} \\ f(b) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) \end{aligned}$$

Άρα, $\dfrac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq f'(x_0) \leq \dfrac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$.

Επομένως $\dfrac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \dfrac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$.

Επειδή $a - x_0 < 0$ και $b - x_0 > 0$ παίρνουμε :

$$[f(a) - f(x_0)](b - x_0) \geq [f(b) - f(x_0)](a - x_0).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(x_0)(b-a) &\leq f(a)(b - x_0) + f(b)(x_0 - a) = \\ &= f(a)(b - x_0) + f(b)(x_0 - a) + f(a)(x_0 - a) - f(a)(x_0 - a) = \\ &= f(a)(b-a) + [f(b) - f(a)](x_0 - a) \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f(x_0) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)$. Άρα, η f είναι κυρτή στο Δ.

$\square$

Παρατήρηση 2.3.9. Η γεωμετρική ερμηνεία της ισοδυναμίας των συνθηκών (i) και (iii) του Θεωρήματος 2.3.8 είναι η εξής:

Η συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ αν και μόνον αν για κάθε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in \Delta$, ή βρίσκονται πάνω (κάτω) από την εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ ή ανήκουν στην εφαπτομένη.

Θεώρημα 2.3.10. *Έστω f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και έχει δεύτερη παράγωγο f'' στο εσωτερικό του Δ.*

(i) Η f είναι κυρτή στο Δ αν και μονον αν $f''(x) \geq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

(ii) Η f είναι κοίλη στο Δ αν και μονον αν $f''(x) \leq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Απόδειξη. (i) Η f είναι κυρτή στο Δ αν και μόνον αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ, δηλαδή αν και μόνον αν $f''(x) \geq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

(ii) Αποδεικνύεται όμοια.

$\square$

Παράδειγμα 2.3.11. Αν $f(x) = x^4$, τότε $f'(x) = 4x^3$ και $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$. Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $(-\infty, \infty)$.

2.4 Σημεία καμπής

Ορισμός 2.4.1. Έστω $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, και $x_0 \in S$.

Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ καλείται *σημείο καμπής* της f αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

(i) η f είναι συνεχής στο $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq S$ και

(ii) σε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ η f είναι κυρτή και στο άλλο κοίλη.

Θεώρημα 2.4.2. *Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f και η f στο x_0 έχει δεύτερη παράγωγο $f''(x_0)$, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η f' έχει ακρότατο στο x_0.

Από την ύπαρξη της $f''(x_0)$ έπεται ότι η f' υπάρχει σε κάποιο διάστημα $(x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon')$. Επειδή $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι υπάρχει $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ για το οποίο η f είναι κυρτή στο $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ και κοίλη στο $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Τότε η f' είναι αύξουσα στο $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ και φθίνουσα στο $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Θα δείξουμε ότι η f' είναι αύξουσα στο $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Πράγματι, έστω ότι $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Επειδή η f' είναι άυξουσα $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, συνεπάγεται ότι αν $x_1 < x < x_0$, τότε $f'(x_1) \leq f'(x)$. Επειδή υπάρχει $f''(x_0)$, η f' είναι συνεχής στο x_0. Επομένως, $f'(x_1) \leq \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$. Άρα, $f'(x_1) \leq f'(x_0)$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι η f' είναι φθίνουσα στο $[x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Επομένως, η f' εχει ακρότατο στο x_0. Από το Θεώρημα 2.2.3, $f''(x_0) = 0$.

$\square$

Πόρισμα 2.4.3. *Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, τότε*

(*i*) *υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι συνεχής στο $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq S$ και*

(*ii*) *ή $f''(x_0) = 0$ ή στο x_0 η f δεν έχει δεύτερη παράγωγο.*

Παρατήρηση 2.4.4. Από την ισότητα $f''(x_0) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπης.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^4$, τότε $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $(-\infty, \infty)$.

Άρα, η f δεν έχει σημεία καμπής. Από την άλλη μεριά $f''(0) = 0$.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω η f είναι συνεχής στο x_0 και έχει δεύτερη παράγωγο f'' στο $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$, τότε*

(*i*) *Αν σε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ ισχύει $f''(x) > 0$ και στο άλλο $f''(x) < 0$, τότε $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.*

(*ii*) *Αν $f''(x) > 0$ (αντίστοιχα, $f''(x) < 0$) για κάθε $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$, τότε $(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής.*

Απόδειξη. (*i*) Αν σε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ ισχύει $f''(x) > 0$ και στο άλλο $f''(x) < 0$, τότε σε ένα από τα διαστήματα η f είναι κυρτή και στο άλλο κοίλη, δηλάδη $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

(*ii*) Έστω $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$.

Ας υποθέσουμε ότι $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής, τότε υπάρχει $\varepsilon' < \varepsilon$ τέτοιο ώστε η f είναι κοίλη σε ένα από τα διασήματα $(x_0 - \varepsilon', x_0)$ ή $(x_0, x_0 + \varepsilon')$. Άρα, $f''(x) \leq 0$ σε ένα από τα διαστήματα $(x_0 - \varepsilon', x_0)$ ή $(x_0, x_0 + \varepsilon')$. Επομένως υπάρχει $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ τέτοιο ώστε $f''(x) \leq 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς $(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής.

□

Θεώρημα 2.4.6. *Αν μια συνάρτηση f έχει συνεχη την n-τάξης παράγωγο $f^{(n)}$, $n \geq 3$, στο διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ και*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ ενώ } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ τότε}$$

(i) αν n είναι περιττός, τότε $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής,

(ii) αν n είναι άρτιος, τότε $(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής.

Απόδειξη. Αν $f^{(n)}$, $n \geq 3$, είναι συνεχής στο $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε στο $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ η $f^{(n)}$ έχει σταθερό πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$.

Από το θεώρημα του Taylor, για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ισχύει

$$f''(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2},$$

όπου c είναι μεταξύ x και x_0.

Αν $f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, τότε

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}$$

όπου $f^{(n)}(c)$ έχει το πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$.

(i) Αν n είναι περιττός, τότε $(x - x_0)^{n-3} > 0$. Επειδή

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-3}$$

η παράσταση $\dfrac{f''(x)}{x - x_0}$ έχει σταθερό πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$. Άρα η f'' αλλάζει πρόσημο στο x_0.

Άρα, $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

(ii) Αν n είναι άρτιος, τότε $(x - x_0)^{n-2} > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Άρα η $f''(x)$ έχει σταθερό πρόσημο του $f^{(n)}(x_0)$ στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Άρα, $(x_0, f(x_0))$ δεν είναι σημείο καμπής.

$\square$

2.5 Ασύμπτωτες καμπύλης

Γεωμετρικός ορισμός.

Μια ευθεία d είναι ασύμπτωτη της καμπύλης $y = f(x)$ αν η απόσταση του σημείου $M = (x, f(x))$ της καμπύλης από την d τείνει στο μηδέν όταν το M διατρέχει την καμπύλη έτσι ώστε η απόστασή του από την αρχή των αξόνων να τείνει στο άπειρο.

Η απόσταση του σημείου $M = (x, f(x))$ από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ ισούται με $\sqrt{x^2 + f^2(x)}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt{x^2 + f^2(x)} \longrightarrow \infty \iff x \longrightarrow \pm\infty \text{ ή } f(x) \longrightarrow \pm\infty$$

Ορισμός 2.5.1.

- Η ευθεία $x = a$ καλείται κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to a^+$, αν $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.
- Η ευθεία $x = a$ καλείται κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to a^-$, αν $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.
- Η ευθεία $y = b$ καλείται οριζόντια ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to \infty$, αν $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.
- Η ευθεία $y = b$ καλείται οριζόντια ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to -\infty$, αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.
- Η ευθεία $d : y = ax + b$, $a \neq 0$, καλείται πλάγια ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to \infty$, αν $\lim\limits_{x \to \infty} \rho((x, f(x)), d) = 0$.
- Η ευθεία $d : y = ax + b$, $a \neq 0$, καλείται πλάγια ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to -\infty$, αν $\lim\limits_{x \to -\infty} \rho((x, f(x)), d) = 0$.

Θεώρημα 2.5.2. *Η ευθεία $d : y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης $y = f(x)$ όταν $x \to \infty$ αν και μόνον αν*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η ευθεία d είναι ασύμπτωτη της $y = f(x)$ όταν $x \to \infty$.

Η απόσταση του σημείου $(x, f(x))$ από την ευθεία $d : y = ax + b$ είναι

$$\frac{|ax - f(x) + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|ax - f(x) + b|}{\sqrt{a^2+1}} = 0$. Άρα, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0$.

Συνεπώς

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b + b] = b$$

και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax + ax}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{x} = a$$

Αντιστρόφως, έστω ότι $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] - \lim_{x\to\infty} b = b - b = 0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|ax - f(x) + b|}{\sqrt{a^2+1}} = 0$.

Άρα, η ευθεία d είναι ασύμπτωτη της καμπύλης $y = f(x)$.

□

Θεώρημα 2.5.3. *Η ευθεία $d : y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης $y = f(x)$ όταν $x \to -\infty$ αν και μόνον αν*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2.

□

2.6 Γραφική παράσταση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι το σύνολο:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in S\}$$

Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων και στο εσωτερικό του κάθε διαστήματος η f είναι συνεχής, τότε για τον πρόχειρο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της f χρειάζονται τα εξής στοιχεία:

(α′) το πεδίο ορισμού της f

(β′) τα ακρότατα και τα διαστήματα μονοτονίας

(γ′) τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής

(δ′) οι ασύμπτωτες

Μερικές φορές ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της f διευκολύνεται όταν έχουμε συμπληρωματικά στοιχεία για την Γ όπως: τα σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων, τα κέντρα συμμετρίας, οι άξονες συμμετρίας, περιοδικότητα της f κ.τ.λ..

Παραδείγματα 2.6.1.

Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

(α′) Η f ορίζεται στο $x \in \mathbb{R}$, όταν $x \neq 2$ και $\frac{x^3}{x-2} \geq 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $(-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

(β′) $f'(x) = (x-3)\sqrt{\dfrac{x}{(x-2)^3}}$, αν $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

$f'(x) = 0$ στο εσωτερικό σημείο $x = 3$ του πεδίου ορισμού.

$x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$,

$x \in (2, 3) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(2, 3]$,

$x \in (3, \infty) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[3, \infty)$.

Συνεπώς $f(3) = \sqrt{27}$ είναι τοπικό ελάχιστο της f και $f(0) = 0$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $(-\infty, 0]$.

(γ′) $f''(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^3}} \cdot \dfrac{3x}{(x-2)^3} > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(2, \infty)$ και δεν είναι κοίλη σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της. Συνεπώς η f δεν έχει σημεία καμπής.

(δ΄) <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες:</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x_0 \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \infty \Longrightarrow$$

$x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν $x \to 2^+$.

<u>Πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες:</u>

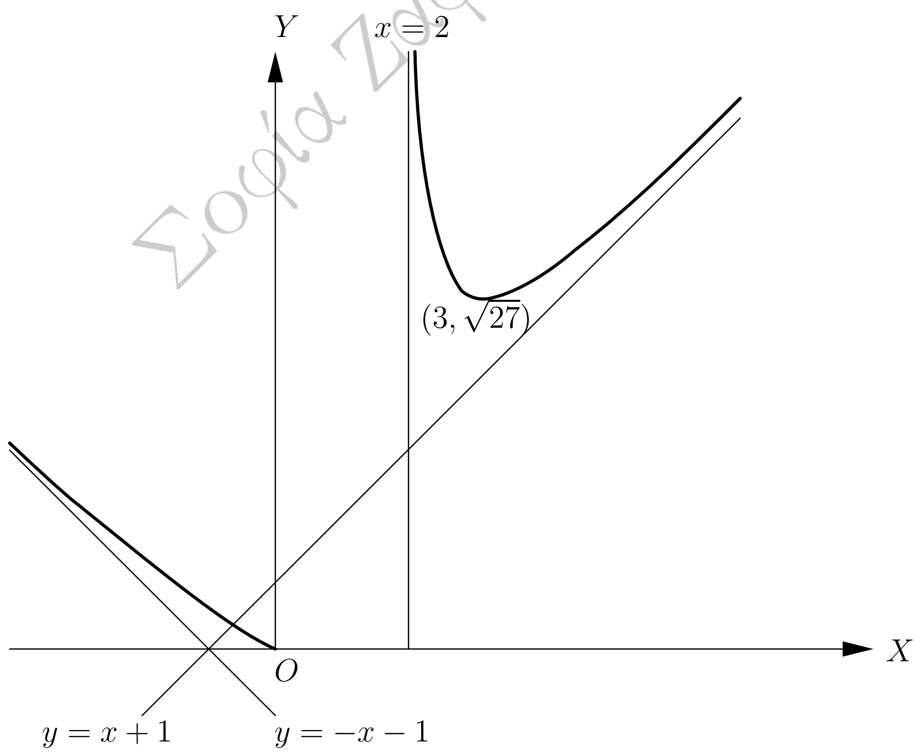
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1 = a$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{\frac{x}{x-2}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}(x-2)^2} = -1.$$

Άρα, η ευθεία $y = -x - 1$ είναι ασύμπτωτη, όταν $x \to -\infty$.

Όμοια βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη, όταν $x \to \infty$.



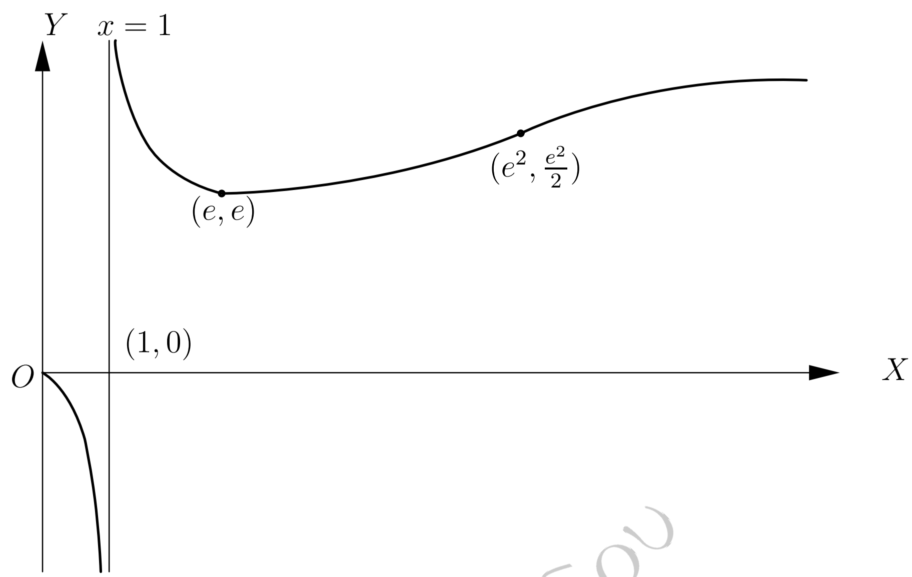
2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(α′) Η f ορίζεται στο $x \in \mathbb{R}$, όταν $x > 0$ και $\ln x \neq 0$.
Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι $(0,1) \cup (1,\infty)$.

(β′) $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
$f'(x) = 0$ στο εσωτερικό σημείο $x = e$ του πεδίου ορισμού.
$x < e \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και στο$(1,e]$.
$x > e \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[e,\infty)$
Συνεπώς $f(e) = e$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

(γ′) $f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
$f''(x) = 0$ στο εσωτερικό σημείο $x = e^2$ του πεδίου ορισμού.
$x \in (0,1) \cup (e^2 \infty) \Longrightarrow f''(x) < 0 \Longrightarrow$
η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(0,1)$ και (e^2,∞).
$x \in (1,e^2) \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ η f είναι κυρτή στο διάστημα $(1,e^2)$.
Συνεπώς το σημείο $(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{e^2}{2})$ είναι σημείο καμπής της f.

(δ′) <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες</u>:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x_0 \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty \Longrightarrow$
η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$
όταν $x \to 1^-$ και όταν $x \to 1^+$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \Longrightarrow$
$x = 0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$.
<u>Πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες</u>:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 = a$
$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty \Longrightarrow$
η f δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.



2.7 Ασκήσεις

Διαστήματα μονοτονίας

2.7.1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3$

(β′) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-a}}$

(γ′) $f(x) = x \ln^2 x$

Απαντήσεις:
(α′) φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$, αύξουσα στο $[3, \infty)$.
(β′) φθίνουσα στα $(-\infty, a)$ και (a, ∞).
(γ′) αύξουσα στα $(0, \frac{1}{e^2}]$ και $[1, \infty)$, φθίνουσα στο $[\frac{1}{e^2}, 1]$.

2.7.2. Να αποδειχθεί ότι

$$\left.\begin{array}{r} \log_a x, \quad a>1 \\[2ex] x^a, \quad a>0 \\[2ex] a^x, \quad a>1 \end{array}\right\} \text{ είναι αύξουσες γνησίως στο } (0,\infty).$$

$$\left.\begin{array}{r}\log_a x, \quad a<1\\[2ex] x^a, \quad a<0\\[2ex] a^x, \quad a<1\end{array}\right\} \text{ είναι γνησίως φθίνουσες στο } (0,\infty)$$

2.7.3. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\left\{\frac{e^n}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x}{x^x}$, $x \in [1,\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, για κάθε $x \in (1,\infty)$ ισχύει

$g'(x) = \left[\left(\frac{e}{x}\right)^x\right]' = \left[e^{x\ln\frac{e}{x}}\right]' = e^{x\ln\frac{e}{x}} \cdot \left[x\ln\frac{e}{x}\right]' = e^{x\ln\frac{e}{x}}(-\ln x) < 0$

Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,\infty)$

2.7.4. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα.

2.7.5. Να βρεθούν τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου $x^2+y^2=r^2$ των οποίων η απόσταση από το σημείο $(a,0)$, $a>0$, του άξονα Ox είναι η ελάχιστη.

Λύση: Η απόσταση του σημείου (x,y) από το $(a,0)$ είναι $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$. Αν (x,y) ανήκει στην περιφέρεια $x^2+y^2=r^2$, τότε $y^2=r^2-x^2$, οπότε η απόσταση του από το $(a,0)$ είναι $\sqrt{(x-a)^2+r^2-x^2}$. Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{(x-a)^2+r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$.

Αν $a>0$, τότε για κάθε $x\in(-r,r)$: $f'(x) = -\frac{a}{\sqrt{(x-a)^2+r^2-x^2}} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-r,r]$.

Συνεπώς η f παίρνει την ελάχιστη τιμή στο $x_0=r$.

2.7.6. Δείξτε ότι $e^x < \dfrac{1}{1-x}$ για $x\in(-\infty,1)\setminus\{0\}$.

Λύση: Για $x\in(-\infty,1)\setminus\{0\}$ η ανισότητα που ζητείται να αποδειχθεί ισοδυναμεί με την $e^x(1-x)<1$.

Θέτουμε $f(x)=e^x(1-x)$, τότε $f'(x)=-xe^x$.

Οπότε $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f'(x)<0$ για $x\in(0,1)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1)$.

Άρα $f(x)<f(0)$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\setminus\{0\}$, δηλαδή $e^x(1-x)<1$.

Ακρότατα

2.7.7. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

(β′) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

(γ′) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

Απαντήσεις:
(α′) τοπικό ελάχιστο $f(1) = -1$, τοπικό μέγιστο $f(0) = 0$,
(β′) τοπικά ελάχιστα $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ και $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -3$,
τοπικά μέγιστα $f(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = \frac{3}{2}$ και $f(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi) = \frac{3}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$
(γ′) τοπικά ελάχιστα $f(-1) = 0$ και $f(1) = 0$, τοπικό μέγιστο $f(0) = 1$.

2.7.8. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

(α′) $e^x \geq \frac{x^2}{4}$ $(x > 0)$.

(β′) $e^x \geq \left(\frac{e}{n}\right)^n x^n$ $(x > 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$.

(γ′) $e^x > 1 + x$ $(x \neq 0)$.

(δ′) $\ln x \leq x - 1$ $(x > 0)$.

(ε′) $x^p - px \leq 1 - p$ $(x \geq 0,\ 0 < p < 1)$.

2.7.9. Να βρεθεί η τιμή της θετικής σταθεράς p, για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^p e^{2p-x}$, $x \geq 0$, γίνεται ελάχιστη.

Λύση: Θέτουμε $f_p(x) = x^p e^{2p-x}$.
$f_p'(x) = px^{p-1}e^{2p-x} - x^p e^{2p-x} = x^{p-1}e^{2p-x}(p - x)$.
$f_p'(x) = 0$ και $x \in (0,\infty) \iff x = p$.

$$f_p'(x) \begin{cases} > 0 & \text{αν } x \in (0,p) \\ < 0 & \text{αν } x \in (p,\infty) \end{cases} \implies f_p(p) = (pe)^p \text{ είναι τοπικό μέγιστο της } f.$$

Επειδή $f_p(0) = 0 < (pe)^p$, $f_p(p) = (pe)^p$ είναι η μέγιστη τιμή της f.
Θέτουμε $\mu(p) = (pe)^p,\ p > 0$. Τότε $\mu'(p) = [e^{\ln(pe)^p}]' = e^{p\ln(pe)}[\ln(pe) + 1]$.
$\mu'(p) = 0 \iff \ln pe = -1 \iff pe = e^{-1} \iff p = e^{-2}$.

$$\mu'(p) \begin{cases} < 0 & \text{αν } 0 < p < e^{-2} \\ > 0 & \text{αν } p > e^{-2}. \end{cases}$$

Άρα στο $p = e^{-2}$ η μέγιστη τιμή $\mu(p)$ της f_p παίρνει την ελάχιστη τιμή.

2.7.10. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η ανισότητα $e^x \geq kx^2$ ισχύει για κάθε $x > 0$.

Απάντηση: $k = \frac{e^2}{4}$

2.7.11. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $k \in \mathbb{R}$, για την οποία η ανισότητα $e^x \geq kx^n$ ισχύει για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση: $e^x \geq kx^n,\ x > 0 \iff \frac{e^x}{x^n} \geq k,\ x > 0$.

Θέτουμε $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $x > 0$. Τότε $f_0(x) = e^x > 1 = e^0$ για $x > 0$.

Θέτουμε $k_0 = \inf\{f_0(x) : x > 0\} = 1$.

$$\text{Αν } n \neq 0 \Longrightarrow f_n'(x) = \frac{e^x x^{n-1}(x-n)}{x^{2n}} \Longrightarrow f_n'(x) \begin{cases} < 0 & \text{αν } x \in (0, n) \\ = 0 & \text{αν } x = n \\ > 0 & \text{αν } x \in (n, \infty). \end{cases}$$

Άρα, $f_n(n) = \frac{e^n}{n^n}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f_n.

Θέτουμε $k_n = \inf\{f_n(x) : x > 0\} = \frac{e^n}{n^n}$. Η ακολουθία $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{e^n}{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι θετική, γνησίως φθίνουσα και $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = 0$.

Συνεπώς $k = \inf\{k_n : n = 1, 2, ..\} = 0$.

2.7.12. Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = a\sin x + b\cos x$, $a^2 + b^2 \neq 0$, έχει ακρότατα στα σημεία στα οποία παίρνει τις τιμές $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

Λύση:. $f'(x) = a\cos x - b\sin x$, $f''(x) = -a\sin x - b\cos x = -f(x)$.

Αν $f(x_0) = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow (a\sin x_0 + b\cos x_0)^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow$
$-2ab\sin x_0\cos x_0 = a^2\sin^2 x_0 + b^2\cos^2 x_0 - a^2 - b^2$.

Από τα παραπάνω,

$$\begin{aligned} f'^2(x_0) &= a^2\cos x_0 + b^2\sin^2 x_0 - 2ab\sin x_0\cos x_0 = \\ &= a^2\cos x_0 + b^2\sin^2 x_0 + a^2\sin^2 x_0 + b^2\cos^2 x_0 - a^2 - b^2 = 0 \end{aligned}$$

Όμως $f''(x_0) = -f(x_0) = \pm\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Άρα, η f έχει ακρότατο στο x_0.

2.7.13. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ έχει ακρότατα και στα δύο σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Να προσδιοριστεί το είδος των ακροτάτων αυτών (τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο).

Απάντηση: Για $a = -\frac{2}{3}$ και $b = -\frac{1}{6}$ η f έχει τοπικό ελάχιστο $f(1)$ και τοπικό μέγιστο $f(2)$.

2.7.14. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a για την οποία η συνάρτηση $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ έχει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{3}$ και να προσδιοριστεί το είδος του ακροτάτου αυτού (τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο).

Απάντηση: Για $a = 2$ η f είχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

2.7.15. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \Delta$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει:

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

(αντίστοιχα, $f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$)

Λύση: Η f είναι κυρτή στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $a, x_0, b \in \Delta$ τέτοια ώστε $a < x_0 < b$ ισχύει: $f(x_0) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a)$.

Όμως $x_0 = b - \lambda(b-a) = \lambda a + (1-\lambda)b$, όπου $\lambda \in (0,1)$.

Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\lambda a + (1-\lambda)b - a) = \\ &= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \end{aligned}$$

2.7.16. Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα, κοίλη), τότε για κάθε $x, y \in \Delta$ ισχύει $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ (αντοίστοιχα, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$).

2.7.17. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

(α′) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leq \dfrac{x^n+y^n}{2}$, $x, y \in [0,\infty)$, $n = 2, 3, ...$

(β′) $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \dfrac{e^x+e^y}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) $\ln\dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{x\ln x + y\ln y}{x+y}$, $x, y \in (0,\infty)$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι είναι κυρτές οι συναρτήσεις: (α′) $f(x) = x^n$, (β′) $f(x) = e^x$, (γ′) $f(x) = x\ln x$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.

2.7.18. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ αν και μόνον αν για κάθε $a, x_0, b \in \Delta$ με $a < x_0 < b$ ισχύει:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} \geq 0 \ (\leq 0)$$

2.7.19. Να αποδειχθεί ότι αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (κοίλη) στο Δ και $x, y, z \in \Delta$ με $x < y < z$, τότε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \ \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\right).$$

2.7.20. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα Δ και $c, a, b, d \in \Delta$ με $c < a < b < d$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (a, b).

Λύση: Έστω $c < a < x < y < b < d$. Από την προηγούμενη άσκηση

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(d) - f(b)}{d - b}.$$

Για $L = \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(c)}{a-c}\right|, \left|\frac{f(d)-f(b)}{d-b}\right|\right\}$ και για κάθε $x, y \in (a, b)$ ισχύει

$$-L \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq L \Longleftrightarrow \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq L \Longleftrightarrow |f(y) - f(x)| \leq L|x - y|.$$

Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ έτσι ώστε, αν $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b).

Σημεία καμπής

2.7.21. Να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$

(β′) $f(x) = x^2 + 2\sin x$

(γ′) $f(x) = x^2 \ln x$

Απαντήσεις: (α′) $(0, 0)$, (β′) δεν υπάρχουν σημεία καμπής, (γ′) $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3})$.

Ασύμπτωτες καμπύλης

2.7.22. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπήλης $y = f(x)$ αν

(α′) $f(x) = x\ln(e + \frac{1}{x})$

(β′) $f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1$

(γ′) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Απαντήσεις: (α′) $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$. (β′) $x = 0$, $y = x + 3$. (γ′) $y = 0$.

Γραφική παράσταση καμπύλης

2.7.23. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

(α′) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, (β′) $f(x) = e^{-x^2}$, (γ′) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\dfrac{x}{a}$, $a > 0$,

(δ′) $f(x) = x + \sin x$, (ε′) $f(x) = x - \arctan 2x$, (στ′) $f(x) = \ln(e + \dfrac{1}{x})$

(ζ′) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

Απαντήσεις:

(α′) Ορισμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, φθίνουσα στο $[-5, -1)$, αύξουσα στα $(-\infty, -5]$ και $(-1, \infty)$, τοπικό μέγιστο $f(-5) = -13.5$, κοίλη στα $(-\infty, -1)$ και $(-1, 1)$, κυρτή στο $(1, \infty)$, $(1, 0)$ σημείο καμπής, ασύμπτωτες: $x = -1$ και $y = x - 5$.

(β′) Ορισμένη στο $(-\infty, \infty)$, αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, φθίνουσα στο $[0, \infty)$, τοπικό μέγιστο $f(0) = 1$, κοίλη στο $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, κυρτή στα $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ και $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, σημεία καμπής $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$, ασύμπτωτη: $y = 0$.

(γ′) Ορισμένη στο $(0, \infty)$, φθίνουσα στο $(0, \frac{a}{\sqrt{e}}]$, αύξουσα στο $[\frac{a}{\sqrt{e}}, \infty)$, τοπικό ελάχιστο $f(\frac{a}{\sqrt{e}}) = -\frac{a^2}{4e}$, κοίλη στο $(0, \frac{a}{\sqrt{e^3}})$, κυρτή στο $(\frac{a}{\sqrt{e^3}}, \infty)$, σημείο καμπής $(\frac{a}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3a^2}{4e^3})$, δεν έχει ασύμπτωτες.

(δ′) Ορισμένη στο $(-\infty, \infty)$, αύξουσα στο πεδίο ορισμού, δεν έχει ακρότατα, σημεία καμπής $(k\pi, k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$, σε κάθε σημείο καμπής η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x-άξονα, δεν έχει ασύμπτωτες, στα σημεία καμπής η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $y = x$.

(ε′) Ορισμένη στο $(-\infty, \infty)$, φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, αύξουσα στα $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2}, \infty)$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ τοπικό μέγιστο, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ τοπικό ελάχιστο, κοίλη στο $(-\infty, 0)$, κυρτή στο $(0, \infty)$, $(0, 0)$ σημείο καμπής, ασύμπτωτες: $y = x + \frac{\pi}{2}$ και $y = x - \frac{\pi}{2}$.

(στ′) Ορισμένη στο $(-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (0, \infty)$, φθίνουσα στα $(-\infty, -\frac{1}{e})$ και $(0, \infty)$, κοίλη στο $(-\infty, -\frac{1}{e})$, κυρτή στο $(0, \infty)$, ασύμπτωτες: $x = -\frac{1}{e}$, $x = 0$ και $y = 1$.

(ζ′) Ορισμένη στο $(-\infty, \infty)$, φθίνουσα στο πεδίο ορισμού, κοίλη στο $[0, 1]$, κυρτή στα $(-\infty, 0]$ και $[1, \infty)$, σημεία καμπής $(0, 1)$ και $(1, 0)$, ασύμπτωτη: $y = -x$.

Κεφάλαιο 3

Αόριστα ολοκληρώματα

3.1 Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος

Ορισμός 3.1.1. Έστω Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.
Μια συνάρτηση $F : \Delta \to \mathbb{R}$ καλείται *παράγουσα* της f στο Δ όταν

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα Δ. Μια συνάρτηση Φ είναι παράγουσα της f στο Δ αν και μόνον αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο*

$$\Phi(x) = F(x) + c \textit{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Απόδειξη. Επειδή F είναι παράγουσα της f στο Δ, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $F'(x) = f(x)$.

Αν Φ είναι παράγουσα της f στο Δ, τότε $f(x) = \Phi'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, $[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Η συνάρτηση $\Phi(x) - F(x)$ είναι συνεχής στο Δ ως παραγωγίσιμη. Από το Θεώρημα 2.1.2 υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\Phi(x) - F(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\Phi(x) = F(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε $\Phi'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η Φ είναι παράγουσα της f.

$\square$

Ορισμός 3.1.3. Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ καλείται *αόριστο ολοκλήρωμα* της f στο Δ.

Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\displaystyle\int f(x)dx$.

Πόρισμα 3.1.4. *Αν η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f, τότε*

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση 3.1.5. Το Θεώρημα 3.1.2 δεν ισχύει αν το διάστημα Δ αντικατασταθεί με ένωση διαστημάτων που δεν τέμνονται ανά δύο. Για παράδειγμα για τις συναρτήσεις

$$F(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,1] \\ \sin x + 7, & x \in [2,3] \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \sin x,\ x \in [0,1] \cup [2,3]$$

$$f(x) = \cos x,\ x \in [0,1] \cup [2,3].$$

Ενώ $F'(x) = f(x)$ και $\Phi'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1] \cup [2,3]$, η διαφορά $F - \Phi$ των συναρτήσεων F και Φ δεν είναι σταθερή, αφού

$$F(x) - \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 7, & x \in [2,3] \end{cases}$$

Στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε ότι (Θεώρημα 4.9.6).

Θεώρημα 3.1.6. *Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ του $\mathbb{R}$, τότε η f έχει παράγουσα στο Δ.*

Σημείωση 3.1.6. Στο κεφάλαιο αυτό κάθε υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα Δ, στο οποίο και αναζητούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της.

Σε πολλές περιπτώσεις το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ μιας συνεχούς συνάρτησης f αποτελείται από συναρτήσεις $F+c$ καμιά από τις οποίες δεν μπορεί να εκφραστεί ως αποτέλεσμα αριθμητικών πράξεων και συνθέσεων μεταξύ των στοιχειωδών συναρτήσεων: $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, a^x, x^a κ.τ.λ..

Αυτού του είδους είναι π.χ. τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \sqrt{x^3+1}\ dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \sqrt{\sin x},$$

$$\int \frac{e^x}{x^n}\ dx, \int \frac{\sin x}{x^n}\ dx, \int \frac{\cos x}{x^n}\ dx,\ n = 1, 2, ...$$

Στις περιπτώσεις αυτές οι μέθοδοι υπολογισμού των αόριστων ολοκληρωμάτων του κεφαλαίου αυτού δεν μπορούν να εφαρμοστούν.

3.2 Πίνακας ολοκληρωμάτων.

1. $\displaystyle\int 0 \cdot dx = c$

2. $\displaystyle\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$

3. $\displaystyle\int x^{\mu}\ dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c,\ \ \mu \neq -1 \Longrightarrow \int \frac{dx}{x^{\mu}} = -\frac{1}{(\mu-1)x^{\mu-1}} + c, \mu \neq 1$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + c$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + c$

7. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ \ a \in (0,\infty) \setminus \{1\} \Longrightarrow \int e^x dx = e^x + c$

8. $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + c$

9. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + c$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + c$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + c$

12. $\displaystyle\int \sinh x = \cosh x + c \left(\sinh x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

13. $\displaystyle\int \cosh x = \sinh x + c$

3.3 Ιδιότητες αόριστων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.3.1. *Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσες στο διάστημα Δ, τότε*

(i) $\displaystyle\int \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big] dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(ii) $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + c \Longrightarrow \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c,$

για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και σε οποιοδήποτε διάστημα $\Delta^* \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $ax + b \in \Delta$ όταν $x \in \Delta^*$.

Απόδειξη. (*i*) Έστω ότι $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$.

Τότε $[\alpha F(x) + \beta G(x)]' = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

Συνεπώς

$$\int \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big] dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + c = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x).$$

(ii) $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + c \Longrightarrow F'(x) = f(x) \Longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{a} F(ax+b) + c\right]' = \frac{1}{a} F'(ax+b)(ax+b)' = F'(ax+b) = f(ax+b).$$

□

Παραδείγματα 3.3.2.

1. $\displaystyle\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) dx =$

$$= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + ... + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^m}} = \int x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} + c = \frac{n}{n-m} \sqrt[n]{x^{n-m}} + c$

3. $\displaystyle\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\, e^{ax+b} + c,\ a \neq 0$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c,\ a \neq 0.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \int (ax+b)^{-n}dx = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c,$ αν $n \neq 1.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+m} = \ln|x+m| + c$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+m)^n} = \int (x+m)^{-n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x+m)^{n-1}} + c,$ αν $n \neq 1.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-m^2} = \frac{1}{2m}\ln\frac{|x-m|}{|x+m|} + c,$ αν $m \neq 0.$

   Πράγματι, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-m^2} = \int \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{x-m} - \frac{1}{x+m}\right)dx =$

   $$= \frac{1}{2m}\int \frac{dx}{x-m} - \frac{1}{2m}\int \frac{dx}{x+m} = \frac{1}{2m}\ln|x-m| - \frac{1}{2m}\ln|x+m| =$$

   $$= \frac{1}{2m}\ln\frac{|x-m|}{|x+m|} + c.$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + c,$ αν $m \neq 0$

   Πράγματι, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \int \frac{dx}{m^2\left(\frac{x^2}{m^2}+1\right)} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{m}\right)^2+1} =$

   $$= \frac{1}{m^2}\cdot m\arctan\frac{x}{m} + c = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + c.$$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{m} + c,$ αν $m > 0.$

    Πράγματι, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} = \int \frac{dx}{m\sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2}} = \frac{1}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2}} =$

    $$= \frac{1}{m}\cdot m\arcsin\frac{x}{m} + c = \arcsin\frac{x}{m} + c$$

11. $\displaystyle\int \sin(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c,\ a\neq 0$

12. $\displaystyle\int \cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c,\ a\neq 0$

13. $$\int \cos^2 mxdx = \int \frac{1+\cos 2mx}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2mxdx = $$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} + c.$$

14. $$\int \sin^2 mxdx = \int \frac{1-\cos 2mx}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2mxdx = $$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m} + c.$$

15. $$\int \cot^2 xdx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = $$
$$= -\cot x - x + c$$

3.4 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεώρημα 3.4.1. *Αν οι συναρτήσεις $f,\ g : \Delta \to \mathbb{R}$ έχουν συνεχείς παραγώγους f' και g' στο διάστημα Δ, τότε στο διάστημα αυτό*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις fg' και $f'g$, ως συνεχείς στο Δ, έχουν παράγουσες στο Δ. Άρα, τα αόριστα ολοκληρώματα στην εκφώνηση του Θεωρήματος είναι καλά ορισμένα. Επειδή

$$[f(x)g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x),$$

βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\int [f(x)'g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x) + c$$
$$\int f(x)'g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c$$
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

□

Σημείωση 3.4.2. Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες εφαρμόζεται στην εύρεση των ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int x^n \sin bx dx, \ \int x^n \cos bx dx, \ \int x^n e^{ax} dx,$$

$$\int x^m (\ln x)^n dx, \ \int e^{ax} \cos bx dx, \ \int e^{ax} \sin bx dx,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Παραδείγματα 3.4.3.

1. $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$

2. Αν $n \neq -1$, τότε

$$\int x^n \ln x dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)' dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + c$$

3. $$\int x(\ln x)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c.$$

4. $$\int 2^x x dx = \int \left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' x dx = \frac{2^x x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} x' dx = \frac{2^x x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + c.$$

5. $$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x \ dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \cdot dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

6. $$\int x^2 \cos 4x dx = \int x^2 \left(\frac{\sin 4x}{4}\right)' dx = x^2 \cdot \frac{\sin 4x}{4} - \int (x^2)' \cdot \frac{\sin 4x}{4} dx =$$
$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} - \frac{1}{2} \int x \cdot \sin 4x \, dx = \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{1}{2} \int x \cdot \left(\frac{\cos 4x}{4}\right)' dx =$$
$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{1}{8} \left[x \cos 4x - \int x' \cos 4x \, dx\right] =$$
$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$
$$= \frac{x^2 \sin 4x}{4} + \frac{x \cos 4x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c.$$

7. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \, e^{ax} + c$, όπου $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Πράγματι,
$$\int e^{ax} \sin bx dx = \int \left[\frac{1}{a} \, e^{ax}\right]' \sin bx dx = \frac{1}{a} \, e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx$$
$$\int e^{ax} \cos bx dx = \int \left[\frac{1}{a} \, e^{ax}\right]' \cos bx dx = \frac{1}{a} \, e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx$$
Αντικαθεστώντας το ολοκλήρωμα από το δεύτερο τύπο στον πρώτο:
$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \, e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \, e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx \Longrightarrow$$
$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2} \, e^{ax} \Longrightarrow$$
$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \, e^{ax} + c$$

8. $$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \, e^{ax} + c$$

Αποδεκνύεται όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα.

9. $$\int \frac{dx}{(x^2 + m^2)^2} = \frac{x}{2m^2(x^2 + m^2)} + \frac{1}{2m^2} \int \frac{dx}{x^2 + m^2}$$

Πράγματι,

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \int \frac{1}{x^2+m^2} \cdot x' dx = \frac{x}{x^2+m^2} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+m^2)^2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+m^2)^2}\,dx = \int \frac{(x^2+m^2)-m^2}{(x^2+m^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+m^2} - m^2 \int \frac{dx}{(x^2+m^2)^2}$$

Αντικαθεστώντας το ολοκλήρωμα από το δεύτερο τύπο στον πρώτο:

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{x}{x^2+m^2} + 2\int \frac{dx}{x^2+m^2} - 2m^2 \int \frac{dx}{(x^2+m^2)^2}$$

Άρα, $2m^2 \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+m^2)^2} = \frac{x}{x^2+m^2} + \int \frac{dx}{x^2+m^2}$

Διαιρώντας την τελευταία ισότητα δια του $2m^2$ παίρνουμε τον τύπο 9.

10. $$\int \frac{dx}{(x^2+m^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)m^2(x^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2} \int \frac{dx}{(x^2+m^2)^{k-1}},$$

όπου $k = 2, 3, ...$

Αποδεικνύεται όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα.

Πόρισμα 3.4.4. $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$

Απόδειξη. $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx = f^2(x) - \int f'(x)f(x)dx \Longrightarrow$

$$2\int f(x)f'(x)dx = f^2(x) \Longrightarrow \int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c.$$

□

Παραδείγματα 3.4.5.

1. $\displaystyle\int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

2. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

3.5 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω ότι η συναρτηση $g : \Delta \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο g' στο διάστημα Δ, η συνάρτηση $f : \Delta^* \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ^* και $g(\Delta) \subseteq \Delta^*$.*

Αν $\displaystyle\int f(y)dy = F(y) + c$, *τότε* $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$.

Απόδειξη. Η f, ως συνεχής, έχει παράγουσα στο Δ^*. Η $(f \circ g)g'$, ως συνεχής, έχει παράγουσα στο Δ Άρα, τα αόριστα ολοκληρώματα στην εκφώνηση του Θεωρήματος είναι καλά ορισμένα.

Επειδή η F είναι πράγουσα της f, ισχύει ότι $F'_y(y_0) = f(y_0)$.

Θέτουμε $y = g(x)$, τότε

$$[F(g(x))]'_x = F'_y(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

□

Σημείωση 3.5.2. Έστω ότι για τις συναρήσεις $\Delta \xrightarrow{g} \Delta^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, ισχύουν οι προυποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.1.

Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $x \xrightarrow{g} y = g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο υπολογισμός του $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx$ γίνεται με αλλαγή μεταβλητής (ή με αντικατάσταση): $y = g(x)$.

Παραδείγματα 3.5.2.

1. $\displaystyle\int e^{\sin x} \cos x \; dx = \int e^{\sin x} (\sin x)' \; dx.$

   Θέτουμε $y = \sin x$, τότε

   $$\int e^{\sin x} \cos x \; dx = \int e^y dy = e^y + c = e^{\sin x} + c.$$

2. $$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\sin x)' dx = \int \sin^2 x \; d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

3. $$\int x e^{x^2} \; dx = \int e^{x^2} \cdot \frac{(x^2)'}{2} \; dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' \; dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) \overset{x^2 = y}{=}$$

   $$= \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + c \overset{y = x^2}{=} \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \int \frac{1}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'\cdot dx =$

$$= \int \frac{1}{\ln^2 x}\cdot d(\ln x) \overset{\ln x = y}{=} \int y^{-2}dy = \frac{y^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{y} + c \overset{y=\ln x}{=} -\frac{1}{\ln x} + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + c.$

Πράγματι, θέτουμε $y = x^2 + a$, τότε $dy = 2xdx$, επομένως

$$\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + c.$$

6. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+a)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+a)^{k-1}} + c,\ \ k \neq 1.$

Πράγματι, θέτουμε $y = x^2 + a$, τότε $dy = 2xdx$. Τότε

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^k} = \frac{y^{-k+1}}{2(-k+1)} + c = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+a)^{k-1}} + c.$$

7. $\displaystyle\int \arctan x dx = \int (x)' \arctan x dx = x\arctan x - \int x(\arctan x)' dx =$

$$= x\arctan x - \int \frac{xdx}{x^2+1} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c.$$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln|x + \sqrt{x^2+m}| + c$, όπου $m \neq 0$.

Θέτουμε $t = x + \sqrt{x^2+m}$, τότε

$$t - x = \sqrt{x^2+m} \Longrightarrow (t-x)^2 = (\sqrt{x^2+m})^2 \Longrightarrow t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + m \Longrightarrow$$

$$x = \frac{t^2-m}{2t} \text{ και } dx = \left(\frac{t^2-m}{2t}\right)' dt = \frac{t^2+m}{2t^2}\, dt.$$

Συνεπώς, $\sqrt{x^2+m} = t - x = t - \dfrac{t^2-m}{2t} = \dfrac{t^2+m}{2t}$.

Άρα, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2+m}| + c$

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω ότι η συνάρτηση $g : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα με συνεχή παράγωγο g' στο διάστημα Δ του $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : g(\Delta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχης στο διάστημα $g(\Delta)$.*

Αν $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + c$, *τότε* $\displaystyle\int f(x)dx = F(g^{-1}(x)) + c$.

Απόδειξη. Η f, ως συνεχής, έχει παράγουσα στο $g(\Delta)$. Η $(f \circ g)g'$, ως συνεχής, έχει παράγουσα στο Δ Άρα, τα αόριστα ολοκληρώματα στην εκφώνηση του Θεωρήματος είναι καλά ορισμένα.

Θέτουμε $x = g(t)$. Τότε $dx = g'(t)dt$ και $t = g^{-1}(x)$. Συνεπώς

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + c = F(g^{-1}(x)) + c.$$

□

Σημείωση 3.5.4. Έστω ότι για τις συναρήσεις $\Delta \xrightarrow{g} g(\Delta) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, ισχύουν οι προυποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.3.

Τότε για κάθε $t \in \Delta$ ισχύει: $t \xrightarrow{g} x = g(t) \xrightarrow{f} f(g(t))$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο υπολογισμός του $\int f(x)\,dx$ γίνεται με αλλαγή μεταβλητής (ή με αντικατάσταση): $x = g(t)$.

Παράδειγμα 3.5.4. Θα βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a < x < b.$$

Θέτουμε $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$. Τότε

$$dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt,\quad x - a = (b-a)\sin^2 t,\quad b - x = (b-a)\cos^2 t.$$

Επομένως $\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{x-a}{b-x}$. Άρα, $t = \arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.

$$\text{Συνεπώς} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int 2dt = 2t + c = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + c.$$

3.6 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Μια πραγματική συνάρτηση R μιας πραγματικής μεταβλητής x καλείται *ρητή* όταν $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0 \end{aligned}$$

είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές.

Η συνάρτηση R είναι συνεχής σε κάθε διάστημα που δεν περιλαμβάνει καμία ρίζα του $Q(x)$, συνεπώς σε κάθε τέτοιο διάστημα η R έχει αόριστο ολοκλήρωμα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες.

Αν $n < m$, τότε το κλάσμα $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ καλείται *κανονικό.*

Αν $n \geq m$, τότε διαιρώντας το $P(x)$ δια του $Q(x)$ παίρνουμε

$$R(x) = f(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

όπου $f(x)$ είναι πολυώνυμο $(n-m)$-βαθμού και $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ είναι κανονικό κλάσμα.

Άρα

$$\int R(x)dx = \int f(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

Επειδή $f(x)$ είναι πολυώνυμο, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\displaystyle\int f(x)dx$ δεν παρουσιάζει δυσκολίες, συνεπώς αρκεί να ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση του κανονικού κλάσματος $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Παράδειγμα 3.6.1. Για την ρητή συνάρτηση $R(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$ ισχύει ότι $R(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x+1}$. Άρα,

$$\int R(x)dx = \int (x+2)dx + 3\int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x+1| + c.$$

Ορισμός 3.6.2. *Απλά κανονικά κλάσματα* είναι τα κανονικά κλάσματα που έχουν μία από τις ακόλουθες μορφές:

I. $\dfrac{A}{x-a}$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, k φυσικός αριθμός ≥ 2.

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$.

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$ και k φυσικός αριθμός ≥ 2.

3.6.1 Ολοκλήρωση απλών κανονικών κλασμάτων.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+c.$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+c.$

III. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$, όπου $p^2-4q<0$, θέτουμε $y=x+\frac{p}{2}$.

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\underbrace{\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx}_{I_1} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+px+q}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}\,dx = \ln(x^2+px+q)+c.$$

Για τον υπολογισμό του I_2 θέτουμε $y=x+\dfrac{p}{2}$. Τότε $dx=dy$ και

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{a^2} = y^2+a^2, \qquad a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$ Άρα,

$$I_2 = \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a}+c = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c.$$

IV. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $p^2-4q<0$ και k φυσικός αριθμός ≥ 2.

Το ολοκλήρωμα αναλύεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων ως εξής:

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}=\frac{A}{2}\underbrace{\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}}_{I_1}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}}_{I_2}$$

$$I_1=\int\frac{(x^2+px+q)'dx}{(x^2+px+q)^k}=\frac{-1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}+c.$$

Για τον υπολογισμό του I_2 θέτουμε $y=x+\dfrac{p}{2}$. Τότε $dx=dy$ και $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\underbrace{q-\dfrac{p^2}{4}}_{a^2}=y^2+a^2$.

Συνεπώς το I_2 υπολογίζεται από τον αναδρομικό τύπο:

$$I_2=\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^k}=\frac{y}{2(k-1)a^2(y^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)a^2}\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{k-1}}.$$

Παραδείγματα 3.6.3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1. $\displaystyle\int\frac{5dx}{x+3}=5\ln|x+3|+c$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+3)^5}=-\frac{1}{4(x+3)^4}+c$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$ και $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-4x+5}$.

   Τα ολοκληρώματα αυτά είναι της μορφής ΙΙΙ.

   Θέτοντας $y=x-2$, παίρνουμε:

   $x^2-4x+5=(x-2)^2+1=y^2+1$, $dx=dy$ και $x=y+2$.

   Συνεπώς

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + c = \arctan(x-2)+c.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x^2-4x+5} &= \int \frac{(y+2)dy}{y^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2+1} + 2\int \frac{dy}{y^2+1} = \\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + 2\arctan y + c = \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 2\arctan(x-2)+c.\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι της μορφής IV. Από τον αναδρομικό τύπο

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)a^2(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}$$

για $k=3$ και $a=1$ παίρνουμε:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\ .$$

Από τον παραπάνω αναδρομικό τύπο για $k=2$ και $a=1$ βρίσκουμε:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan x + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{(3x-1)dx}{(x^2-4x+8)^2}.$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι της μορφής IV.

Έχουμε $(x^2-4x+8)' = 2x-4$. Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{(3x-1)dx}{(x^2-4x+8)^2} &= \int \frac{(2x-4)\cdot\frac{3}{2} - 1 + 6}{(x^2-4x+8)^2}\ dx = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{(x^2-4x+8)^2} + 5\int \frac{dx}{(x^2-4x+8)^2}\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε χωριστα τα τελευταία δύο αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+8)^2}\,dx = \int \frac{(x^2-4x+8)'}{(x^2-4x+8)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2-4x+8} + c.$$

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+8)^2}\,dx = \int \frac{1}{[(x-2)^2+4]^2}\,dx \overset{y=x-2}{=} \int \frac{dy}{(y^2+4)^2}.$$

Άπο τον αναδρομικό τύπο:

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^k} = \frac{y}{2a^2(k-1)(y^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{k-1}}$$

για $k=2$ και $a=2$ παίρνουμε

$$\int \frac{dy}{(y^2+4)^2} = \frac{y}{8(y^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{dy}{y^2+4} =$$

$$= \frac{y}{8(y^2+4)} + \frac{1}{8\cdot 2}\arctan\frac{y}{2} = \frac{x-2}{8(x^2-4x+8)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x-2}{2} + c.$$

Από τα παραπάνω

$$\int \frac{3x-1}{(x^2-4x+8)^2}\,dx = \frac{5x-22}{8(x^2-4x+8)} + \frac{5}{16}\arctan\frac{x-2}{2} + c$$

3.6.2 Ολοκλήρωση κανονικών κλασμάτων.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, όπου $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ένα κανονικό κλάσμα και τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, βασίζεται στα παρακάτω γνωστά θεωρήματα της άλγεβρας.

Θεώρημα 3.6.4. *Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές*

$$Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

αναλύεται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές της μορφής $x-a$ *και της μορφής* x^2+px+q *με* $p^2-4q<0$.

Δηλαδή

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_\nu)^{k_\nu}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\ldots(x^2+p_\mu x+q_\mu)^{n_\mu},$$

όπου $k_1,\ldots,k_\nu,n_1,\ldots,n_\mu \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *και* $k_1+\ldots+k_\nu+2n_1+\ldots+2n_\mu = m$.

Θεώρημα 3.6.5. *Αν* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *είναι κανονικό κλάσμα, τα πολυώνυμα* $P(x)$ *και* $Q(x)$ *δεν έχουν κοινές ρίζες και*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_\nu)^{k_\nu} (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \dots (x^2+p_\mu x+q_\mu)^{n_\mu}$$

όπου οι ρίζες των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων είναι μιγαδικές, τότε το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *γράφεται σαν άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:*

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{B_1}{x-a_\nu} + \frac{B_2}{(x-a_\nu)^2} + \dots + \frac{B_{k_\nu}}{(x-a_\nu)^{k_\nu}} + \\
&+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{n_1}x+N_{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{S_1x+T_1}{x^2+p_\mu x+q_\mu} + \frac{S_2x+T_2}{(x^2+p_\mu x+q_\mu)^2} + \dots + \frac{S_{n_\mu}x+T_{n_\mu}}{(x^2+p_\mu x+q_\mu)^{n_\mu}}.
\end{aligned}$$

Παραδείγματα 3.6.6.

1. Το κανονικό κλάσμα $\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

   $$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

   Επομένως

   $$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$$

   Εξισώνοντας τους αριθμητές παίρνουμε:

   $$\begin{aligned} 1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) &+ \\ + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1) \end{aligned}$$

   $$1 = A(x^3-1) + B(x^4-x) + C(x^4+x^3+x^2) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2$$
   $$1 = -A - Bx + x^2(C-E) + x^3(A+C+E-D) + x^4(B+C+D)$$

   Εξισώνοντας τους συντελεστές των x, x^2, x^3, x^4 των πολυωνύμων στο αριστερό και στο δεξιό μέλος της τελευταίας ταυτότητας, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l|rcl} x^0 & -A & = & 1 \\ x & -B & = & 0 \\ x^2 & C-E & = & 0 \\ x^3 & A+C+E-D & = & 0 \\ x^4 & B+C+D & = & 0 \end{array}\right\}$$

από το οποίο βρίσκουμε: $A=-1$, $B=0$, $C=\frac{1}{3}$, $D=-\frac{1}{3}$, $E=\frac{1}{3}$.

Συνεπώς:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

2. Το κανονικό κλάσμα $\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

Εξισώνοντας τους αριθμητές παίρνουμε:

$$x^3-2x = Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^3-2x = Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των x, x^2, x^3, x^4 των πολυωνύμων στο αριστερό και στο δεξιό μέλος της τελευταίας ταυτότητας, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l|lcl} x^3 & 1 & = & C \\ x^2 & 0 & = & D \\ x & -2 & = & A+C \\ x^0 & 0 & = & B+D \end{array}\right\} \Longrightarrow A=-3,\ B=0,\ C=1,\ D=0.$$

Συνεπώς:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$$

Παραδείγματα 3.6.7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

   Το κανονικό κλάσμα $\frac{1}{x^2+3x+2}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

   $$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} =$$
   $$= \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

   Εξισώνοντας τους αριθμητές του πρώτου και του τελευταίου κλάσματος παίρνουμε την ταυτότητα: $(A+B)x+(2A+B)=1$

   Εξισώνοντας τους συντελεστες των x^0 και x παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

   $$\left.\begin{array}{c|rcl} x^0 & 2A+B & = & 1 \\ x & A+B & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=1 \text{ και } B=-1.$$

   Συνεπώς

   $$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+1| - \ln|x+2| + c =$$
   $$= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

   Το κανονικό κλάσμα $\frac{x}{x^2+3x+2}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

   $$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+3x+2} &= \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \\ &= \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

   Εξισώνοντας τους αριθμητές του πρώτου και του τελευταίου κλάσματος παίρνουμε την ταυτότητα: $(A+B)x+(2A+B)=x$.

   Εξισώνοντας τους συντελεστες των x^0 και x παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l|rcl} x^0 & 2A+B & = & 0 \\ x & A+B & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=-1 \text{ και } B=2.$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^2+3x+2} &= -\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} = \\ &= -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c = \ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + c \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3+6x^2+11x+6}$

Μία ρίζα του πολυωνύμου $x^3+6x^2+11x+6$ είναι η $x=-1$. Συνεπώς $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3) \Longrightarrow$

$$\frac{x}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Οπότε

$$\int \frac{x}{x^3+6x^2+11x+6} = \int \frac{Adx}{x+1} + \int \frac{Bdx}{x+2} + \int \frac{Cdx}{x+3} =$$

$= A\ln|x+1| + B\ln|x+2| + C\ln|x+3| + c.$

Οι συντελεστές A, B, C προσδιορίζονται από την ταυτότητα:

$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$

Για $x=-1$ παίρνουμε $-1=2A$, άρα $A=-\frac{1}{2}$.

Για $x=-2$ παίρνουμε $-2=-B$, άρα $B=2$.

Για $x=-3$ παίρνουμε $-3=2C$, άρα $C=-\frac{3}{2}$.

Τελικά

$$\int \frac{xdx}{x^3+6x^2+11x+6} = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx$

Διαιρώντας το πολυώνυμο x^5+1 με το πολυώνυμο x^4-8x^2+16 παίρνουμε

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}.$$

Το κανονικό κλάσμα $\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = \frac{8x^3-16x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}$.

Από τα παραπάνω:

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} =$$

$$= \int x dx + \int \frac{Adx}{(x-2)^2} + \int \frac{Bdx}{x-2} + \int \frac{Cdx}{(x+2)^2} + \int \frac{Ddx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{A}{x-2} + B\ln|x-2| - \frac{C}{x+2} + D\ln|x+2| + c.$$

Οι συντελεστές A, B, C, D προσδιορίζονται από την ταυτότητα:

$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2)$.

Για $x=2$ βρίσκουμε $A=\frac{33}{16}$. Για $x=-2$ βρίσκουμε $C=-\frac{31}{16}$.

Για $x=0$ η ταυτότητα γράφεται $1 = 4A-8B+4C+8D$.

Στην τελευταία σχέση αντικαθιστώντας τις τιμές των A και C παίρνουμε: $-16B+16D=1$. Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^3 στην ταυτότητα παίρνουμε: $B+D=8$. Άρα $B=\frac{127}{32}$ και $D=\frac{129}{32}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x-2)^5}$.

Αντί να αναλύσουμε το κανονικό κλάσμα $\frac{x^3}{(x-2)^5}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων, θέτουμε $x-2=t$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3dx}{(x-2)^5} &= \int \frac{(t+2)^3dt}{t^5} = \int \frac{(t^3+6t^2+12t+8)dt}{t^5} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2} + 6\int \frac{dt}{t^3} + 12\int \frac{dt}{t^4} + 8\int \frac{dt}{t^5} = \\
&= -\frac{1}{t} - \frac{6}{2t^2} - \frac{12}{3t^3} - \frac{8}{4t^4} + c = \\
&= -\frac{1}{x-2} - \frac{6}{2(x-2)^2} - \frac{12}{3(x-2)^3} - \frac{8}{4(x-2)^4} + c
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^6-1}$. Θέτουμε $x^3=t$. Οπότε

$$\int \frac{x^2dx}{x^6-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{6}\ln\frac{|t-1|}{|t+1|} + c = \frac{1}{6}\ln\frac{|x^3-1|}{|x^3+1|} + c.$$

3.7 Ολοκλήρωση διωνύμων $x^m(a+bx^n)^p$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, όπου m, n και p είναι ρητοί αριθμοί, ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής στις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(1) p είναι ακέραιος αριθμός.

Θέτουμε $x = t^k$, όπου k είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών των κλασμάτων m και n.

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Θέτουμε $a + bx^n = t^k$, όπου k είναι ο παρανομαστής του κλάσματος p.

(3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ είναι ακέραιος αριθμός.

Θέτουμε $a + bx^n = t^k x^n$, όπου k είναι ο παρανομαστής του κλάσματος p.

Παραδείγματα 3.7.1.

1. $\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-10}dx$.

Επειδή $p = -10$ είναι ακέραιος αριθμός, θέτουμε $x = t^4$
(4 είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών των κλασμάτων $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{4}$). Οπότε

$$\begin{aligned}
\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-10}dx &= \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}} = \\
&= 4\int \frac{(t+1)dt}{(t+1)^{10}} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \\
&= 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \\
&= -\frac{1}{2(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} + c = \\
&= -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} + c
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Γράφοντας το ολοκλήρωμα στη μορφή $\displaystyle\int x^3(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$, παίρνουμε
$m=3, \quad n=2, \quad p=-\frac{3}{2}$.

Επειδή $\frac{m+1}{n}=2$ είναι ακέραιος αριθμός, θέτουμε $4-x^2=t^2$
(ο εκθέτης 2 του t^2 είναι ο παρανομαστής του κλάσματος $p=-\frac{3}{2}$).

Οπότε $x^2=4-t^2$ και $xdx=-tdt$.

Άρα, $x^3dx=-(4-t^2)tdt$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int x^3(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx &= -\int(4-t^2)t\cdot t^{-3}dt = -\int\frac{(4-t^2)dt}{t^2} = \\
&= \int dt - 4\int\frac{dt}{t^2} = t+\frac{4}{t}+c = \frac{t^2+4}{t}+c = \\
&= \frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+c.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int x^{-3}(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx$.

Έχουμε $m=-3$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$.

Επειδή $\dfrac{m+1}{n}+p=-1$ είναι ακέραιος αριθμός, θέτουμε $2-x^3=t^3x^3$,
(ο εκθέτης του t^3 είναι ο παρανομαστής του κλάσματος $p=-\frac{1}{3}$).

Οπότε παίρνουμε διαδοχικά:

$t=\dfrac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x} \Longrightarrow 2x^{-3}-1=t^3 \Longrightarrow x^{-4}dx=-\dfrac{t^2dt}{2}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int x^{-3}(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx &= \int x^{-3}\left[x^3(2x^{-3}-1)\right]^{-\frac{1}{3}}dx = \\
&= \int x^{-4}\left[2x^{-3}-1\right]^{-\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{2}\int t^2\cdot t^{-1}dt = \\
&= -\frac{t^2}{4}+c = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+c.
\end{aligned}$$

3.8 Ολοκλήρωση συναρτήσεων που περιέχουν ριζικά

I. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$, θέτουμε $x = a\tan t$

$\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$, θέτουμε $x = \dfrac{a}{\sin t}$

$\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, θέτουμε $x = a\sin t$

II. $\displaystyle\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$, θέτουμε $t = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$,

οπότε $t^n = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ και $x = \dfrac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}$.

III. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, όπου $a \neq 0$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούνται οι αντικαταστάσεις του Euler:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, αν $a > 0$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$, αν $c > 0$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$, αν $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,

όπου x_1, x_2 είναι πραγματικές ρίζες.

IV. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, όπου $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο n-βαθμού.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θέτουμε

$$\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

όπου $Q_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο $(n-1)$-βαθμού και k είναι ένας αριθμός.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών του πολυωνύμου $Q_{n-1}(x)$ και του συντελεστή k παραγωγίζουμε την προηγούμενη ισότητα και έπειτα την πολλαπλασιάζουμε επί $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Στη συνέχεια εξισώνουμε τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x.

V. $\int f(x, \sqrt[m_1]{x^{n_1}}, \sqrt[m_2]{x^{n_2}}, ..., \sqrt[m_k]{x^{n_k}})dx$, όπου f είναι μια ρητή συνάρτηση.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θέτουμε $x = t^m$, όπου m είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών των κλασμάτων: $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, ..., \frac{n_k}{m_k}$.

Παραδείγματα 3.8.1.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

   Το ολοκλήρωμα αυτό είναι I τύπου. Θέτουμε $x = \tan t$, οπότε

   $$x^2 = \tan^2 t,\ x^2+1 = \tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t},\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\ dt$$

   Συνεπώς

   $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dt}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\tan^2 t}\cdot\cos t = \int\frac{\cos t\ dt}{\sin^2 t} = \int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = \\ &= -\frac{1}{\sin t} + c = -\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} + c = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3}\ dx}{x}$.

   Το ολοκλήρωμα αυτό είναι I τύπου.

   Θέτουμε $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin t}$, τότε $t = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}$, $dx = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sin t}\right)' dt = \left(-\dfrac{\sqrt{3}\cos t}{\sin^2 t}\right) dt$

   και $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{\dfrac{3}{\sin^2 t} - 3} = \sqrt{\dfrac{3-3\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \dfrac{\sqrt{3}\cos t}{\sin t}$.

   Συνεπώς

   $$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-3}\ dx}{x} &= -\sqrt{3}\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\ dt = -\sqrt{3}\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\ dt = \\ &= -\sqrt{3}\int\frac{1}{\sin^2 t}\ dt + \sqrt{3}\int dt = \sqrt{3}\cot t + \sqrt{3}t + c = \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + \sqrt{3}\ t + c = \\ &= \sqrt{x^2-3} + \sqrt{3}(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}) + c.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι I τύπου.

Θέτουμε $x = a\sin t$, οπότε $dx = a\cos t dt$ και $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 t dt &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2\sin 2t}{4} + c = \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin t \cos t}{2} + c = \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}\ dx}{x}$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι II τύπου.

Θέτουμε $t = \sqrt{x+4}$, οπότε $t^2 = x+4, x = t^2-4, dx = 2tdt$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}\ dx}{x} &= \int \frac{2t^2dt}{t^2-4} = 2\int \frac{(t^2-4+4)dt}{t^2-4} = 2\int dt + 2\int \frac{4dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + c.\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι II τύπου.

Θέτουμε $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, οπότε

$x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $1-x = \dfrac{2t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx &= -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot t \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2}\ dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \\ &= \frac{1}{t} + c = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c.\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι III τύπου.

Θέτουμε $\sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{(x+1)(x+2)} = t(x+1)$, οπότε:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2) &= t^2(x+1)^2 \\ x+2 &= t^2(x+1) \\ x &= \frac{2-t^2}{t^2-1} \text{ και } dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} \\ \sqrt{x^2+3x+2} &= t(x+1) = \frac{t}{t^2-1} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} &= -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \\ &= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c, \text{ όπου } t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}. \end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx.$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι IV τύπου.

Θέτουμε

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας παίρνουμε:

$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3ax^2+2bx+c)\sqrt{x^2+4} + \frac{x(ax^3+bx^2+cx+d)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+4}}$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $\sqrt{x^2+4}$:

$x^4+4x^2 = (3ax^2+2bx+c)(x^2+4) + x(ax^3+bx^2+cx+d) + k$

$x^4+4x^2 = 4ax^4 + 3bx^3 + (2c+12a)x^2 + (8b+d)x + (k+4c)$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των x^0, x, x^2, x^3, x^4 των πολυωνύμων στο αριστερό και στο δεξιό μέλος της παραπάνω ταυτότητας, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{c|rcl} x^0 & k+4c & = & 0 \\ x & 8b+d & = & 0 \\ x^2 & 2c+12a & = & 4 \\ x^3 & 3b & = & 0 \\ x^4 & 4a & = & 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Longrightarrow a=\frac{1}{4},\ b=d=0,\ c=\frac{1}{2},\ k=-2.$$

Συνεπώς

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = $$
$$= \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4} - \arctan\frac{x}{2} + c.$$

8. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx = \int \frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^{14}}+\sqrt[12]{x^{15}}}\,dx$$

Θέτουμε $x=t^{12}$, οπότε $dx = 12t^{11}\,dt$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \int \frac{t^4\cdot 12t^{11}dt}{t^{14}+t^{15}} &= 12\int\frac{tdt}{t+1} = 12\int\frac{(t+1-1)dt}{t+1} = \\ &= 12\int dt - 12\int\frac{1}{t+1}\,dt = \\ &= 12(t-\ln|t+1|)+c = 12(\sqrt[12]{x} - \ln|\sqrt[12]{x}+1|)+c. \end{aligned}$$

3.9 Ολοκλήρωση παραστάσεων που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις

I. $\int f(\sin x, \cos x)dx$, όπου $f(u,v)$ πολυώνυμο ή πηλίκο πολυωνύμων ως προς u και v.

Θέτουμε $t=\tan\frac{x}{2}$,τότε $x = 2\arctan t$ και $dx = (2\arctan t)'dt = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Επίσης έχουμε:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Επειδή όμως με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής $t = \tan\dfrac{x}{2}$ σε πολλές περιπτώσεις καταλήγουμε σε ολοκληρώματα πολύπλοκων ρητών συναρτήσεων, χρησιμοποιούνται και οι ακόλουθες αλλαγές μεταβλητής:

αν $f(-u, v) = -f(u, v)$, θέτουμε $t = \cos x$,
αν $f(u, -v) = -f(u, v)$, θέτουμε $t = \sin x$,
αν $f(-u, -v) = f(u, v)$, θέτουμε $t = \tan x$,

II. $\displaystyle\int \sin ax \cos bx \; dx, \int \sin ax \sin bx \; dx, \int \cos ax \cos bx \; dx.$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

III. $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x \; dx$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$.

Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

III$_1$. $\displaystyle\int \sin^{2m+1} x \cos^n x \; dx$, θέτουμε $t = \cos x$.

Οπότε: $\displaystyle\int \sin^{2m+1} x \cos^n x \; dx = -\int \sin^{2m} x \cos^n x \; d(\cos x) =$

$\displaystyle= -\int (1-\cos^2 x)^m \cos^n x \; d(\cos x) = -\int (1-t^2)^m t^n dt$

III$_2$. $\displaystyle\int \cos^{2m+1} x \sin^n x \; dx$, θέτουμε $t = \sin x$.

Οπότε: $\displaystyle\int \cos^{2m+1} x \sin^n x \; dx = \int \cos^{2m} x \sin^n x \; d(\sin x) =$

$\displaystyle= \int (1-\sin^2 x)^m \sin^n x \; d(\sin x) = \int (1-t^2)^m t^n dt$

III$_3$. $\displaystyle\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \; dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx$

Παραδείγματα 3.9.1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

   Θέτουμε $t = \tan\frac{x}{2}$, οπότε $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ και $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

   Άρα, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

   Θέτουμε $t = \tan\frac{x}{2}$, οπότε $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ και $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

   Άρα, $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c =$$
   $$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$

   Θέτουμε $f(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^6 x}$.

   Τότε $f(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{(-\cos x)^2}{(-\sin x)^6} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^6 x} = f(\sin x, \cos x)$.

   Θέτουμε $t = \tan x$. Τότε $x = \arctan t$ και $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

   Επίσης $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$ και $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

   Άρα, $$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^6} = \int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{dt}{t^4} =$$
   $$= -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + c = -\frac{1}{5\tan^5 x} - \frac{1}{\tan^3 x} + c.$$

4. $$\int \sin ax \sin bx dx = \frac{1}{2}\int \cos[(a-b)x]dx - \frac{1}{2}\int \cos[(a+b)x]dx =$$
   $$= \frac{1}{2(a-b)}\sin[(a-b)x] - \frac{1}{2(a+b)}\sin[(a+b)x] + c.$$

5. $$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int \cos[(a-b)x]dx + \frac{1}{2}\int \cos[(a+b)x]dx =$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\sin[(a-b)x] + \frac{1}{2(a+b)}\sin[(a+b)x] + c$$

6. $$\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int \sin[(a-b)x]dx + \frac{1}{2}\int \sin[(a+b)x]dx =$$
$$= -\frac{1}{2(a-b)}\cos[(a-b)x] - \frac{1}{2(a+b)}\cos[(a+b)x] + c$$

7. $$\int \sin 5x \cos 3x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$$

8. $$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x dx =$$
$$= -\int (\cos^2 x - \cos^4 x)d(\cos x) \overset{t=\cos x}{=} -\int (t^2 - t^4)dt =$$
$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

9. $$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x \sin^2 2x dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$$

3.10 Ασκήσεις

Ιδιότητες αόριστων ολοκληρωμάτων.

3.10.1. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8}$

(β′) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8}$

(γ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

(δ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$

(ε′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$

(στ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-5)^{10}}$

(ζ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+14)^8}$

(η′) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(ϑ′) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

(ι′) $\displaystyle\int e^{5x+3} dx$

Απαντήσεις: (α′) $\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}}+c$, (β′) $\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{8}}{x+\sqrt{8}}\right|+c$, (γ′) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}+c$, (δ′) $\ln|x+\sqrt{x^2-8}|+c$, (ε′) $\ln|x+\sqrt{x^2+8}|+c$, (στ′) $-\frac{1}{9(x-5)^9}+c$, (ζ′) $-\frac{1}{7(x+14)^7}+c$, (η′) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$, (ϑ′) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$, (ι′) $\frac{1}{5}e^{5x+3}+c$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

3.10.2. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\displaystyle\int x\sin 2x dx$

(β′) $\displaystyle\int x^2 e^{3x} dx$

(γ′) $\displaystyle\int x^2\cos^2 x dx$

(δ′) $\displaystyle\int x^{-2}\ln^3 x dx$

(ε′) $\displaystyle\int 3^x x dx$

(στ′) $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 x dx$

(ζ′) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2} dx$

Απαντήσεις:
(α′) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+c$, (β′) $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+c$,
(γ′) $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+c$,
(δ′) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+c$, (ε′) $\frac{3^x x}{\ln 3}-\frac{3^x}{\ln^2 3}+c$,
(στ′) $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)+c$, (ζ′) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c$

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής.

3.10.3. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\int \tan x dx$ (δ′) $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$

(β′) $\int \cot x dx$ (ε′) $\int \sin^3 x \cos x dx$

(γ′) $\int \frac{x dx}{x^2 + 3}$ (στ′) $\int \arcsin x dx$

Απαντήσεις:

(α′) $-\ln|\cos x| + c$, (β′) $\ln|\sin x| + c$, (γ′) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 3| + c$,
(δ′) $\ln|e^x - 1| + c$, (ε′) $\frac{\sin^4 x}{4} + c$, (στ′) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$.

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

3.10.4. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$

(β′) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$

(γ′) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

(δ′) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2 - 4x + 7}$

(ε′) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(στ′) $\int \frac{(x+2)dx}{x(x-3)}$

(ζ′) $\int \frac{(3x^3 + x^2 + 5x + 1)dx}{x^3 + x}$

(η′) $\int \frac{(x^3 + x^2)dx}{x^2 - 6x + 5}$

(ϑ′) $\int \frac{(2x^2 + x + 3)dx}{(x+2)(x^2 + x + 1)}$

Απαντήσεις:

(α′) $-\frac{1}{3(x-1)^3} + c$, (β′) $-\frac{1}{4(2x+3)^2} + c$, (γ′) $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + c$,
(δ′) $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 7) + c$, (ε′) $\frac{x-7}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + c$,
(στ′) $-\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-3| + c$, (ζ′) $3x + \ln|x| + 2\arctan x + c$,
(η′) $\frac{x^2}{2} + 7x + \frac{75}{2}\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$,
(ϑ′) $\ln\frac{|x+2|^3}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

Ολοκλήρωση διωνύμων $x^m(a+bx^n)^p$

3.10.5. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$, (β′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$, (γ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Απαντήσεις:

(α′) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}+c$,

(β′) $\frac{1}{4}\ln\frac{|t+1|}{|t-1|}+\frac{1}{2}\arctan t+c,\ t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}$,

(γ′) $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+c$

Ολοκλήρωση συναρτήσεων που περιέχουν ριζικά.

3.10.6. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^2}$ (γ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

(β′) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x}$ (δ′) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

Απαντήσεις:

(α′) $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+c$, (β′) $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+c$,

(γ′) $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+c$, (δ′) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)+c$

Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3.10.7. Βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα

(α′) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ (δ′) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x$

(β′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$ (ε′) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^4 x}$

(γ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos 2x+5}$ (στ′) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$

Απαντήσεις:

(α′) $\tan\frac{x}{2}+c$, (β′) $\ln|\tan x|$, (γ′) $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan x\right)+c$,

(δ′) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c$, (ε′) $-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+c$,

(στ′) $\tan x-2\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+c$

Κεφάλαιο 4

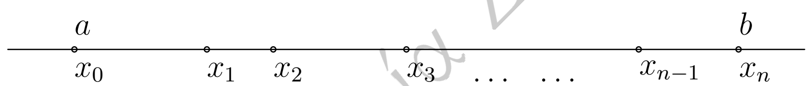
Ορισμένα ολοκληρώματα

Θεωρούμε ένα φραγμένο διάστημα $[a, b]$ των πραγματικών αριθμών.

Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{D} = \{x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n\}$ του διαστήματος $[a, b]$ τέτοιο ώστε

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$$

καλείται *διαμερισμός* του $[a, b]$.



Τα διαστήματα $[x_i, x_{i-1}]$ ενός διαμερισμού $\mathcal{D} = \{x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ μπορεί να έχουν διαφορετικό μήκος. Ο αριθμός

$$\lambda(\mathcal{D}) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$$

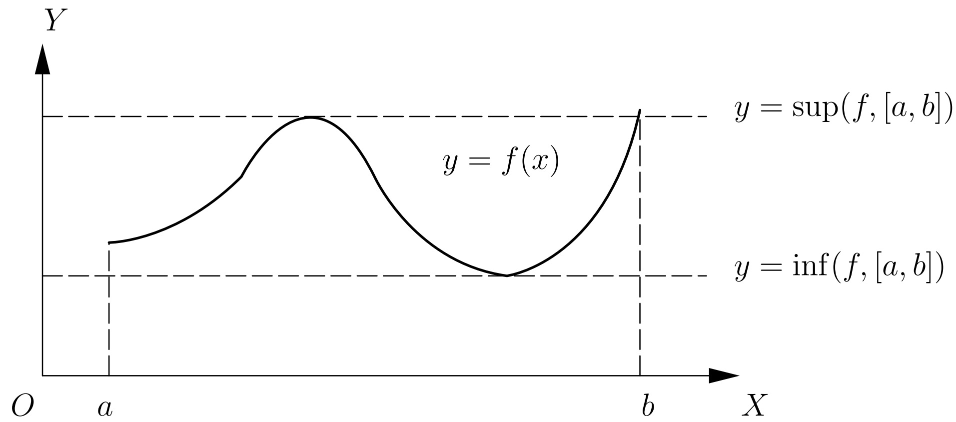
καλείται *λεπτότητα* του $\mathcal{D}$.

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή υπάρχουν αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} \inf(f, [a, b]) &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \\ \sup(f, [a, b]) &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Αν η f είναι συνεχής, τότε οι αριθμοί $\inf(f, [a, b])$ και $\sup(f, [a, b])$ είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή, αντίστοιχα, της f στο διάστημα $[a, b]$.



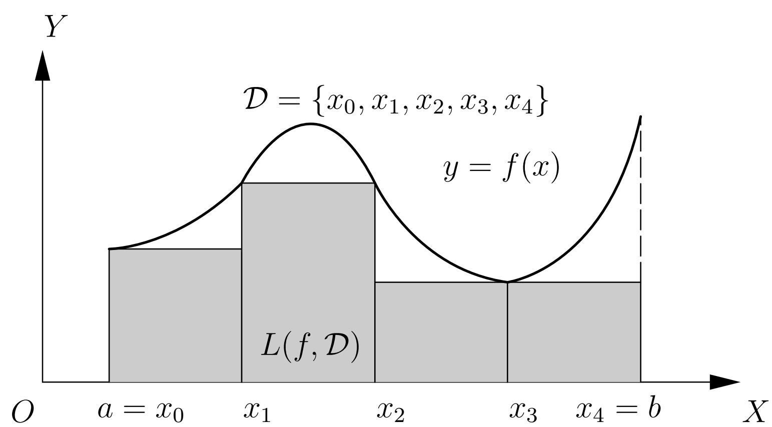
Αφού η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, έπεται ότι η f είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$. Για κάθε $i=1,...,n$ συμβολίζουμε

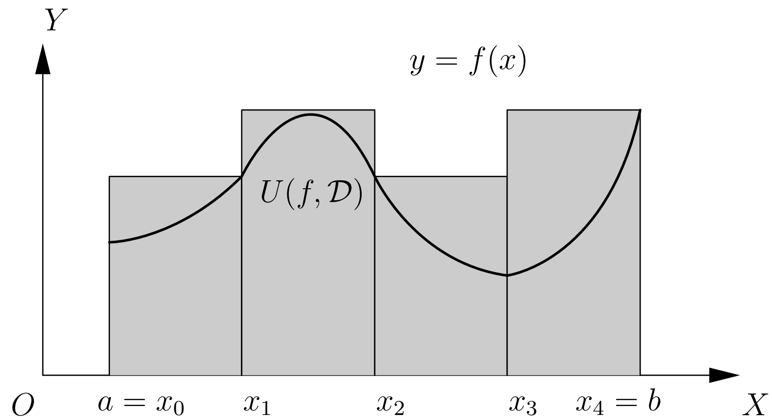
$$m_i = \inf(f,[x_{i-1}x_i]),\ \ M_i = \sup(f,[x_{i-1}x_i])$$

Στο διαμερισμό $\mathcal{D}$ αντιστοιχούμε τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{D}) &= m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+...+m_n(x_n-x_{n-1}) \\ U(f,\mathcal{D}) &= M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+...+M_n(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

τα οποία καλούνται *κάτω άθροισμα Darboux* και *άνω άθροισμα Darboux* της f για τον διαμερισμό $\mathcal{D}$, αντίστοιχα.





4.1 Ιδιότητες των αθροισμάτων Darboux

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση.

4.1.1. *Για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a, b]$ ισχύει: $L(f, \mathcal{D}) \leq U(f, \mathcal{D})$.*

Απόδειξη. Επειδή $m_i \leq M_i$, $i = 1, ..., n$, έπεται ότι

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, ..., n$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$L(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(f, \mathcal{D}).$$

□

4.1.2. *Αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι διμερισμοί του $[a, b]$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, τότε*

$$L(f, \mathcal{D}_1) \leq L(f, \mathcal{D}_2) \leq U(f, \mathcal{D}_2) \leq U(f, \mathcal{D}_1).$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ιδιότητα για την περίπτωση που ο διαμερισμός $\mathcal{D}_2$ έχει ένα ακριβώς σημείο παραπάνω από τον διαμερισμό $\mathcal{D}_1$.

Έστω ότι $\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n\}$ και $\mathcal{D}_2$ έχει ένα παραπάνω σημείο x^*. Τότε υπάρχει $i \in \{1, .., n\}$ τέτοιο ώστε $x_{i-1} < x^* < x_i$. Συμβολίζουμε

$$m_* = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x^*\}, \; m^* = \inf\{f(x) : x^* \leq x \leq x_i\}.$$

Τότε $m_i \leq m_*$ και $m_i \leq m^*$. Συνεπώς,

$$L(f,\mathcal{D}_1) - L(f,\mathcal{D}_2) = (m_i - m_*)(x^* - x_{i-1}) + (m_i - m^*)(x_i - x^*) \leq 0.$$

Άρα, $L(f,\mathcal{D}_1) \leq L(f,\mathcal{D}_2)$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $U(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_1)$.

Από την ιδιότητα 4.1.1 των αθροισμάτων Darboux: $L(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_2)$. Άρα,

$$L(f,\mathcal{D}_1) \leq L(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_2) \leq U(f,\mathcal{D}_1)$$

$\square$

4.1.3. *Αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι οποιοιδήποτε διμερισμοί του $[a,b]$, τότε*

$$L(f,\mathcal{D}_1) \leq U(f,\mathcal{D}_2).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Τότε $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}_2$.

Από την ιδιότητα 4.1.2 Darboux:

$$L(f,\mathcal{D}_1) \leq L(f,\mathcal{D}) \text{ και } U(f,\mathcal{D}) \leq U(f,\mathcal{D}_2)$$

Όμως $L(f,\mathcal{D}) \leq U(f,\mathcal{D})$ από την ιδιότητα 4.1.1. Άρα, $L(f,\mathcal{D}_1) \leq U(f,\mathcal{D}_2)$.

$\square$

4.2 Ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f είναι μια φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$.

Από την ιδιότητα 4.1.3 των αιροισμάτων Darboux συνεπάγεατι ότι το σύνολο όλων των κάτω αθροισμάτων Darboux είναι άνω φραγμένο και το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων Darboux είναι κάτω φραγμένο. Ο αριθμός

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}$$

καλείται *κάτω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ και ο αριθμός

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}$$

καλείται *άνω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$.

Επειδή κάθε άνω άθροισμα Darboux είναι άνω φάγμα του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων Darboux, για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,\mathcal{D}),$$

δηλαδή ο αριθμός $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ είναι ένα κάτω φράγμα του συνόλου όλων των άνω αθροισμάτων Darboux. Επομένως

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Άρα, για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ ισχύει

$$L(f,\mathcal{D}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,\mathcal{D})$$

Ορισμός 4.2.1. Μια φραγμένη στο $[a,b]$ συνάρτηση f καλείται *ολοκληρώσιμη κατά Riemann* ή απλά *ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ αν και μόνον αν το κάτω ολοκλήρωμά της στο $[a,b]$ ισούται με το άνω ολοκλήρωμά της στο $[a,b]$, δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, τότε ο αριθμός $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ καλείται *ορισμένο ολοκλήρωμα Riemann* ή απλά *ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$* και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Για μια συνάρτηση f ορισμένη στο σημείο a ορίζουμε

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Για μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ ορίζουμε

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Παραδείγματα 4.2.2.

1. Θα δείξουμε ότι $\displaystyle\int_a^b c dx = c(b-a)$.

   Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in [a, b]$.

   Για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D} = \{a = x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ έχουμε

   $$L(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$$

   Ομοια, $U(f, \mathcal{D}) = c(b-a)$. Συνεπώς $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$.

2. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση (συνάρτηση του Dirichler)

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ είναι ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

   είναι μη ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

   Πράγματι, για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D} = \{0 = x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n = 1\}$ του $[0, 1]$ έχουμε

   $$L(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \inf(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0,$$
   $$U(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \sup(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

   Συνεπώς $\displaystyle\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$.

4.3 Συνθήκες ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 4.3.1. *Μιά συνάρτηση f φραγμένη στο $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε*

$$U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκλήρώσιμη στο $[a,b]$ και $\varepsilon > 0$.

Συμβολίζουμε $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Τότε

$$\begin{aligned} I &= \sup\{L(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\} = \\ &= \inf\{U(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν διαμερισμοί $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$, τέτοιοι ώστε

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{D}_1) \leq I \leq U(f,\mathcal{D}_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $\mathcal{D}$ είναι ο διαμερισμός του $[a,b]$ που αποτελείται από τα σημεία και των δύο διαμερισμών $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_1$. Από την ιδιότητα 4.1.2 των αθροισμάτων Darboux έχουμε

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{D}_1) \leq L(f,\mathcal{D}) \leq I \leq U(f,\mathcal{D}) \leq U(f,\mathcal{D}_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, $U(f,\mathcal{D}_2) - L(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε $U(f,\mathcal{D}) - l(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. Επειδή για κάθε διαμερισμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$

$$L(f,\mathcal{D}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,\mathcal{D}),$$

προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει: $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$.

Άρα, $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

□

Ορισμός 4.3.2. Αν μια συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα Δ, τότε ο αριθμός

$$\tau(f,\Delta) = \sup(f,\Delta) - \inf(f,\Delta)$$

καλείται *ταλάντωση* της f στο Δ.

Από τον ορισμό των αθροισμάτων Darboux

$$U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

όπου $m_i = \inf(f,[x_{i-1}x_i])$ και $M_i = \sup(f,[x_{i-1}x_i])$.

Επομένως $M_i - m_i = \tau(f,[x_{i-1},x_i])$. Άρα,

$$U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n}\tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}).$$

Το Θεώρημα 4.3.1 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 4.3.3. *Μια συνάρτηση f φραγμένη στο διάστημα $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε*

$$\sum_{i=1}^{n}\tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Θεώρημα 4.3.4. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, από το Θεώρημα 4.3.1 υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ με $U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) < \varepsilon$. Για τον διαμερισμό $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{c,d\}$ του $[a,b]$ έχουμε

$$L(f,\mathcal{D}) \leq L(f,\mathcal{D}') \leq U(f,\mathcal{D}') \leq U(f,\mathcal{D}).$$

Επομένως $U(f,\mathcal{D}') - L(f,\mathcal{D}') < \varepsilon$. Τα σημεία του $\mathcal{D}'$ που ανήκουν στο $[c,d]$ αποτελούν έναν διμερισμό $\mathcal{D}''$ του $[c,d]$ για τον οποίο έχουμε

$$U(f,\mathcal{D}'') - L(f,\mathcal{D}'') \leq U(f,\mathcal{D}') - L(f,\mathcal{D}') < \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.

$\square$

Θεώρημα 4.3.5. *Αν η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[c,d] \subseteq [a,b] \setminus \{c_1,...,c_n\}$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$.

Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon' > 0$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon' < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(n+1)}, \frac{\varepsilon}{4nM}\right\}.$$

Επιλέγουμε $a_1,...,a_n,a_{n+1},b_0,b_1,...,b_n \in [a,b]$ έτσι ώστε

$$a = b_0 < a_1 < c_1 < b_1 < a_2 < c_2 < b_2 ... < a_n < c_n < b_n < a_{n+1} = b$$

και $b_i - a_i < \varepsilon'$ για $i = 1,...,n$.

Από την υπόθεση η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b_i, a_{i+1}]$ για κάθε $i = 0,1,...,n$. Επομένως υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}_i$ του $[b_i, a_{i+1}]$ τέτοιος ώστε

$$U(f,\mathcal{D}_i) - L(f,\mathcal{D}_i) < \varepsilon', \ i = 0,1,...,n.$$

Για τον διαμερισμό $\mathcal{D} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{D}_i$ του $[a,b]$ έχουμε

$$U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=0}^{n}(U(f,\mathcal{D}_i) - L(f,\mathcal{D}_i)) + \sum_{i=1}^{n} \tau(f,[a_i,b_i])(b_i - a_i).$$

Επειδή $\tau(f,[a_i,b_i]) \leq 2M$ για κάθε $i = 1,...,n$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=0}^{n}(U(f,\mathcal{D}_i) - L(f,\mathcal{D}_i)) + \sum_{i=1}^{n} 2M(b_i - a_i) \leq \\ &\leq \varepsilon'(n+1) + \sum_{i=1}^{n} 2M\varepsilon' \leq \\ &\leq \varepsilon'(n+1) + 2\varepsilon' Mn < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Ομοια αποδεικνύεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν $a = c_1$ ή $b = c_n$.

$\square$

4.4 Οικογένειες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.4.1. *Αν η f είναι φραγμένη και μονότονη στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$. Αν $f(b)=f(a)$, τότε η f είναι σταθερή στο $[a,b]$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Έστω ότι $f(b)\neq f(a)$ και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει διαμερισμός

$$\mathcal{D}=\{a=x_0,...,x_n=b\}$$

του $[a,b]$ σε n ίσα μέρη μήκους $<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Επειδή η f είναι αύξουσα στο $[x_{i-1},x_i]$, $\inf(f,[x_{i-1},x_i])=f(x_{i-1})$ και $\sup(f,[x_{i-1},x_i])=f(x_i)$. Επομένως $\tau_i(f,[x_{i-1},x_i])=f(x_i)-f(x_{i-1})$. Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1})<\\ &< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\\ &= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\,(f(b)-f(a))=\varepsilon.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

□

Θεώρημα 4.4.2. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, η f είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f έπεται ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε: αν $x,x'\in[a,b]$ και $|x-x'|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Έστω $\mathcal{D}=\{a=x_0,...,x_n=b\}$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ με $\lambda(\mathcal{D})<\delta$. Τότε $\tau(f,[x_{i-1},x_i])<\frac{\varepsilon}{b-a}$ για κάθε i. Επομένως

$$\sum_{i=1}^{n}\tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 4.3.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

□

Θεώρημα 4.4.3. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε $[c,d] \subseteq [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.4.2 ή f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[c,d] \subseteq [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$.. Άρα, από το Θεώρημα 4.3.5, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

□

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω ότι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Αν η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $[a,b]$ και $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$, τότε η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a',b'] \subseteq [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$.

Αφού $g(x) = f(x)$ σε κάθε σημείο $x \in [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_2\}$, έπεται ότι η g είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a',b'] \subseteq [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_n\}$. Άρα, από το Θεώρημα 4.3.5, η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Οι συναρτήσεις f και g είναι φραγμένες στο $[a,b]$ και οι τιμές τους διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος σημεία. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει:

$$|f(x)| < M, \ |g(x)| < M, \ |f(x) - g(x)| < M.$$

Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $\mathcal{D}$ είναι ο διαμερισμός του $[a,b]$ που δεν περιλαμβάνει τα σημεία $c_1, ..., c_n$, ο οποίος έχει οριστεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.5. Τότε

$$U(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(x)dx < \varepsilon, \ \ U(g,\mathcal{D}) - \int_a^b g(x)dx < \varepsilon$$

και $|U(f,\mathcal{D}) - U(g,\mathcal{D})| < \varepsilon$. Όμως

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| &\le \\ \le \left|\int_a^b f(x)dx - U(f,\mathcal{D})\right| &+ |U(f,\mathcal{D}) - U(g,\mathcal{D})| + \left|U(g,\mathcal{D}) - \int_a^b g(x)dx\right|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| < 3\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Άρα, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

□

Παραδείγματα 4.4.5.

1. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{x}{n}, & \text{αν } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

   είναι ασυνεχής στα σημεία $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Επειδή η f είναι αύξουσα και φραγμένη στο $[0, 1]$, από το Θεώρημα 4.4.1 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

2. Από το Θεώρημα 4.4.2 οι συναρτήσεις

$$\sin x, \ \cos x, \ x^a, \ a^x \ (a > 0),$$

   είναι ολοκληρώσιμες σε οποιοδήποτε κλειστό υποδιάστημα του $(-\infty, \infty)$ και οι συναρτήσεις $\log_a x$, $(a > 0)$ είναι ολοκληρώσιμες σε οποιοδήποτε κλειστό υποδιάστημα του $(0, \infty)$.

3. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{αν } x = -3 \\ x + 2, & \text{αν } -3 < x \le 1 \\ x^2, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

   είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in [-3, 3] \setminus \{-3, 1\}$. Από το Θεώρημα 4.4.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-3, 3]$.

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$, και

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ e^x, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}$$

   .

   Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, από το Θεώρημα 4.4.2 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

   Για κάθε $x \in [0, 1] \setminus \{0\}$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Άρα, απο το Θεώρημα 4.4.4 η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 e^x dx.$

4.5 Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα 4.5.1. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F είναι μια παράγουσα της f στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{a = x_0, x_1 ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε

$$L(f,\mathcal{D}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,\mathcal{D}) \text{ και } U(f,\mathcal{D})) - L(f,\mathcal{D}) < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Επειδή η $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, η F είναι παραγωγισίμη και, άρα, συνεχής σε κάθε $[x_{i-1}, x_i]$. Από το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ τέτοιο ώστε

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Αφού $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Έπειδή $\inf(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq f(\xi_i) \leq \sup(f, [x_{i-1}, x_i])$ για κάθε $i = 1, ..., n$, παίρνουμε

$$L(f,\mathcal{D}) \leq F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq U(f,\mathcal{D}). \tag{4.4}$$

Από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) προκύπτει ότι

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Από την ανισότητα (4.5), η οποία αληθεύει για κάθε $\varepsilon > 0$, προκύπτει η (4.2). □

Τύπος των Newton-Leibniz.

Το Θεώρημα 4.5.1 καλείται Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Ο τύπος (4.2) είναι ο βασικός τύπος του ολοκληρωτικού λογισμού και καλείται τύπος των Newton-Leibniz.

Συμβολίζοντας $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο των Newton-Leibniz στη μορφή

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Παραδείγματα 4.5.2.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, από το Θεώρημα 4.4.2 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Μια παράγουσα της f είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 4.5.1: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1.$

2. Ολοκληρώσιμη συνάρτηση που δεν έχει παράγουσα.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 4.4.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Θα δείξουμε ότι η f δεν έχει παράγουσα.

Έστω αντίθετα $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο $[0,1]$. Τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Επομένως $F(x) = c$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα, $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Οπότε $f(1) = F'(1) = 0$, που είναι άτοπο.

Άρα, το ολοκλήρωμα της f δεν μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο (4.2).

3. Μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση που έχει παράγουσα.

   Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{3\sqrt{x}}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,2]. \end{cases}$

   είναι μη ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ επειδή δεν είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό, αφού για την ακολουθία $x_n = \dfrac{4}{\pi + 8n\pi}$, $n = 1, 2, ...$, ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3\sqrt{x_n}}{2}\cos\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\sin\dfrac{1}{x_n} \right) = \infty$.

   Η f έχει παράγουσα τη συνάρτηση
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}, & x \in (0,2]. \end{cases}$$

Θεώρημα 4.5.3. *Αν η f είναι συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η F είναι συνάρτηση τέτοια ώστε*

(i) *$F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus \{c_1, ..., c_k\}$ και*

(ii) *F συνεχής στο $[a,b]$,*

τότε
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.1.

Αρκεί να συμπεριληφθούν στον διαμερισμό $\mathcal{D}$ τα σημεία $c_1, ..., c_k$.

□

Παράδειγμα 4.5.4. Η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ e^x, & 0 < x \le \ln 2 \end{cases}$$
έχει ένα σημείο ασυνέχειας $x = 0$. Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\frac{\pi}{2}, \ln 2]$. Η συνάρτηση
$$F(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ e^x, & \text{αν } 0 < x \le \ln 2 \end{cases}$$
είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \ln 2]$ και $F'(x) = f(x)$ για $x \in [-\frac{\pi}{2}, \ln 2] \setminus \{0\}$.

Από το Θεώρημα 4.5.3
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\ln 2} f(x)dx = F(\ln 2) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 0 = 2$$

4.6 Ιδιότητες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

4.6.1. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a,b]$ και $[b,c]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,c]$ και*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a,b]$ και $[b,c]$, από το Θεώρημα 4.3.1, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερισμοί $\mathcal{D}_1$ του $[a,b]$ και $\mathcal{D}_2$ του $[b,c]$, τέτοιοι ώστε

$$U(f,\mathcal{D}_1) - L(f,\mathcal{D}_1) < \varepsilon/2 \text{ και } U(f,\mathcal{D}_2) - L(f,\mathcal{D}_2) < \varepsilon/2.$$

Προφανώς $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ είναι διμερισμός του $[a,c]$ για τον οποίο ισχύει

$$U(f,\mathcal{D}) - L(f,\mathcal{D}) = (U(f,\mathcal{D}_1) + U(f,\mathcal{D}_2)) - (L(f,\mathcal{D}_1) + L(f,\mathcal{D}_2)) < \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{D}_1) + L(f,\mathcal{D}_2) &= L(f,\mathcal{D}) \le \int_a^c f(x)dx \le U(f,\mathcal{D}) = U(f,\mathcal{D}_1) + U(f,\mathcal{D}_2) \\ L(f,\mathcal{D}_1) + L(f,\mathcal{D}_2) &\le \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \le U(f,\mathcal{D}_1) + U(f,\mathcal{D}_2). \end{aligned}$$

Επομένως $\left| \int_a^c f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right) \right| < \varepsilon.$

Άρα, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$

□

4.6.2. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο μεγαλύτερο από τα διαστήματα που ορίζουν τα σημεία $a,b,c \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Απόδειξη. Αν $a < c < b$, τότε από την ιδιότητα 4.6.1 συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Επομένως

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Η ιδιότητα αποδεικνύεται όμοια για οποιαδήποτε άλλη διάταξη των a, b, c.

□

4.6.3. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η cf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)d \tag{4.6}$$

Απόδειξη. Για $c = 0$ η ισχύς του Θεωρήματος είναι προφανής.

Έστω $c \neq 0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}$ του $[a, b]$ τέτοιος ώστε $U(f, \mathcal{D}) - L(f, \mathcal{D}) < \varepsilon/|c|$.

Αν $c > 0$, τότε

$$L(cf, \mathcal{D}) = cL(f, \mathcal{D}) \leq c\int_a^b f(x)dx \leq cU(f, \mathcal{D}) = U(cf, \mathcal{D}). \tag{4.7}$$

Αν $c < 0$, τότε

$$L(cf, \mathcal{D}) = cU(f, \mathcal{D}) \leq c\int_a^b f(x)dx \leq cL(f, \mathcal{D}) = U(cf, \mathcal{D}). \tag{4.8}$$

Από τις σχέσεις (4.7) και (4.8) συνεπάγεται ότι

$$U(cf, \mathcal{D}) - L(cf, \mathcal{D}) = |c|\,(U(f, \mathcal{D}) - L(f, \mathcal{D})) < \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1 η cf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Οπότε

$$L(cf, \mathcal{D}) \leq \int_a^b cf(x)dx \leq U(cf, \mathcal{D}).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\left|\int_a^b cf(x)dx - c\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{4.9}$$

Από την (4.9) συνεπάγεται η (4.6).

□

4.6.4. *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε και η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω Δ ένα κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$. Τότε

$$\begin{aligned}\inf(f,\Delta)+\inf(g,\Delta) &\le \inf(f+g,\Delta) \le \\ &\le \sup(f+g,\Delta) \le \sup(f,\Delta)+\sup(g,\Delta).\end{aligned}$$

Άρα, $\tau(f+g,\Delta) \le \tau(f,\Delta)+\tau(g,\Delta)$.

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D}=\{a=x_0,...,x_n=b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1}) &\le \frac{\varepsilon}{2} \\ \sum_{i=1}^n \tau(g,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1}) &\le \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=1}^n \tau(f+g,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1}) \le \varepsilon.$$

Άρα, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}L(f,\mathcal{D})+L(g,\mathcal{D}) &\le L(f+g,\mathcal{D}) \le \\ &\le \int_a^b [f(x)+g(x)]dx \le \\ &\le U(f+g,\mathcal{D}) \le U(f,\mathcal{D})+U(g,\mathcal{D}) \text{ και} \\ L(f,\mathcal{D})+L(g,\mathcal{D}) &\le \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \le U(f,\mathcal{D})+U(g,\mathcal{D}).\end{aligned}$$

Επειδή $U(f,\mathcal{D})+U(g,\mathcal{D})-(L(f,\mathcal{D})+L(g,\mathcal{D}))<\varepsilon$ προκύπτει ότι

$$\left|\int_a^b [f(x)+g(x)]dx - \left(\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\right)\right| < \varepsilon.$$

Άρα, ισχύει η ισότητα (4.10).

□

4.6.5. *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε και το γινόμενό τους fg είναι συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις f και g ως ολοκληρώσιμες είναι φραγμένες.

Επομένως, $|f(x)| < M$ και$|g(x)| < M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω Δ ένα κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$.

Για οποιαδήποτε $x, x' \in \Delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x')g(x') &= f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x') = \\ &= f(x)(g(x) - g(x')) + (f(x) - f(x'))g(x') \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| &= |f(x)||g(x) - g(x')| + |f(x) - f(x')||g(x')| \leq \\ &\leq M\tau(g,\Delta) + M\tau(f,\Delta) \end{aligned}$$

Άρα, $\tau(fg,\Delta) \leq M(\tau(f,\Delta) + \tau(g,\Delta))$.

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) &< \frac{\varepsilon}{2M} \\ \sum_{i=1}^{n} \tau(g,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) &< \frac{\varepsilon}{2M}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \tau(fg,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) &\leq \\ \leq \sum_{i=1}^{n} M\Big(\tau(f,[x_{i-1},x_i]) + \tau(g,[x_{i-1},x_i])\Big)(x_i - x_{i-1}) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.3.3, η fg είναι ολοκληρώσιμη.

□

4.6.6. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\inf(f,[a,b]) > 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $m = \inf(f,[a,b]) > 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon m^2.$$

Επειδή η f είναι θετική, προκύπτει ότι

$$\inf(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i]) = \frac{1}{\sup(f,[x_{i-1},x_i])},\ \sup(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i]) = \frac{1}{\inf(f,[x_{i-1},x_i])}.$$

Άρα, για κάθε i:

$$\begin{aligned}\tau(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i]) &= \sup(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i]) - \inf(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i]) = \\ &= \frac{\sup(f,[x_{i-1},x_i]) - \inf(f,[x_{i-1},x_i])}{\sup(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot \inf(f,[x_{i-1},x_i])} \leq \frac{\tau(f,[x_{i-1},x_i])}{m^2}\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω

$$\sum_{i=1}^{n} \tau(\frac{1}{f},[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1})}{m^2} < \varepsilon.$$

Άρα, η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

□

Παραδείγματα 4.6.7. 1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ e^x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Η f έχει ένα σημείο ασυνέχειας στο $[-\frac{\pi}{2}, 1]$: το σημείο $x = 0$.

Από την ιδιότητα 4.4.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

Από την ιδιότητα 4.6.1,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{1} e^x dx = \\ &= -\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x\Big|_{0}^{1} = e - 2\end{aligned}$$

2. $$\int_0^4 |3-x|dx = \int_0^3 |3-x|dx + \int_3^4 |3-x|dx =$$
$$= \int_0^3 (3-x)dx + \int_3^4 (x-3)dx =$$
$$= -\frac{(3-x)^2}{2}\bigg|_0^3 + \frac{(x-3)^2}{2}\bigg|_3^4 = -4$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\cos 2mx)dx}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx dx =$$
$$= \frac{x}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin 2mx}{4m}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

4.7 Ανισότητες μεταξύ των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

4.7.1. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Απόδειξη. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τα αθροίσματα Darboux της f είναι μη αρνητικά. Οπότε για τυχαίο διαμερσμό $\mathcal{D}$ του $[a,b]$ ισχύει
$$0 \leq L(f,\mathcal{D}) \leq \int_a^b f(x)dx.$$
□

4.7.2. *Αν οι f και g είναι ολοκλήρώσιμες στο $[a,b]$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

Απόδειξη. Επειδή $g(x) - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, από την πρόταση 4.7.1 έπεται ότι
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0.$$
□

4.7.3. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την Ιδιότητα 4.7.2, αφού

$$m(b-a) = \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a)$$

□

4.7.4. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Έστω Δ ένα κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$. Αν $x, x' \in \Delta$, τότε συμπεραίνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
||f(x)| - |f(x')|| &\leq |f(x) - f(x')| \leq \tau(f,\Delta) \\
|f(x')| - \tau(f,\Delta) &\leq |f(x)| \\
|f(x')| - \tau(f,\Delta) &\leq \inf(|f|,\Delta) \\
|f(x')| &\leq \inf(|f|,\Delta) + \tau(f,\Delta) \\
\sup(|f|,\Delta) &\leq \inf(|f|,\Delta) + \tau(f,\Delta) \\
\sup(|f|,\Delta) - \inf(|f|,\Delta) &\leq \tau(f,\Delta) \\
\tau(|f|,\Delta) &\leq \tau(f,\Delta)
\end{aligned}$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{x_0, ..., x_n\}$ του $[a,b]$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^n \tau(|f|,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \tau(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon.$$

Άρα, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επειδή $-|f(x) \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,b]$, παίρνουμε

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.12}$$

Από τις (4.12) έπεται η (4.11).

□

4.8 Θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 4.8.1. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \tag{4.13}$$

όπου $\inf(f,[a,b]) \leq \mu \leq \sup(f,[a,b])$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $\inf(f,[a,b]) \leq f(x) \leq \sup(f,[a,b])$. Από την πρόταση 4.7.3

$$\inf(f,[a,b])(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup(f,[a,b])(b-a).$$

Άρα,

$$\inf(f,[a,b]) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \sup(f,[a,b]).$$

Για $\mu = \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, παίρνουμε την (4.13).

□

Ορισμός 4.8.2. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε ο αριθμός

$$\mu = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

καλείται *μέση τιμή* της f στο $[a,b]$.

Σημείωση 4.8.3. Με τις προυποθέσεις του Θεωρήματος 4.8.1

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \mu(a-b),$$

όπου $\inf(f,[a,b]) \leq \mu \leq \sup(f,[a,b])$.

Πόρισμα 4.8.4. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ όπου } c \in [a,b].$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\min(f,[a,b])$ και $\max(f,[a,b])$ είναι η ελάχιστη τιμή και η μέγιστη τιμή, αντίστοιχα, της συνεχούς συνάρτησης f στο $[a,b]$. Από το Θεώρημα 4.8.1

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \text{ όπου } \min(f,[a,b]) \leq \mu \leq \max(f,[a,b])$$

Από την συνέχεια της f προκύπτει επίσης ότι $\mu = f(c)$, όπου $a \leq c \leq b$.

□

4.9 Ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του άνω ορίου.

Θεώρημα 4.9.1. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, τότε η συνάρτηση*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b]$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [a,b]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \Phi(x) = \Phi(x_0)$.

Για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = \Phi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Από το Θεώρημα 4.8.1 προκύπτει ότι

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \mu(x)(x-x_0),$$

όπου $\mu(x)$ βρίσκεται μεταξύ του μέγιστου κάτω φράγματος και του ελάχιστου άνω φράγματος της f στο διάστημα με άκρα τα σημεία x_0 και x.

Επειδή $\inf(f,[a,b]) \leq \mu(x) \leq \sup(f,[a,b])$ για κάθε $x \in [a,b]$, η συνάρτηση $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}$, είναι φραγμένη. Άρα

$$\lim_{x\to x_0} \Phi(x) = \lim_{x\to x_0} \left[\Phi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt\right] = \Phi(x_0) + \lim_{x\to x_0} \mu(x)(x-x_0) = \Phi(x_0).$$

□

Θεώρημα 4.9.2. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η συνάρτηση*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b]$$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τότε

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω m και M το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα, αντίστοιχα, της f στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Τότε

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m \leq M \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από το Θεώρημα 4.8.1 της μέσης τιμής, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt = \mu(x)(x - x_0),$$

όπου $m \leq \mu(x) \leq M$. Από τα παραπάνω

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m \leq \mu(x) \leq M \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως $|\mu(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{x \to x_0} \mu(x) = f(x_0)$. Συνεπώς

$$\Phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \mu(x) = f(x_0).$$

□

Πόρισμα 4.9.3. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η συνάρτηση*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b]$$

είναι παράγουσα της f στο $[a,b]$.

Θεώρημα 4.9.4. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η F είναι οποιαδήποτε παράγουσα της f στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού 4.5.1, επειδή η f, ως συνεχής στο $[a,b]$, είναι ολοκληρώσιμη στο στο $[a,b]$.

Μια διαφορετική απόδειξη είναι η ακόλουθη. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b],$$

είναι παράγουσα της f. Επομένως $\Phi(x) = F(x) + c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Άρα, $\Phi(a) = F(a) + c$. Όμως $\Phi(a) = 0$. Συνεπώς $c = -F(a)$.

Από τα παραπάνω $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Για $x = b$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) = F(b) - F(a).$$

□

Παραδείγματα 4.9.5.

1. $\displaystyle\int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}.$

2. $$\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1\right) = $$
   $$= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12a}.$$

3. Μη συνεχής συνάρτησης με παράγουσα.

   Θεωρούμε την συνάρτηση

   $$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{2}{\pi}] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, διότι ενώ η ακολουθία $\left\{\frac{1}{2\pi k}\right\}_{k=1}^\infty$ έχει όριο $x_0 = 0$ ισχύει $\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi k}\right) = -1 \neq 0 = f(x_0)$.

Μια παράγουσα της f είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{2}{\pi}] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η f είναι φραγμένη στο $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, αφού

$$\left| \, 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right| \leq \left| \, 2x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \, \cos \frac{1}{x} \right| \leq 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1 + 1 = \frac{4+\pi}{\pi}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, από το Θεώρημα 4.4.3 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$. Από το Θεώρημα 4.5.1:

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} f(x)dx = F\left(\frac{2}{\pi}\right) - F(0) = \frac{4}{\pi^2}.$$

Θεώρημα 4.9.6. *Αν Δ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f έχει παράγουσα στο Δ. Ειδικότερα, για κάθε $a \in \Delta$ η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in \Delta,$$

είναι καλά ορισμένη και είναι η παράγουσα της f στο Δ.

Απόδειξη. Έστω $a \in \Delta$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ, η f είναι συνεχής και, άρα ολοκληρώσιμη, σε κάθε υποδιάστημα του Δ. Συνεπώς είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$. Θα δείξουμε ότι η F είναι παράγουσα της f στο Δ.

Έστω $x_0 \in \Delta$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Έστω $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και t ανήκει ανήκει στο διάστημα με άκρα x και x_0 Τότε $t \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, επομένως $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \\
\left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt}{x - x_0} \right| = \\
\left| \frac{\int_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right) dt}{x - x_0} \right| &\leq \frac{\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| \, dt}{|x - x_0|} \leq \frac{\varepsilon |x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, ισοδύναμα $F'(x_0) = f(x_0)$.

Σημείωση 4.9.6. Αν για τη συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ θέσουμε

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)dt,\ x\in[a,b],$$

τότε η Ψ είναι συνεχής αφού

$$\Psi(x)=\int_x^a f(t)dt+\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(x)$$

και η Φ είναι συνεχής, όπως έχει αποδειχθεί παραπάνω.

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,b]$, τότε η Ψ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\Psi'(x_0)=-f(x_0)$. Αν η f είναι συνεχής σε όλο το διάστημα $[a,b]$, τότε η $\Psi'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

□

Παρατήρηση 4.9.7. Μια συνάρτηση f, η οποία είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και συνεχής στο $[a,b)$, είναι ολοκληρώσιμη (Θεώρημα 4.4.3). Η συνάρτηση

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx,\ x\in[a,b],$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a,b)$, η Φ είναι παράγουσα της f στο $[a,b)$. Για οποιαδήποτε άλλη παράγουσα F της f στο $[a,b)$ ισχύει ότι $F(x)=\Phi(x)+c$. Συνεπώς

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)=\lim_{x\to b^-}\Phi(x)=\lim_{x\to b^-}F(x)-c=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a).$$

Παρατηρούμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ είναι ανεξάρτητο από την τιμή της f στο σημείο $x=b$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα στο $[a,b]$ μιας συνάρτηση f φραγμένης και συνεχούς στο $[a,b)$ ακόμα και αν η f δεν είναι ορισμένη στο άκρο b, ως εξής:

$$\int_a^{b^-} f(x)dx=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a),\ \text{όπου } F \text{ είναι παράγουσα της } f \text{ στο } [a,b)$$

Όμοια αν η f είναι φραγμένη και συνεχής στο $(a,b]$ και F είναι μια παράγουσα της f στο $(a,b]$, τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\int_{a^+}^b f(x)dx=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)$$

Παράδειγμα 4.9.8. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $n = 1, 2, ...$, είναι συνεχής στο [0,1), δεν ορίζεται για $x = 1$ και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{x\to 1^+} (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = n.$$

Άρα, η f είναι φραγμένη στο $[0, 1)$. Μια παράγουσα της f στο $[0, 1)$ είναι η συνάρτηση $F(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1)$. Άρα,

$$\int_0^{1^-} \frac{1-x^n}{1-x} dx = \lim_{x\to 1^-} F(x) - F(0) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

4.10 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 4.10.1. *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και οι συναρτήσεις f' και g' είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Επειδή οι f και g είναι παραγωγίσιμες, έπεται ότι

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες, άρα ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Οι συναρτήσεις $f'g$ και fg' είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ ως γινόμενα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $(fg)'$, ως άθροισμα των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f'g$ και fg', είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επειδή η fg είναι παράγουσα της $(fg)'$ έχουμε

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x) + \int_a^b f(x)g'(x). \tag{4.15}$$

Από τις (4.15) έπεται ο τύπος (4.14).

□

Παραδείγματα 4.10.2.

1. $$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{ax}dx &= \int_0^1 x\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' dx = x\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x'\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)dx = \\ &= \frac{e^a}{a} - \int_0^1\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)dx = \frac{e^a}{a} - \left(\frac{e^{ax}}{a^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (\sin x)' dx = (\cos^2 x \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)' \sin x dx = \\ &= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1-\cos^2 x) dx = \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.\end{aligned}$$

Μεταφέροντας το τελευταίο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της ισότητας, παίρνουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = \frac{2}{3}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

3. $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' dx = \\ &= \frac{\sin x \sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left(\frac{\cos 3x}{3}\right)' dx = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x \cos 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx\right) = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx.\end{aligned}$$

Άρα, $\frac{8}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx = -\frac{2}{9}$. Συνεπώς, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx = -\frac{1}{4}$.

4.11 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 4.11.1. *Έστω ότι*

(*i*) *η συνάρτηση* $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *είναι επί,* $\varphi(c) = a$ *και* $\varphi(d) = b$,

(*ii*) *η* φ *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[c, d]$ *και*

(*iii*) *η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής.*

Τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{4.16}$$

Απόδειξη. Έστω F μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, b]$. Για την συνάρτηση $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ έχουμε

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Επομένως η Φ είναι μια παράγουσα της $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) &= F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \\ &= \Phi(d) - \Phi(c) = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \end{aligned}$$

□

Όμοια αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.11.2. *Έστω ότι*

(*i*) *η συνάρτηση* $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *είναι επί,* $\varphi(c) = b$ *και* $\varphi(d) = a$,

(*ii*) *η* φ *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[c, d]$ *και*

(*iii*) *η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής.*

Τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_d^c f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{4.17}$$

Πόρισμα 4.11.3. *Αν η συνάρτηση $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ είναι ένα προς ένα, επί και έχει συνεχή παράγωγο στο $[c,d]$ και η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε ισύουν οι τύποι*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{4.18}$$

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)dx \tag{4.19}$$

Παραδείγματα 4.11.4.

1. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$.

   Θέτοντας $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, παίρνουμε
   $$dx = \cos t dt \text{ και } \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$
   Για $x = \varphi(t) = \sin t$ έχουμε $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$. Από τον τύπο (4.18):
   $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)(\sin t)' dt.$

   Θέτοντας $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, παίρνουμε
   $$1 - \sin^2 t = 1 - x^2 \text{ και } (\sin t)' dt = dx.$$
   Από τον τύπο (4.19):
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_{\sin 0}^{\sin \frac{\pi}{2}} (1-x^2)dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

3. Για να υπολογήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα
   $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{t^2} \sin\frac{1}{t} dt$$
   εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \varphi(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Οπότε
   $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{t^2} \sin\frac{1}{t} dt = -\int_{\varphi(\frac{2}{\pi})}^{\varphi(\frac{3}{\pi})} \sin x dx = \cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$

4.12 Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.12.1. *Έστω $a > 0$.*

1. *Αν η $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιττή, τότε $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.*
2. *Αν η $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Απόδειξη. Αν f είναι περιττή, τότε $f(-x) = -f(x)$. Με αντικατάσταση του x με $-x$ παίρνουμε

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

$$\text{Άρα, } \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Αν f είναι άρτια, τότε $f(-x) = f(x)$, επομένως, με αντικατάσταση του x με $-x$, παίρνουμε

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-x)dx = -\int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

$$\text{Άρα, } \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Παραδείγματα 4.12.2.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι άρτια, επομένως για $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} \cos x dx = 2\int_{0}^{a} \cos x dx = 2\sin x\Big|_{0}^{a} = 2\sin a$$

2. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι περιττή, επομένως $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin x dx = 0$.

3. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι άρτια, επομένως για $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} |x|dx = 2\int_{0}^{a} |x|dx = 2\int_{0}^{a} xdx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^a = a^2$$

4. Η συνάρτηση $f(x) = x^5 \cos x$ είναι περιττή, άρα $\int_{-a}^{a} x^5 \cos x dx = 0$.

4.13 Γενικευμένα θεωρήματα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 4.13.1. *Αν στο $[a, b]$ η f είναι ολοκληρώσιμη και η g είναι ολοκληρώσιμη και δεν αλλάζει πρόσημο, τότε*

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \mu \int_{a}^{b} g(x)dx, \tag{4.20}$$

όπου $\inf(f, [a, b]) \leq \mu \leq \sup(f, [a, b])$.

Απόδειξη. Αν $g(x) \geq 0$ στο $[a, b]$, τότε $\int_{a}^{b} g(x)dx \geq 0$.

Η ισχύς του Θεωρήματος είναι προφανής για $\int_{a}^{b} g(x)dx = 0$.

Αν $\int_{a}^{b} g(x)dx > 0$, τότε θέτουμε $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Αφού η g είναι μη αρνητική έχουμε για κάθε $x \in [a, b]$:

$$g(x)\inf(f, [a, b]) \leq g(x)f(x) \leq g(x)\sup(f, [a, b]).$$

Επομένως

$$\inf(f, [a, b]) \int_{a}^{b} g(x)dx \leq \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx \leq \sup(f, [a, b]) \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Άρα, $\inf(f, [a, b]) \leq \mu \leq \sup(f, [a, b])$.

Αν $g(x) \leq 0$ στο $[a, b]$, τότε $-g(x) \geq 0$. Οπότε, όπως αποδείξαμε,

$$\int_{a}^{b} f(x)(-g(x))dx = \mu \int_{a}^{b} (-g(x))dx,$$

που ισιδυναμεί με τον τύπο (4.20).

□

Πόρισμα 4.13.2. *Αν στο* $[a, b]$ *η* f *είναι συνεχής στο και η* g *είναι ολοκληρώσιμη και δεν αλλάζει πρόσημο, τότε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx, \text{ όπου } c \in [a, b].$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση f, ως συνεχής, έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$. Από το Θεώρημα 4.13.1

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx, \text{ όπου } \min(f, [a, b]) \leq \mu \leq \max(f, [a, b])$$

Από την συνέχεια της f προκύπτει $\mu = f(c)$, όπου $a \leq c \leq b$.

□

Θεώρημα 4.13.3. *Αν στο* $[a, b]$ *η* f *είναι ολοκληρώσιμη και η* h *είναι φθίνουσα και μη αρνητική, τότε*

$$\int_a^b h(x)f(x)dx = h(a)\int_a^\xi f(x)dx, \text{ όπου } \xi \in [a, b]. \tag{4.21}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε $K = \sup(|f|, [a, b])$.

Επειδή η h είναι ολοκληρώσιμη (Θεώρημα 4.4.1), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμερισμός $\mathcal{D} = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ του $[a, b]$ για τον οποίο

$$\sum_{i=1}^n \tau(h, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon/K.$$

Έχουμε

$$\int_a^b h(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} h(x)f(x)dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n h(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [h(x) - h(x_{i-1})]f(x)dx.$$

Η συνάρτηση $|h(x) - h(x_{i-1})|$ είναι αύξουσα στο $[x_{i-1}, x_i]$ με ελάχιστη τιμή 0 και με μέγιστη τιμή $h(x_{i-1}) - h(x_i) = \tau(h, [x_{i-1}, x_i])$. Άρα,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x) - h(x_{i-1})|dx = \mu_i(x_i - x_{i-1}),\ 0 \leq \mu_i \leq \tau(h, [x_{i-1}, x_i]).$$

Από τα παραπάνω

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b h(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^n h(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right| &\leq \\
\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x)-h(x_{i-1})||f(x)|\, dx &\leq \\
\leq K\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x)-h(x_{i-1})|\, dx &\leq \\
\leq K\sum_{i=1}^n \tau(h,[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1}) &< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Έστω ότι m και M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, αντίστοιχα, της συνεχούς συνάρτησης $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)dx,\ t\in[a,b]$. Τότε $m\leq F(x_i)\leq M$, $i=0,...,n$. Επομένως

$$
\sum_{i=1}^n h(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^n h(x_{i-1})\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) =
$$

$$
= \left[\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)\Big(h(x_{i-1})-h(x_i)\Big)\right] + F(b)h(x_{n-1}) \in [mh(a), Mh(a)]
$$

Επειδή για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμερισμός $\{a=x_0,...,x_n=b\}$ του $[a,b]$ για τον οποίο η απόσταση μεταξύ των $\displaystyle\int_a^b h(x)f(x)dx$ και $\displaystyle\sum_{i=1}^n h(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ είναι $<\varepsilon$, έπεται ότι $\displaystyle\int_a^b h(x)f(x)dx\in[mh(a),Mh(a)]$.

Αφού η $h(a)F:[a,b]\to[mh(a),Mh(a)]$ είναι συνεχής, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$
\int_a^b h(x)f(x)dx = h(a)F(\xi)\left(=h(a)\int_a^\xi f(x)dx\right).
$$

□

Θεώρημα 4.13.4. *Αν στο $[a,b]$ η f είναι ολοκληρώσιμη και η g είναι φθίνουσα, τότε*

$$
\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ \text{όπου } \xi\in[a,b]. \quad (4.22)
$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $h(x) = g(x) - g(b)$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική στο $[a, b]$. Από το Θεώρημα 4.13.3 υπάρχει $\xi \in [a, b]$ για το οποίο ισχύει

$$\int_a^b (g(x) - g(b)) f(x) dx = (g(a) - g(b)) \int_a^\xi f(x) dx = \tag{4.23}$$

$$= g(a) \int_a^\xi f(x) dx - g(b) \left(\int_a^b f(x) + \int_b^\xi f(x) \right) =$$

$$= \left(g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx \right) - g(b) \int_a^b f(x) dx$$

Από τις ισότητες (4.23) προκύπτει ο τύπος (4.22).

4.14 Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος.

4.14.1 Υπολογισμός με ολοκλήρωση των εμβαδών.

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν E του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της $y = f(x)$ και του τμήματος του x-άξονα από $x = a$ εως $x = b$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν E της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$ από $x = a$ εως $x = b$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Παραδείγματα 4.14.1.

1. Το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $y = \sin x$ και του τμήματος του x-άξονα από $x = 0$ εως $x = \pi$ είναι

$$E = \int_0^\pi |\sin x| dx = \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

2. Το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^3 + 1$ και των ευθειών $x = 0$, $x = 4$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$E = \int_0^4 |f(x) - g(x)| dx.$$

Επειδή $f(x) - g(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= -(x^2 - 1) \text{ για } x \in [0, 1] \\ |f(x) - g(x)| &= x^2 - 1 \text{ για } x \in [1, 4]. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_1^4 |f(x) - g(x)| dx = \\ &= -\int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^4 (x^2 - 1) dx = \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^4 = \frac{52}{3} \end{aligned}$$

3. Θα βρούμε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που φράσσεται από τις παραβολές $y = 6x - x^2$ και $y = x^2 - 2x$ μεταξύ $x = 0$ και $x = 4$.

Για $f(x) = 6x - x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x$, έχουμε:

$$|f(x) - g(x)| = |(6x - x^2) - (x^2 - 2x)| = |8x - 2x^2|$$

Για $x \in [0, 4]$ ισχύει $8x - 2x^2 = 2x(4 - x) > 0$. Αρα,

$$E = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

4.14.2 Υπολογισμός με ολοκλήρωση των όγκων στερεών

Ο όγκος V του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή της συνεχούς καμπύλης $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ γύρω από τον x-άξονα υπολογίζεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Παραδείγματα 4.14.2.

1. Ο όγκος του κυλίνδρου που σχηματίζεται από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος $f(x) = r$, $x \in [0, h]$ γύρω από τον x-άξονα είναι

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h$$

2. Ο όγκος του ορθού κυκλικού κώνου με ακτίνα βάσης r και ύψος h υπολογίζεται από τον τύπο $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

   Πράγματι, ο κώνος σχηματίζεται από την περιστροφή του ευθύγραμμου τμήματος $y = \dfrac{r}{h}\, x$, $x \in [0, h]$, γύρω από τον x-άξονα, άρα

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\, x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

3. Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας r υπολογίζεται από τον τύπο $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

   Η σφαίρα σχηματίζεται από την περιστροφή του ημικύκλιου $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, γύρω από τον x-άξονα. Άρα

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = \\ &= \pi r^2 \left(x|_{-r}^r\right) - \pi \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-r}^r\right) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

4.14.3 Υπολογισμός με ολοκλήρωση του μήκους τόξου καμπύλης $y = f(x)$

Αν f είναι μιά συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε το μήκος τόξου της καμπύλης $y = f(x)$ μεταξύ των σημείων $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$l_{A,B} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx$$

Παράδειγμα 4.14.3. Να βρεθεί το μήκος τόξου $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [3, 8]$.

Λύση: $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$ και $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1+x}$

$$\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx = \int \sqrt{1+x}\; dx = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

Για $A = (3, f(3))$, $B = (8, f(8))$ βρίσκουμε

$$l_{A,B} = \int_3^8 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx = \left.\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_3^8 = \frac{38}{3}$$

4.15 Ασκήσεις

4.15.1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{αν } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{αν } x = 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x \in (1, 3) \\ 1, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 3]$ και να βρεθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα της.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τα Θεωρήματα 4.4.3, 4.4.4 και την ιδιότητα 4.6.2.

4.15.2. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 f(x)dx = 0$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } x = \frac{m}{n} \in (0, 1] \text{ είναι ανάγωγο κλάσμα} \\ 0, & \text{αν } x \in (0, 1) \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

Λύση: $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$, επειδή $\inf(f, \Delta) = 0$ σε κάθε κλειστο υποδιάστημα Δ του $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι και $\overline{\int_0^1} f(x)dx = 0$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διμερισμός $\mathcal{D}$ του $[0,1]$ για τον οποίον $U(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$.

Διαλέγουμε έναν φυσικό αριθμό n ώστε $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω ότι το σύνολο $\mathcal{D}_n$ των ανάγωγων κλασμάτων με παρανομαστη $< n$ περιέχει k_n στοιχεία. Διαλέγουμε έναν φυσικό αριθμό k ώστε $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4k_n}$.

Έστω $\mathcal{D} = \{x_0, ..., x_{k+j}\}$ είναι ο διαμερισμός του $[0,1]$ που αποτελείατι απο τα σημεία του D_n και απ᾽ όλα τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{m}{k}$.

Το σύνολο $J = \{i \in \{0, ..., k+j\} : [x_i, x_{i-1}] \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset\}$ περιέχει το πολύ $2k_n$ στοιχεία. Αν $i \in J$, τότε $\sup(f, [x_i, x_{i-1}] < 1$. Αν $i \notin J$, τότε $[x_i, x_{i-1}]$ δεν περιέχει κανένα ανάγωγο κλάσμα με παρανομαστή $< n$ και, άρα, $\sup(f, [x_i, x_{i-1}] \leq \frac{1}{n}$. Συνεπώς

$$U(f, \mathcal{D}) \leq \sum_{i \in J} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin J} \frac{1}{n} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq 2k_n \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \cdot 1 < \varepsilon.$$

Ανισότητες μεταξύ των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

4.15.3. Να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^{10} \frac{xdx}{x^3 + 16} < 1.$

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 16}$, $x \in [0, 10]$, έχει μέγιστη τιμή την $f(2) = \dfrac{1}{12}$. Άρα, $\displaystyle\int_0^{10} \frac{xdx}{x^3 + 16} \leq \int_0^{10} \frac{dx}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} < 1.$

4.15.4. Να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\int_{-10}^{-1} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} dx > 5.$

Ο τύπος των των Newton-Leibniz

4.15.5. Έστω ότι η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) = f(b)$. Να βρεθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx.$

4.15.6. Βρείτε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α′) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(5x+11)^3}$ (δ′) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

(β′) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ (ε′) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

(γ′) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (στ′) $\displaystyle\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+a^2},\ a \neq 0$

Απαντήσεις: (α′) $\frac{7}{72}$, (β′) $\frac{2(\sqrt{8}-1)}{3}$, (γ′) $\frac{\pi}{6}$, (δ′) $e-\sqrt{e}$, (ε′) $\frac{(a-b)^3}{6}$, (στ′) $\frac{\pi}{12a}$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

4.15.7. Βρείτε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α′) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$ (β′) $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x dx$ (γ′) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx.$

(δ′) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x dx}{\cos^2 x}$ (Υπόδειξη: θέτουμε $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{1}{\cos x}$.)

Απαντήσεις: (α′) $\frac{e-2}{e}$, (β′) $6-2e$,(γ′) $\frac{\pi+1}{2}$, (δ′) $\frac{2\pi}{3}-\ln\tan\frac{5\pi}{12}$.

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

4.15.8. Βρείτε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α′) $\displaystyle\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ (β′) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$

(γ′) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x}$ (δ′) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$ (ε′) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Απαντήσεις: (α′) $\frac{32}{3}$, (β′) $\frac{4-\pi}{2}$, (γ′) $\frac{1}{3}$, (δ′) $1-\cos 1$, (ε′) $\ln 2$.

4.15.9. Να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{\pi r^2}{4}.$

Υπόδειξη: Να εφαρμοστεί η αλλαγή μεταβλητής $x = r\sin t$.

4.15.10. Να αποδειχθεί ότι αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, τότε για κάθε ακέραιο n ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$

Υπόδειξη: Αποδεικνύεται με αντικατάσταση $x = t - nT$.

Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

4.15.11. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες: $y = -x^2 + 2x$ και $y = -x$.

4.15.12. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ισούται με πab.

4.15.13. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ γύρω από τον x-άξονα.

4.15.14. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται, όταν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(0, r_1)$ και (h, r_2), $0 < r_1 < r_2$, περιστρέφεται γύρω από τον x-άξονα.

Λύση: Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) έχει εξίσωση

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(0, r_1)$ και (h, r_2) έχει εξίσωση

$$\frac{x}{h} = \frac{y - r_1}{r_2 - r_1},\ x \in (0, h)$$

Άρα για τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος έχουμε

$$y = \frac{r_2 - r_1}{h}\ x + r_1,\ x \in (0, h)$$

Συνεπώς $V = \pi \int_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\ x + r_1 \right)^2 dx =$

$$= \pi \int_0^h \frac{(r_2 - r_1)^2 x^2}{h^2}\ dx + \pi \int_0^h \frac{2(r_2 - r_1) x r_1}{h}\ dx + \pi \int_0^h r_1^2 dx =$$

$$= \left. \frac{\pi (r_2 - r_1)^2 x^3}{3h^2} \right|_0^h + \left. \frac{2\pi r_1 (r_2 - r_1) x^2}{2h} \right|_0^h + \pi r_1^2 x \big|_0^h =$$

$$= \frac{\pi (r_2 - r_1)^2 h^3}{3h^2} + \frac{2\pi r_1 (r_2 - r_1) h^2}{2h} + \pi r_1^2 h = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

4.15.15. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου $y = \ln\cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

4.15.16. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $x \in [1, 2]$.

Κεφάλαιο 5

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Στο Κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ότι στόν χώρο έχει οριστεί ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: O είναι η αρχή του συστήματος και $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι διανύσματα μοναδιαίου μήκους, τα οποία είναι κάθετα ανά δύο.

Για κάθε σημείο M του χώρου το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καλείται ακτινικό διάνυσμα (ή διάνυσμα θέσης, ή ακτίνα-διάνυσμα) του σημείου M και συμβολίζεται με $\overrightarrow{M}$. Για το M υπάρχει μοναδική τριάδα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, οι συντεταγμένες του M, για την οποία

$$\overrightarrow{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Θα συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων M και N με $|MN|$ και το μήκος του διανύσματος $\vec{v}$ με $|\vec{v}|$.

Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και το εξωτερικό γινόμενο με $\vec{a} \times \vec{b}$.

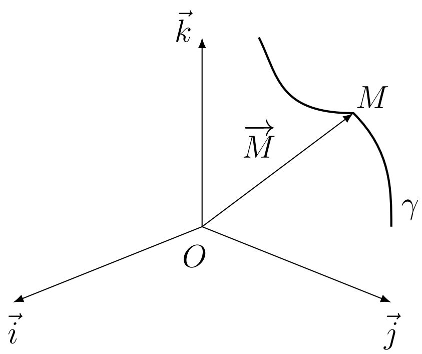
Το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ συμβολίζεται με $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

5.1 Διανυσματικές συναρτήσεις.

Ας φανταστούμε ότι ένα υλικό σημείο M του χώρου αλλάζει θέση κινούμενο κατά μήκος μιας τροχιάς γ, δηλαδή οι συντεταγμένες του M είναι συναρτήσεις του χρόνου t.

Αν T είναι η χρονική περίοδος κίνησης του M, τότε η θέσεις του σημείου M εκφράζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις με παράμετρο t – τον χρόνο:

$$x = r_1(t),\ y = r_2(t),\ z = r_3(t), t \in [0, T].$$



Για να προσδιορίσουμε την θέση $M(t)$ του M τη στιγμή t αρκεί να εφαρμόσουμε στην αρχή των αξόνων $O = (0,0,0)$ το διάνυσμα

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k},$$

το πέρας του οποίου είναι το σημείο $M(t) = r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$.

Η απεικόνιση $\vec{r}$ που ορίσαμε παραπάνω καλείται διανυσματική συνάρτηση, διότι σε κάθε t αντιστοιχεί ένα ακτινικό διάνυσμα $\vec{r}(t)$ του χώρου. Επειδή υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{r}(t)$ και των περάτων τους $r(t)$, η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}$ θα μπορούσε να οριστεί από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\vec{r} : [0,T] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))\,.$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις r_1, r_2, r_3 καλούνται συντεταγμένες συναρτήσεις της $\vec{r}$ ή οι συνιστώσες της $\vec{r}$ ως προς τους άξονες Ox, Oy και Oz, αντίστοιχα. Παραθέτουμε τον γενικό ορισμό μιας διανυσματικής συνάρτησης.

Ορισμός 5.1.1. Κάθε απεικόνιση $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.

Η $\vec{r}$ σε κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ αντιστοχεί το διάνυσμα

$$\vec{r}(x_1, \ldots, x_n) = r_1(x_1, \ldots, x_n)\vec{i} + r_2(x_1, \ldots, x_n)\vec{j} + r_3(x_1, \ldots, x_n)\vec{k}.$$

Παραδείγματα 5.1.2.

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in V \subseteq R$ αποτελείται από τα πέρατα των διανυσμάτων:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, t \in V.$$

2. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$, ορίζεται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = \rho \cos t \vec{i} + \rho \sin t \vec{j}, \ t \in [0, 2\pi).$$

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$, $x \in (0, \infty)$ ορίζεται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t \vec{j}, \ t \in (0, \infty).$$

4. Θεωρούμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = \rho \cos t \vec{i} + \rho \sin t \vec{j} + t\vec{k}, \ t \in (-\infty, \infty),$$

για σταθερό $\rho \in (0, \infty)$. Το πέρας του διανύσματος $\vec{r}(t)$ διαγράφει μιά έλικα που βρίσκεται πάνω στον κύλιδρο $x^2 + y^2 = \rho^2$.

5.1.1 Όριο και συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Ορισμός 5.1.3. Έστω $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subseteq \mathbb{R}$, μια διανυσματική συνάρτηση και t_0 σημείο συσσώρευσης του V. Θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι το όριο της $\vec{r}$ όταν το t τείνει στο t_0, γράφοντας $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, όταν $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$.

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}$, $t \in V \subseteq \mathbb{R}$, μια διανυσματική συνάρτηση και t_0 σημείο συσσώρευσης του V. Τότε*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) = a_1, \\ \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t) = a_2, \\ \lim\limits_{t \to t_0} r_3(t) = a_3. \end{cases}$$

Παράδειγμα 5.1.5. Αν $\vec{r}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + t\vec{k}$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \frac{\pi}{6}} \vec{r}(t) &= \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{6}} \sin(t) \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{6}} \cos(t) \right) \vec{j} + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{6}} t \right) \vec{k} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{\pi}{6}\vec{k} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Θεώρημα 5.1.6. *Αν* $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{u}(t) = \vec{b}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t) = \vec{c}$ *και* $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = L$, *τότε*

1. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t) + \vec{u}(t)] = \vec{a} + \vec{b}$.
2. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t) \cdot \vec{u}(t)] = \vec{a} \cdot \vec{b}$.
3. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{r}(t) \times \vec{u}(t)] = \vec{a} \times \vec{b}$.
4. $\lim\limits_{t\to t_0}[f(t)\vec{r}(t)] = L\vec{a}$.
5. $\lim\limits_{t\to t_0}\langle \vec{r}(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle$.

Ορισμός 5.1.7. Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subseteq \mathbb{R}$ καλείται συνεχής στο $t_0 \in V$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in V \cap (t_0 - \delta, t + \delta)$ ισχύει: $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \varepsilon$.

Θεώρημα 5.1.8. *Μια διανυσματική συνάρτηση*

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k},\ t \in V \subseteq \mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο $t_0 \in V$, *αν και μόνον αν οι συναρτήσεις* r_1, r_2, r_3 *είναι συνεχείς στο* t_0.

5.1.2 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Ορισμός 5.1.9. Έστω $\vec{r} : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subseteq \mathbb{R}$ διανυσματική συνάρτηση και t_0 σημείο συσσώρευσης του V. Θα λέμε ότι η $\vec{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 όταν υπάρχει το όριο (το οποίο καλείται *παράγωγος* της $\vec{r}$ στο t_0):

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω* $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}$, $t \in V \subseteq \mathbb{R}$, *μια διανυσματική συνάρτηση και* t_0 *σημείο συσσώρευσης του* V.

Η η $\vec{r}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* t_0, *αν και μόνον αν οι συναρτήσεις* r_1, r_2, r_3 *είναι παραγωγίσιμες στο* t_0. *Επιπλέον,*

$$\vec{r}\,'(t) = r_1'(t)\vec{i} + r_2'(t)\vec{j} + r_3'(t)\vec{k}.$$

Παράδειγμα 5.1.11. Αν $\vec{r}(t) = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + t\vec{k}$, τότε

$$\vec{r}\,'(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + \vec{k}.$$

Θεώρημα 5.1.12. *Αν οι διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ και η πραγματική συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, τότε*

1. $[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) + \vec{v}\,'(t)$.

2. $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$.

3. $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}\,'(t)$.

4. $[f(t)\vec{u}(t)]' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}\,'(t)$.

5. $\langle \vec{r}(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle' = \langle \vec{r}\,'(t), \vec{u}(t), \vec{v}(t)\rangle + \langle \vec{r}(t), \vec{u}\,'(t), \vec{v}(t)\rangle + \langle \vec{r}(t), \vec{u}(t), \vec{v}\,'(t)\rangle$.

6. *Αν $h : \Delta_0 \to \Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ_0 και $\vec{u} : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, τότε*

$$[\vec{u}(h(\theta))]'_\theta = \vec{u}\,'_t(h(\theta)) \cdot h'(\theta).$$

Θεώρημα 5.1.13. *Αν η $\vec{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, τότε η $\vec{r}$ είναι συνεχής στο t_0.*

5.1.3 Μερικές παράγωγοι πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Οι πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής που μελετήσαμε ως τώρα χρησιμοποιούνται στα προβλήματα δύο μεταβλητών ποσοτήτων, από τις οποίες η μία, η y, εξαρτάται από μια ανεξάρτηη μεταβλητή, τη x, και η εξάρτηση αυτή περιγράφεται από την εξίσωση: $y = f(x)$.

Υπάρχουν όμως προβλήματα στα οποία οι μεταβαλλόμενες ποσότητες είναι περισσότερες από δύο και η μία εξαρτάται από τις άλλες.

Για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός ορθογωνίου εξαρτάται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τις διαστάσεις του, και η εξάρτηση περιγράφεται από τον τύπο $E = f(x, y)$ με $f(x, y) = xy$. Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου εξαρτάται από τρεις μεταβλητές, τις διαστάσεις του, και η εξάρτηση περιγράφεται από τον τύπο $V = f(x, y, z)$ με $f(x, y, z) = xyz$.

Ορισμός 5.1.14. Μια απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

Θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών ή τριών μεταβλητών.
Παραδείγματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι:

1. $z = f(x, y)$ με $f(x, y) = x + y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. $z = x \sin y + y$, δηλαδή $z = f(x, y)$ με $f(x, y) = x \sin y + y$, $0 < x, y < \pi$.

Παραδείγματα συναρτήσεων τριών μεταβλητών είναι:

1. $w = f(x, y, z)$ με $f(x, y, z) = x^2 + 3y + z^2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. $z = f(x, y, t)$ με $f(x, y, t) = t \sin x + t \sin y$, $(x, y) \in [0, 1]^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 5.1.15. Έστω $f : V \to \mathbb{R}$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^2$ μια πραγματική συνάρτηση τριων μεταβλητών. Οι μερικές παράγωγοι της f ως προς μεταβλητές x και y, αντίστοιχα, στο $(x_0, y_0) \in V$ είναι τα παρακάτω όρια, όταν υπάρχουν και είναι αριθμοί:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Όμοια ορίζονται ο μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών $f : V \to \mathbb{R}$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^3$ στο (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}$$

Οι μερικές παραγώγοι συμβολίζονται επίσης ως εξής:

$$f'_x(x_0, y_0),\ f_x(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Για να υπολογίσουμε την μερική παράγωγο μιας πραγματικής συνάρτησης f πολλών μεταβλητών ως προς μια μεταβλητή, θεωρούμε όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές και εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Παραδείγματα 5.1.16.

1. Αν $z = 3x^2 + x + \sin y$, τότε $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x + 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y$.

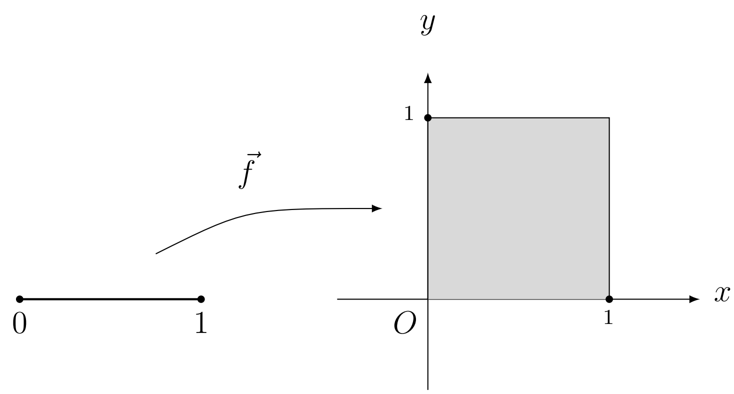
2. Αν $f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 4xy^2 - x^2yz^3$, τότε
$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 6xy^3 + 4y^2 - 2xyz^3, \\ f_y(x,y,z) &= 9x^2y^2 + 8xy - x^2z^3, \\ f_z(x,y,z) &= -3x^2yz^2 \end{aligned}$$

3. Θα βρούμε τις μερικές παραγώγους της $f(x, y, z) = xe^x + ye^z + e^z$ στο σημείο $(1, -1, 0)$:
$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= e^x + xe^x \Longrightarrow f_x(1,-1,0) = e + e = 2e, \\ f_y(x,y,z) &= e^z \qquad\quad \Longrightarrow f_y(1,-1,0) = e^0 = 1, \\ f_z(x,y,z) &= ye^z + e^z \Longrightarrow f_z(1,-1,0) = -e^0 + e^0 = 0. \end{aligned}$$

5.2 Οι έννοια της καμπύλης.

Η μελέτη μιας πραγματικής συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ καταλήγει στο πρόχειρο σχεδιασμό ενός είδους "καμπύλης"- της γραφικής παράστασης της f:
$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \Delta\}.$$
Με ανάλογο τρόπο σε κάθε συνεχής διανυσματική συναρτηση $\vec{r}(t), t \in \Delta$, με συνιστώσες $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ αντιστοιχεί το σύνολο
$$\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^3 : M = \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big), t \in \Delta\}.$$
Όμως η μορφή του συνόλου Γ μπορεί να μη θυμίζει σε τίποτα αυτό που συνήθως αποκαλούμε καμπύλη. Η ανακάλυψη αυτή ανήκει στον ιταλό μαθηματικό Peano, ο οποίος το 1890 κατασκεύασε μια συνεχής απεικόνιση $\vec{f}$ του διαστήματος $[0, 1]$ επί του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Η $\vec{f}$ όμως δεν είναι 1-1, απεικονίζει πολλά σημεία του $[0, 1]$ σε ένα σημείο του τετραγώνου. Επιπλέον η $\vec{f}$ δεν είναι 1-1 σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$.

Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ θυμίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα "παραμορφωμένο" και τοποθετημένο στο επίπεδο με ένα τέτοιο τρόπο που να μην διαπερνάει τον εαυτό του. Τέτοιου είδους σύνολα καλούνται τόξα. Ο αυστηρός ορισμός του τόξου είναι ο ακόλουθος:



Ορισμός 5.2.1. Ένα σύνολο $T \subseteq \mathbb{R}^3$ καλείται *τόξο*, όταν υπάρχει μια 1-1 και συνεχής διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{r}(t) = \vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}$ τέτοια ώστε $T = \{(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$.

Για να είναι τα σύνολα που θα όνομάσουμε καμπύλες μονοδιάστατα, αρκεί να είναι τροχές, οι οποίες αντστοιχούν σε διανυσματικές συνατρήσεις που είναι συνεχείς και τοπικά 1-1 σε ένα διάστημα. Οπότε κάθε σημείο της γ να έχει μια γειτονιά που να είναι τόξο.

Ορισμός 5.2.2. Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} : \Delta \to \mathbb{R}^3$ καλείται τοπικά 1-1, όταν για κάθε $t \in \Delta$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η $\vec{r}$ να είναι 1-1 στο σύνολο $\Delta \cap (t - \delta, t + \delta)$.

Ορισμός 5.2.3. Έστω ότι μια διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}, \quad t \in \Delta \subseteq \mathbb{R} \tag{5.1}$$

είναι συνεχής και τοπικά 1-1 σε στο διάστημα Δ. Το σύνολο

$$\gamma = \{(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in \Delta\}$$

καλείται *καμπύλη* με *παραμετρική παράσταση* (5.1). Η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης γ καλείται επίσης *διανυσματική παράσταση* ή *παραμετρικοποίηση* της γ.

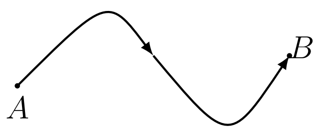
- Αν μια καμπύλη έχει παραμετρική παράσταση (5.1), τότε οι εξισώσεις

  $$x = r_1(t), y = r_2(t), z = r_3(t), \ t \in \Delta$$

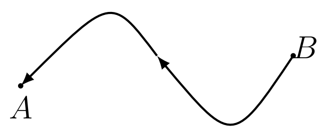
  καλούνται *παραμετρικές εξισώσεις* της γ. Οι παραμετρικές εξισώσεις εκφράζουν τις συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος $\vec{r}(t)$.

- Αν μια καμπύλη γ έχει παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t), t \in [a,b]$, τότε τα σημεία $A = \vec{r}(a)$ και $B = \vec{r}(b)$ καλούνται άκρα της καμπύλης γ.

- Σε μιά καμπύλη γ με άκρα A και B μπορούμε να ορίσουμε δύο κατευθήνσεις: από το A προς το B ή από το B προς το A.



από A προς B

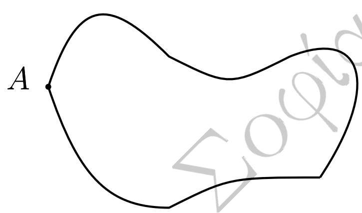


από B προς A

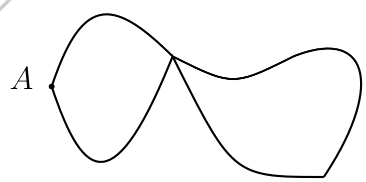
Μια καμπύλη με άκρα A και B, στην οποία έχει οριστεί μια κατεύθυνση καλείται *προσανατολισμένη καμπύλη*.

- Μια καμπύλη $\gamma : \vec{r}(t), t \in [a,b]$ καλείται *κλειστή*, όταν $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

- Μια καμπύλη $\gamma : \vec{r}(t), t \in [a,b]$ καλείται *απλή κλειστή*, όταν η $\vec{r}$ είναι ένα–προς–ένα στο (a,b) και $\vec{r}(a) = \vec{r}(b) = \vec{A}$.



απλή κλεστή καμπύλη



μη απλή κλεστή καμπύλη

- Το μήκος μιας καμπήλυς γ που έχει συνεχώς παραγωγίσιμη διανυσματική παράσταση $\vec{r}(t), t \in [a,b]$, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt.$$

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις που είναι παραμετρικές παραστάσεις καμπυλών, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.1. *Αν μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}$ με πεδίο ορισμού ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο Δ και $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ για κάθε $t \in \Delta$, τότε η $\vec{r}$ είναι συνεχής και τοπικά 1-1 στο Δ.*

Ορισμός 5.2.2. Μια καμπύλη γ καλείται *λεία* όταν έχει μια διανυσματική παράσταση $\vec{r}(t)$, $t \in \Delta$, τέτοια ώστε η $\vec{r}$ έχει συνεχή παράγωγο $\vec{r}\,'$ στο Δ και $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ για κάθε $t \in \Delta$.

Παραδείγματα 5.2.2.

1. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M = (x_M, y_M, z_M)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \neq \vec{0}$ είναι λεία καμπύλη με παραμετρική παράσταση:

$$\vec{r}(t) = (x_M + a_1 t)\vec{i} + (y_M + a_2 t)\vec{j} + (z_M + a_3 t)\vec{k}, t \in (-\infty, \infty).$$

Πράγματι, η $\vec{r}$ είναι 1-1 στο $(-\infty, \infty)$ και

$$\vec{r}\,'(t) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \neq \vec{0}.$$

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$ είναι λεία καμπύλη με παραμετρική παράσταση:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t\vec{j},\ t \in (0, \infty).$$

Πράγματι, η $\vec{r}$ είναι 1-1 στο $(-\infty, \infty)$ και

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} \neq \vec{0}.$$

3. Η έλλειψη $\gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ και $b > 0$, είναι λεία καμπύλη με παραμετρική παράσταση:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j},\ t \in [0, 2\pi].$$

Πράγματι, η $\vec{r}$ είναι 1-1 στο $(-\infty, \infty)$ και

$$\vec{r}\,'(t) = -a\sin t\vec{i} + b\cos t\vec{j} \neq \vec{0}.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία της παραμέτρου t είναι η εξής:

Παρατηρούμε ότι αν $(x, y) \in \gamma$, τότε $x^2 + \left(\dfrac{ay}{b}\right) = a^2$.

Θεωρούμε τον κύκλο $K : x^2 + y^2 = a^2$ και την 1-1 και επί απεικόνιση της έλλειψης στον κύκλο $f : \gamma \to K$ με $f(x, y) = (x, \frac{ay}{b})$.

Έστω $M = (x, \frac{ay}{b}) \in K$ και t είναι η γωνία από τον άξονα Ox προς την ημιευθεία $[OM)$ του κυκλου. Τότε $x = a\cos t$, $\frac{ay}{b} = a\sin t$.

5.3 Παραμετρικές παράστασεις καμπυλών.

Μια καμπύλη μπορεί να έχει πολλές παραμετρικές παραστάσεις.

Για παράδειγμα το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = a^2$ ακτίνας $a > 0$, με $y \geq 0$, έχει τις ακόλουθες παραμετρικές παραστάσεις:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= a\cos(2t)\vec{i} + a\sin(2t)\vec{j}, \ t \in [0, \pi/2] \\ \vec{g}(\theta) &= a\cos(\theta)\vec{i} + a\sin(\theta)\vec{j}, \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Θεωρούμε την 1-1, επί απεικόνιση: $[0, \pi/2] \xrightarrow{\phi} [0, \pi]$, με $\phi(t) = 2t$.

Τότε $\vec{r}(t) = \vec{g}(\phi(t))$. Δηλαδή, η παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t)$ προκύπτει από την παραμετρική παράσταση $\vec{g}(\theta)$ με "αλλαγή παραμέτρου" $\theta = 2t$.

Ορισμός 5.3.1. Μιά απεικόνιση $\phi : [a, b] \to [c, d]$ καλείται *επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου*, όταν η ϕ είναι επί, παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $\phi'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Ορισμός 5.3.2. Δύο παραμετρικές παραστάσεις

$$\vec{r}(t), \ t \in [a, b] \text{ και } \ \vec{g}(\theta), \ \theta \in [c, d]$$

μιάς λείας καμπύλης γ καλούνται ισοδύναμες όταν υπάρχει επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου $\phi : [a, b] \to [c, d]$ για την οποία $\vec{g}(\phi(t)) = \vec{r}(t)$:

$$[a, b] \xrightarrow{\phi} [c, d] \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

Σημειώσεις 5.3.3.

1. Αν η επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου ϕ είναι αύξουσα ($\phi(t) > 0$ για κάθε t), τότε η ϕ δεν αλλάζει τον προσανατολισμό της γ, διότι το πέρας του $\vec{g}(\theta)$ μεταβάλλεται από το $\vec{g}(c) = \vec{g}(\phi(a)) = \vec{r}(a) = A$ προς $\vec{g}(d) = \vec{g}(\phi(b)) = \vec{r}(b) = B$.

2. Αν η επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου ϕ είναι φθίνουσα ($\phi(t) < 0$ για κάθε t), τότε η ϕ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της γ, διότι το πέρας του $\vec{g}(\theta)$ μεταβάλλεται από το $\vec{g}(c) = \vec{g}(\phi(b)) = \vec{r}(b) = B$ προς $\vec{g}(d) = \vec{g}(\phi(a)) = \vec{r}(a) = A$.

3. Κάθε καμπύλη έχει άπειρου πλήθους παραμετρικές παραστάσεις.

4. Για οποιεσδήποτε ισοδύναμες παραμετρικές παραστάσεις $\vec{r}(t), \ t \in [a, b]$ και $\vec{g}(\theta), \ \theta \in [c, d]$ υπάρχουν αλλαγές παραμέτρων $\phi : [a, b] \to [c, d]$ και $\psi : [c, d] \to [a, b]$ για τις οποίες: $\vec{g}(\phi(t)) = \vec{r}(t)$ και $\vec{r}(\psi(\theta)) = \vec{g}(\theta)$, όπου $\psi = \phi^{-1}$.

Παραδείγματα 5.3.4.

1. Η $\phi : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με $\phi(t) = \arctan t$ είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, διότι επί, παραγωγίσιμη και $\phi'(t) = \frac{1}{1+t^2} \neq 0$ για κάθε $t \in (-\infty, \infty)$. Επειδή $\phi'(t) > 0$ για κάθε t η ϕ δεν αντιστρέφει τον προσανατολισμό των καμπυλών.

2. Η $\psi : [0,1] \to [a,b]$ με $\psi(t) = (a-b)t + b$ είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, διότι ψ είναι επί, παραγωγίσιμη και και $\phi'(t) = a - b \neq 0$ για κάθε $t \in (-\infty, \infty)$. Επειδή $\psi'(t) < 0$ για κάθε t, η ψ αντιστρέφει τον προσανατολισμό των καμπυλών.

5.4 Επικαμπύλια ολοκληρώματα α'-είδους.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους ορίζεται για μια πραγματική συνάρτηση F με πεδιό ορισμού μια καμπύλη γ. Η F και η γ δεν είναι οποιαδήποτε, αλλά έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους οονομάζεται επίσης επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης ως προς το μήκος τόξου.

Ορισμός 5.4.1. Θεωρούμε μια λεία καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$\gamma : \vec{r}(t) = \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big),\ t \in [a,b],$$

και μια συνεχής απεικόνιση $F : \gamma \to \mathbb{R}$. Έχουμε τις απεικονίσεις:

$$[a,b] \xrightarrow{\vec{r}} \gamma \xrightarrow{F} \mathbb{R}.$$

Η σύνθεση $F \circ \vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$F(\vec{r}(t)) = F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right).$$

Η συνέχεια της F πάνω στη γ σημαίνει ότι η $F \circ \vec{r}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους της F κατά μήκος της γ είναι αριθμός που συμβολίζεται με $\displaystyle\int_\gamma F ds$ και ορίζεται ως εξής:

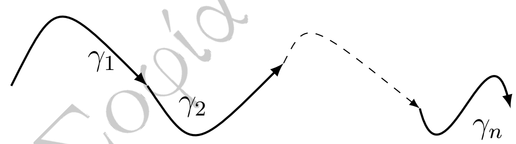
$$\int_\gamma F ds = \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) |\vec{r}'(t)|\, dt.$$

- Επειδή $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t) + r_3'^2(t)}$, έπεται ότι
$$\int_\gamma F ds = \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t) + r_3'^2(t)}\, dt.$$

- Έστω $A = r(a)$ και $B = r(b)$. Το $\displaystyle\int_\gamma F ds$ συμβολίζεται επίσης ως εξής:
$$\int_\gamma F(x,y,z)ds, \quad \int_{\widehat{AB}} F(x,y,z)ds, \int_{\widehat{AB}} F ds.$$

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης F πάνω στη κλειστή καμπύλη γ συμβολίζεται επίσης με $\displaystyle\oint_\gamma F ds$.

Ορισμός 5.4.2. Αν μια καμπύλη $\gamma = \widehat{AB}$ είναι ένωση λείων καμπυλών
$$\gamma_1 = \widehat{AA_1}, \gamma_2 = \widehat{A_1A_2}, \ldots, \gamma_n = \widehat{A_{n-1}B},$$
τότε
$$\int_\gamma F ds = \int_{\gamma_1} F ds + \int_{\gamma_2} F ds + \cdots + \int_{\gamma_n} F ds.$$



Παραδείγματα 5.4.3. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

1. $\displaystyle\int_\gamma (x+y)ds$, όπου $\gamma : \vec{r}(t) = (t, 1-t),\ t \in [0,1]$.

   Λύση: Για $F(x,y) = x+y$, $[a,b] = [0,1]$ και $\vec{r}\,'(t) = (1,-1)$ βρίσκουμε:
$$\begin{aligned}\int_\gamma F ds &= \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t)\right) |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_0^1 F\left(t, 1-t\right) |(1,-1)|\, dt = \\ &= \int_0^1 (t + (1-t))\sqrt{2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$, όπου $\gamma : \vec{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t),\ \ t \in [-\pi, 5\pi]$.

Λύση: Έχουμε $[a,b] = [-\pi, 5\pi],\ \vec{r}\,'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4)$,

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F ds &= \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) |\vec{r}\,'(t)| dt = \\
&= \int_{-\pi}^{5\pi} 5F\left(3\cos t, 3\sin t, 4t\right) dt = \\
&= \int_{-\pi}^{5\pi} 5\sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}\, dt = \int_{-\pi}^{5\pi} 15\, dt = 60\pi.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, όπου $\gamma : \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, t),\ \ t \in [0, 2\pi]$.

Λύση: Έχουμε $[a,b] = [0, 2\pi],\ \vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 1)$,

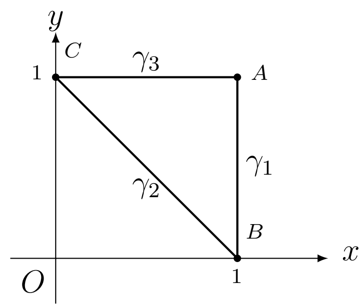
$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \\
F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) &= \frac{1}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + t^2} = \frac{1}{a^2+t^2} \\
|\vec{r}\,'(t)| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{a^2+1}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F ds &= \int_0^{2\pi} F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) |\vec{r}\,'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+1}dt}{a^2+t^2} = \\
&= \sqrt{a^2+1}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2+t^2} = \sqrt{a^2+1}\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\right]_0^{2\pi} = \\
&= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\arctan\frac{2\pi}{a}.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int_\gamma (x+y)ds$, όπου γ είναι το περίγραμμα του τριγώνου $\overset{\triangle}{ABC}$ με κορυφές

$$A=(1,1),\ B=(1,0),\ C=(0,1).$$



Λύση: Το περίγραμμα γ του τριγώνου $\overset{\triangle}{ABC}$ ένωση των πλευρών του $\overset{\triangle}{ABC}$: $\gamma_1=AB$, $\gamma_2=BC$, $\gamma_3=CA$. Για $F(x,y)=x+y$ παίρνουμε:

$$\int_\gamma F ds = \int_{\gamma_1} F ds + \int_{\gamma_2} F ds + \int_{\gamma_3} F ds = \int_{AB}(x+y)ds + \int_{BC}(x+y)ds + \int_{CA}(x+y)ds$$

Βρίσκουμε τις παραμετρικές εξισώσεις των πλευρών του $\overset{\triangle}{ABC}$:

$$\begin{aligned} AB &: \ x=1, y=t,\ t\in[0,1] \\ BC &: \ x=t, y=1-t,\ t\in[0,1] \\ CA &: \ x=t, y=1,\ t\in[0,1] \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{AB}(x+y)ds = \int_0^1 (1+t)|(1,t)'|dt = \int_0^1 (1+t)|(0,1)|dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\int_{BC}(x+y)ds = \int_0^1 (t+1-t)|(t,1-t)'|dt = \int_0^1 |(1,-1)|dt = \left[\sqrt{2}\ t\right]_0^1 = \sqrt{2}$$

$$\int_{CA}(x+y)ds = \int_0^1 (t+1)|(t,1)'|dt = \int_0^1 (t+1)|(1,0)|dt = \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Συνεπώς $\displaystyle\int_\gamma (x+y)ds = 3+\sqrt{2}$.

Σημειώσεις 5.4.4.

1. Θα εξηγήσουμε τον ρόλο του γράμματος s στον συμβολισμό $\int_\gamma F ds$ του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Θεωρούμε μια καμπύλη γ με παραμετρικοποίηση

$$\gamma : g(s) = \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big),\ s \in [0, b],$$

με την ιδιότητα

$$\sqrt{g_1'^2(s) + g_2'^2(s) + g_3'^2(s)} = 1,\ \forall s \in [0, b] \tag{5.2}$$

Για κάθε $s_0 \in [0, b]$, το μήκος τόξου από το $O = g(0)$ έως $M_0 = g(s_0)$ είναι

$$\ell(\widehat{OM_0}) = \int_0^{s_0} |g'(s)| ds = \int_0^{s_0} \sqrt{g_1'^2(s) + g_2'^2(s) + g_3'^2(s)} ds = \int_0^{s_0} ds = s_0.$$

Έστω $D_n = \{0 = s_0^n < s_1^n < ... < s_n^n < b\}$ είναι διαμερισμος του $[0, b]$ σε ίσα τμήματα μήκους $\triangle s_n$. Συμβολίζουμε $M_i = g(s_i^n)$. Τότε

$$\ell(\widehat{M_i M_{i+1}}) = \int_{s_i^n}^{s_{i+1}^n} |g'(s)| ds = \int_{s_i^n}^{0} ds + \int_0^{s_{i+1}^n} ds = -\int_0^{s_i^n} ds + \int_0^{s_{i+1}^n} ds = s_{i+1}^n - s_i^n.$$

Άρα, στον D_n αντιστοιχεί διαμερισμός της γ σε καμπύλες $\widehat{M_i M_{i+1}}$ μήκους $\triangle s_n$ με τα σημεία $\{g(0) = g(s_0^n), g(s_1^n), ..., g(s_n^n) = g(b)\}$. Μπορούμε να βλέπουμε τη γ σαν ευθύγραμμο τμήμα, πάνω στο οποίο είναι ορισμένη η συνάρτηση F με "μεταβλητή" το σημείο $g(s)$. Οπότε $\int_\gamma F ds = \int_\gamma F(g(s)) ds$ θυμίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης F πάνω στο "ευθύγραμμο τμήμα" γ. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι αν $\xi_i^n \in [s_{i-1}^n, s_i^n]$, τότε

$$\int_\gamma F ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(g(\xi_i^n)) \triangle s_n.$$

2. Κάθε καμπύλη $\gamma : \vec{r}(t) = \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big), t \in [a, b]$ έχει παραμετρική παράσταση με την ιδιότητα (5.2). Η παραμετρική παράσταση αυτή αντιστοιχεί στην αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\sigma(t) = \int_a^t \sqrt{r_1'^2(\tau) + r_2'^2(\tau) + r_3'^2(\tau)} d\tau,\ t \in [a, b].$$

Η $\sigma : [a, b] \to [0, \sigma(b)]$ είναι επί και 1-1, ως γνισίως αύξουσα.
Η απεικόνιση $g(s) = r(\sigma^{-1}(s)) : s \in [0, \sigma(b)]$ έχει την ιδιότητα (5.2).

5.4.1 Ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος α'-είδους.

Στις παρακάτω ιδιότητες με γ συμβολίζεται μια λεία καμπύλη.

1. *Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους μιας συνάρτησης F κατά μήκος της καμπύλης γ είναι ανεξάρτητο από την παραμετρική παράσταση της γ.*

Πράγματι, θεωρούμε δύο παραμετρικές παραστάσεις μιας καμπύλης γ:

$$\begin{aligned} r(t) &= \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big),\ t \in [a,b], \\ g(\tau) &= \big(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)\big),\ \tau \in [c,d]. \end{aligned}$$

Τότε υπάρχει μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση $\phi : [c,d] \to [a,b]$ (αλλαγή παραμέτρου $t = \phi(\tau)$) με παράγωγο $\phi'(\tau) \neq 0$, ώστε

$$g(\tau) = r(\phi(\tau)) = \big(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\big),\ \tau \in [c,d].$$

Δηλαδή $g_i(\tau) = r_i(\phi(\tau))$ για $i = 1, 2, 3,$. Οπότε $g_i'(\tau) = r'(\phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau)$.

Αν ϕ είναι αύξουσα, τότε $\phi'(\tau) > 0$ για κάθε $\tau \in [c,d]$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} F ds &= \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t) + r_3'^2(t)}\, dt \overset{t=\phi(\tau)}{=} \\ &= \int_c^d F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \frac{\sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}}{\phi'(\tau)} \phi'(\tau) d\tau = \\ &= \int_c^d F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}\, d\tau \end{aligned}$$

Αν ϕ είναι φθίνουσα, τότε $\phi'(\tau) < 0$ για κάθε $\tau \in [c,d]$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} F ds &= \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t) + r_3'^2(t)}\, dt \overset{t=\phi(\tau)}{=} \\ &= \int_d^c F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \frac{\sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}}{|\phi'(\tau)|} \phi'(\tau)\, d\tau = \\ &= -\int_d^c F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}\, d\tau \\ &= \int_c^d F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}\, d\tau \end{aligned}$$

2. *Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους της συνάρτησης F κατά μήκος της καμπύλης γ είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό της γ, δηλαδή*

$$\int_{\widehat{AB}} F ds = \int_{\widehat{BA}} F ds.$$

Πράγματι, έστω ότι $\gamma = \widehat{AB}$ έχει παραμετρική παράσταση

$$r(t) = \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big),\ t \in [a,b],\ \text{όπου } A = r(a),\ B = r(b).$$

Η $\widehat{BA}$ έχει παραμετρική παράσταση

$$g(\tau) = r(\phi(\tau)) = \big(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\big),\ \tau \in [a,b],$$

όπου $\phi : [a,b] \to [a,b]$ με $t = \phi(\tau) = a + b - \tau$. Επομένως $A = r(a) = q(b)$ και $B = r(b) = q(a)$. Από την Ιδιότητα 1:

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} F ds &= \int_a^b F\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t) + r_3'^2(t)}\, dt = \\ &= \int_a^b F\left(g_1(\tau), g_2(\tau) g_3(\tau)\right) \sqrt{g_1'^2(\tau) + g_2'^2(\tau) + g_3'^2(\tau)}\, d\tau = \int_{\widehat{BA}} F ds. \end{aligned}$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων συνεπάγονται τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

3. *Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους της συνάρτησης F κατά μήκος μιας απλής κλειστής καμπύλης γ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της αφετηρίας, δηλαδή αν $A, B, C \in \gamma$, τότε*

$$\oint_{\widehat{ABCA}} F ds = \oint_{\widehat{BCAB}} F ds = \oint_{\widehat{CBAC}} F ds.$$

4. $\left| \int_\gamma F ds \right| \le \int_\gamma |F| ds.$

5. $\int_\gamma (\lambda F_1 + \mu F_2) ds = \lambda \int_\gamma F_1 ds + \mu \int_\gamma F_2 ds.$

6. Ας υποθέσουμε ότι δίνονται δύο διαφορετικές καμπύλες γ και γ^* που έχουν τα ίδια άκρα A και B. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_\gamma F ds$ και $\int_{\gamma^*} F ds$ μπορεί να μην είναι ίσα. Δηλαδή, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'-είδους εξαρτάται από την επιλογή του "δρόμου" γ από το σημείο A στο σημείο B.

Παράδειγμα 5.4.5. Στο Παράδειγμα 5.4.3(4) οι καμπύλες $\gamma_1 \cup \gamma_2$ και γ_3 έχουν τα ίδια άκρα A και C. Όμως

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} F ds &= \int_{AB}(x+y)ds + \int_{BC}(x+y)ds = \frac{3}{2}+\sqrt{2}\\ \int_{\gamma_3} F ds &= \int_{AC}(x+y)ds = \int_{CA}(x+y)ds = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

5.4.2 Μερικές εφαρμογές επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

- Η μάζα $m(\gamma)$ ενός σύρματος $\gamma : \vec{r}(t),\ t \in [a,b]$ με πυκνότητα $p(x,y,z)$ στο σημείο (x,y,z) υπολογίζεται από τον τύπο

$$m(\gamma) = \int_\gamma p(x,y,z)ds.$$

- Το κέντρο βάρους ενός σύρματος $\gamma : \vec{r}(t),\ t \in [a,b]$ με πυκνότητα $p(x,y,z)$ στο σημείο (x,y,z) έχει συντεταγμένες:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(\gamma)}\int_\gamma xp(x,y,z)ds,\ \bar{y} = \frac{1}{m(\gamma)}\int_\gamma yp(x,y,z)ds,\ \bar{z} = \frac{1}{m(\gamma)}\int_\gamma zp(x,y,z)ds.$$

- Το το εμβαδόν του τοιχώματος K κάθετου στο Oxy-επίπεδο μεταξύ της καμπύλης $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a,b]$, του Oxy–επιπέδου και της καμπύλης $z = F(x,y) > 0$, $(x,y) \in \gamma$, υπολογίζεται από τον τύπο

$$E(K) = \int_\gamma F(x,y)ds.$$

5.5 Επικαμπύλια ολοκληρώματα β'-είδους.

Ορισμός 5.5.1. Κάθε απεικόνιση $\overrightarrow{F}: V \to \mathbb{R}^n$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^n$, καλείται *διανυσματικό πεδίο* στο $\mathbb{R}^n$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους ορίζεται για ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}: V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^3$ και μια καμπύλη $\gamma \subseteq V$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους οονομάζεται επίσης και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ ως προς τις συντεταγμένες. Το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ μπορεί να συμβολίζει ένα μαγνητικό πεδίο, τη ροή υγρού, τη ροή αέρα.

Σε κάθε σημείο $M \in V$ το $\overrightarrow{F}$ αντιστοιχεί διάνυσμα $\overrightarrow{F}(M)$ που "εφαρμόζεται" στο σημείο M. Το $\overrightarrow{F}(M)$, όπως και κάθε διάνυσμα, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k},$$

όπου $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $(x,y,z) \in V$.

Οι συναρτήσεις F_1, F_2, F_3 είναι πραγαμτικές συναρτήσεις τριών μεταβλητών και καλούνται συνιστώσες της $\overrightarrow{F}$ ως προς τους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα.

Ορισμός 5.5.2. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k},\ V \subseteq \mathbb{R}^3,$$

το οποίο είναι συνεχές πάνω σε μια λεία προσανατολισμένη καμπύλη

$$\gamma : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in [a,b]$$

με αρχή το σημείο $A = r(a)$ και πέρας το σημείο $B = r(b)$.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της γ είναι αριθμός που συμβολίζεται με $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r} = \int_a^b \left(\overrightarrow{F}\,(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \right) dt. \tag{5.3}$$

- Για να βρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από τον τύπο 5.3 βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}(x(t),y(t),z(t)) &= (F_1(x(t),y(t),z(t)), F_2(x(t),y(t),z(t)), F_3(x(t),y(t),z(t))) \\ \vec{r}\,'(t) &= (x'(t), y'(t), z'(t)) \end{aligned}$$

Έχουμε ότι $\overrightarrow{F}\,(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$ ισούται με το άθροισμα
$F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)$.

Επομένως

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r} = \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + \int_a^b F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + \\ + \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt.$$

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους του διανυσματικού πεδίου

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \tag{5.4}$$

κατά μήκους της καμπύλης γ συμβολίζεται συχνά ως εξής:

$$\int_\gamma P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \tag{5.5}$$

- Ο συμβολισμός (5.5) οφείλεται στον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του διανυσαμτικού πεδίου (5.4).

Θεωρούμε μια καμπύλη γ του χώρου με άκρα A και B.

Έστω ότι $D_n = \{A = A_0, A_1, \ldots A_n = B\}$ είναι διαδοχικά σημεία της γ και $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ είναι οι προβολές των σημείων του D_n στον άξονα Ox. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ επιλέγουμε ένα σημείο $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ του τόξου $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ της γ. Έστω

$$\triangle x_n = \max\{x_i^n - x_{i-1}^n : i = 1, \ldots, n\}.$$

Τότε

$$\int_\gamma P(x, y, z)dx = \lim_{\triangle y_n \to 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i)\triangle x_n.$$

Όμοια ορίζονται:

$$\begin{aligned} \int_\gamma Q(x, y, z)dy &= \lim_{\triangle y_n \to 0} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i)\triangle y_n, \\ \int_\gamma R(x, y, z)dy &= \lim_{\triangle z_n \to 0} \sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i)\triangle z_n. \end{aligned}$$

Παραδείγματα 5.5.3.

Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\beta'-$είδους:

1. $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$, όπου $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ και

$$\gamma : \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3),$$

$t\in[0,2\pi]$ στην κατεύθυνση αύξησης της παραμέτρου t.

Λύση: Έχουμε $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t\in[0,2\pi]$, όπου

$$x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, z(t) = 3.$$

Βρίσκουμε $\vec{r}\,'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$ και

$$\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = (2\sin t - 3, 3 - 2\cos t, 2\cos t - 2\sin t)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\vec{F}(x(t), y(t), z(t))\cdot\vec{r}\,'(t) &= (-4\sin^2 t + 6\sin t) + (6\cos t - 4\cos^2 t) + 0 = \\ &= -4 + 6(\sin t + \cos t)\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (-4 + 6\sin t + 6\cos t)\,dt = \\ &= [-4t - 6\cos t + 6\sin t]_0^{2\pi} = -8\pi\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_\gamma x^2ydy - y^2xdx$, όπου $\gamma : \vec{r} = (\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t})$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Λύση: $x = x(t) = \sqrt{\cos t}$ και $y = y(t) = \sqrt{\sin t})$. Επομένως

$$dx = (\sqrt{\cos t})'dt = \frac{-\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt, \quad dy = (\sqrt{\sin t})'dt = \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\,dt$$

Επομένως

$$\int_\gamma x^2ydy - y^2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 t\sqrt{\sin t}}{2\sqrt{\sin t}} + \frac{\sin^2 t\sqrt{\cos t}}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt = \frac{\pi}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r}$, όπου $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x^2 - y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $\gamma : y = -x^2 + 2x$, $x \in [0,2]$, στην κατεύθυνση μείωσης της μεταβλητής x.

Λύση: Έχουμε $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,2]$, όπου

$$x(t) = t, y(t) = -t^2 + 2t.$$

Βρίσκουμε $\vec{r}\,'(t) = (x(t), y(t))' = (t, -t^2 + 2t)' = (1, -2t + 2)$ και

$$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = \big(y(t), -x^2(t) - y(t)\big) = \big(-t^2 + 2t, -2t\big)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) &= \big(-t^2 + t, -2t)\big) \cdot (1, -2t + 2) = \\ &= (-t^2 + 2t) \cdot 1 + (-2t)(-2t + 2) = 3t^2 - 2t \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r} = \int_2^0 (3t^2 - 2t)dt = -4.$

4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$, όπου (x,y) διατρέχει το ημικύκλιο

$$\gamma : \vec{r} = (a\cos t, a\sin t), \quad t \in [0, \pi],$$

με κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση: $x = x(t) = a\cos t$ και $y = y(t) = a\sin t$. Επομένως

$$dx = (a\cos t)'\, dt = -a\sin t dt, \quad dy = (a\sin t)'dt = a\cos t dt$$

Όταν το (x,y) διατρέχει το ημικύκλιο γ με κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, η παράμετρος t αυξάνεται από το 0 έως π. Επομένως

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^\pi \frac{a^2\sin^2 t(-a\sin t) - a^2\cos^2 t(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\, dt = \\ &= a\int_0^\pi (-\sin^3 t - \cos^3 t)dt = \\ &= -a\int_0^\pi \sin^3 t dt - a\int_0^\pi \cos^3 t dt = \\ &= -a\left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi - a\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi = -\frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

Ορισμός 5.5.4. Αν μια καμπύλη $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ είναι ένωση λείων καμπυλών

$$\gamma_1 = \overset{\frown}{AA_1}, \gamma_2 = \overset{\frown}{A_1A_2}, \ldots, \gamma_n = \overset{\frown}{A_{n-1}B},$$

τότε

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} d\vec{r} + \cdots + \int_{\gamma_n} \overrightarrow{F} d\vec{r}.$$

5.5.1 Ιδιότητες επικαμπύλιου ολοκληρώματος β'-είδους.

Στη υποπαράγραφο αυτή με γ συμβολίζεται μια λεία καμπύλη και το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι συνεχής συνάρτηση στα σημεία της γ.

1. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} : V \to \mathbb{R}^3$ επί της προσανατολισμένης καμπύλης γ είναι ανεξάρτητο από την διανυσματική παράσταση της γ.*

Πράγματι, θεωρούμε δύο παραμετρικές παραστάσεις της γ:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big), \ t \in [a,b], \\ \vec{g}(\tau) &= \big(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)\big), \ \tau \in [c,d]. \end{aligned}$$

Επειδή η γ είναι προσανατολισμένη, υπάρχει μια γνησίως αύξουσα και επί απεικόνιση $\phi : [c,d] \to [a,b]$ με συνεχή παράγωγο $\phi'(\tau) > 0$, τέτοια ώστε $\vec{g}(\tau) = \vec{r}(\phi(\tau))$.

Επομένως $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ και $\vec{g}\,'_\tau(\tau) = \vec{r}\,'(\phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau)$. Οπότε:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r} &= \int_a^b \Big(\overrightarrow{F}\,(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\Big)\, dt \overset{t=\phi(\tau)}{=} \\ &= \int_c^d \Big(\overrightarrow{F}\,(r_1(\phi(\tau)), r_2(\phi(\tau)), r_3(\phi(\tau))) \cdot \vec{r}\,'(\phi(\tau))\Big)\, \phi'(\tau) d\tau = \\ &= \int_c^d \Big(\overrightarrow{F}\,(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)) \cdot \vec{g}\,'(\tau)\Big)\, d\tau = \int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{g} \end{aligned}$$

2. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} : V \to \mathbb{R}^3$ επί της καμπύλης γ αλλάζει πρόσημο με την αλλαγή του προσανατολισμού της γ.*

Πράγματι, θεωρούμε δύο παραμετρικές παραστάσεις της γ:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \big(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\big),\ t \in [a,b], \\ \vec{g}(\tau) &= \big(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)\big),\ \tau \in [c,d]. \end{aligned}$$

τέτοιες ώστε $\vec{g}(\tau) = \vec{r}(\phi(\tau)),\ \tau \in [c,d]$, όπου $\phi : [c,d] \to [a,b]$ είναι γνησίως φθίνουσα και επί απεικόνιση με συνεχή παράγωγο $\phi'(\tau) < 0$.

Επομένως $\phi(c) = b$, $\phi(d) = a$ και $\vec{g}'_{\tau}(\tau) = \vec{r}\,'(\phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau)$. Οπότε:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \overrightarrow{F} d\vec{r} &= \int_a^b \Big(\overrightarrow{F}\,(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\Big)\, dt \overset{t=\phi(\tau)}{=} \\ &= \int_d^c \Big(\overrightarrow{F}\,(r_1(\phi(\tau)), r_2(\phi(\tau)), r_3(\phi(\tau))) \cdot \vec{r}\,'(\phi(\tau))\Big)\, \phi'(\tau) d\tau = \\ &= -\int_c^d \Big(\overrightarrow{F}\,(g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)) \cdot \vec{g}\,'(\tau)\Big)\, d\tau = -\int_{\gamma} \overrightarrow{F} d\vec{g} \end{aligned}$$

5.5.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα β'-είδους ανεξάρτητα από το δρόμο ολοκλήρωσης.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} : V \to \mathbb{R}^3$, όπου $V \subseteq \mathbb{R}^3$, καλείται *ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στο* V, όταν για οποιαδήποτε $A, B \in V$ και για οποιεσδήποτε καμπύλες

$$\gamma_1 : \vec{r_1}(t),\ t \in [a_1, b_1] \text{ και } \gamma_2 : \vec{r_2}(\tau),\ \tau \in [a_2, b_2]$$

του V από το $A = \vec{r_1}(a_1) = \vec{r_2}(a_2)$ στο $B = \vec{r_1}(b_1) = \vec{r_2}(b_2)$ ισχύει:

$$\int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} d\vec{r}_1 = \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} d\vec{r}_2.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους ενός διανυσματικού πεδίου

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z),\quad (x,y,z) \in V, \tag{5.6}$$

που είναι ανεξάρτητο του δρόμο ολοκλήρωσης από το σημείο A έως το σημείο B συμβολίζεται με με

$$\int_A^B F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$

Θεώρημα 5.5.5. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους ενος διανυσματικού πεδίου (5.6) που είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης στο V ισούται με μηδέν κατά μήκους οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης $\gamma : \vec{r}(t),\ t \in [a, b]$, του V, δηλαδή*

$$\oint_{\gamma} \overrightarrow{F} d\vec{r} = 0.$$

Παραθέτουμε δύο Θεωρήματα στα οποία διατυπώνεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος από το δρόμο ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 5.5.6. *Έστω $V = \Delta_1 \times \Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου Δ_1 και Δ_2 διαστήματα του $\mathbb{R}$.*

Θεωρούμε διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j},\ (x, y) \in V,$$

όπου F_1 και F_2 είναι συνεχείς, παραγωγίσιμες ως προς x και y και οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ είναι συνεχείς στο V.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στο V, αν και μόνον αν για κάθε $(x, y) \in V$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{5.7}$$

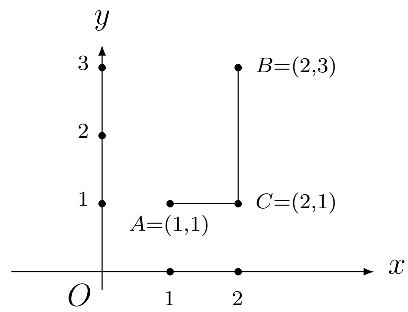
Παράδειγμα 5.5.7. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}(x, y) = (x + 3y)\vec{i} + (3x + y)\vec{j}$ κατά μήκους μιας καμπύλης με άκρα $A = (1, 1)$ και $B = (2, 3)$.

Λύση: Θα δείξουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, επαληθεύοντας την ισότητα (5.7).

Έχουμε $F_1(x, y) = x + 3y$ και $F_2(x, y) = 3x + y$. Οπότε

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial (x + 3y)}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial (3x + y)}{\partial x} = 3 \Longrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Θα επιλέξουμε ως γ από το A στο B την πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στους άξονες. Έστω $C = (2, 3)$. Θέτουμε $\gamma = AC \cup CB$.



Βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθύγραμμων τμημάτων AC και CB:

$$\begin{aligned} AC &: \ y = 1, \ x \in [1,2] \Longrightarrow dy = 0 \\ CB &: \ x = 2, \ y \in [1,3] \Longrightarrow dx = 0 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{AC} \overrightarrow{F} d\vec{r} &= \int_{AC} (x+3y)dx + (3x+y)dy = \int_1^2 (x+3)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2 = \frac{9}{2} \\ \int_{CB} \overrightarrow{F} d\vec{r} &= \int_{CB} (x+3y)dx + (3x+y)dy = \int_1^3 (6+y)dy = \left[6y + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = 16 \end{aligned}$$

Συνεπώς $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} d\vec{r} = \int_{AC} \overrightarrow{F} d\vec{r} + \int_{CB} \overrightarrow{F} d\vec{r} = \frac{41}{2}$.

Θεώρημα 5.5.8. *Έστω $V = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3 \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου Δ_1, Δ_2 και Δ_3 διαστήματα του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3$:*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z), \quad (x,y,z) \in V,$$

όπου οι F_1, F_2 και F_3 είναι συνεχείς, παραγωγίσιμες ως προς x, y, z και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}$, $\frac{\partial F_3}{\partial y}$, $\frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ είναι συνεχείς στο V.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στο V, αν και μόνον αν για κάθε $(x,y,z) \in V$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}. \tag{5.8}$$

Παράδειγμα 5.5.9. Να αποδειχθεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β'-είδους του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης στην περιοχή $V = (0,\infty)^3$, για

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}\right)\vec{i} + \frac{z}{xy^2}\vec{j} + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)\vec{k}.$$

Λύση: Αρκεί να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ισότητες (5.8):

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

για τις συνιστώσες της $\overrightarrow{F}$:

$$F_1(x,y,z) = \frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}, \quad F_2(x,y,z) = \frac{z}{xy^2}, \quad F_3(x,y,z) = \frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}.$$

Βρίσκουμε, πράγματι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2y}\right) = \frac{z}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{z}{x^2y^2}\\
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{xy^2}\right) = \frac{z}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{z}{x^2y^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\\
\frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{xy^2}\right) = \frac{1}{xy^2}\\
\frac{\partial F_3}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{xy^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\\
\frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{1}{x^2y}\\
\frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+z^2}\right) =\\
&= \frac{1}{x^2y} + \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}.
\end{aligned}$$

5.6 Ασκήσεις.

Διανυσματικές συναρτήσεις.

5.6.1. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ και την παράγωγο $\vec{r}\,'(t)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\vec{r}(t) = 2\cos\frac{t}{2}\vec{i} + 2\sin\frac{t}{2}\vec{j} - \tan\frac{t}{4}\vec{k},\ t_0 = \pi$

(β) $\vec{r}(t) = 2\ln t\vec{i} + \frac{\sin t}{t}\vec{j} - 2^t\vec{k},\ t_0 = 1.$

(γ) $\vec{r}(t) = \cos 2t\vec{i} + \tan t\vec{j} - \sin\frac{t}{2}\vec{k},\ t_0 = \frac{\pi}{3}.$

5.6.2. Να αποδειχθεί $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{a}$, τότε $\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$.

5.6.3. Να αποδειχθεί ότι για $\vec{r}(t) = (e^t + e^{-t})\vec{i} + (e^t - 2e^{-t})\vec{j} + (e^t + 3e^{-t})\vec{k}$ ισχύει $\vec{r}(t) \times \vec{r}\,''(t) = \vec{0}$.

5.6.4. Να αποδειχθεί ότι $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ σταθερά διανύσματα ισχύει $\vec{r}(t) \times \vec{r}\,''(t) = \vec{0}$.

5.6.5. Να αποδειχθεί ότι αν για κάθε $t \in (a, b)$ το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{b} \neq \vec{0}$ και $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{a} \neq \vec{0}$ για $t_0 \in [a, b]$, τότε $\vec{a}\perp\vec{b}$.

5.6.6. Να αποδειχθεί ότι αν $\vec{r}(t) = \vec{a}$ για κάθε $t \in [a, b]$, τότε $\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$

5.6.7. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

(α) $F(x, y) = x^5\sin(2y + 3) - y^2\ln x$

(β) $F(x, y) = e^y\sin x + x^2\cos y + x^2 + x^3$

(γ) $F(x, y, z) = e^y\sin x + x^2\cos y + x^2 + x^3\sin z$

(δ) $F(x, y, z) = x^5 + y^4 + \sin z$

5.6.8. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στο σημείο M_0:

(α) $F(x, y) = x^5\sin(2y + \frac{\pi}{3}) - y^2\ln x,\ M_0 = (1, 0).$

(β) $F(x, y) = e^y\sin x + x^2\cos y + x^2 + x^3,\ M_0 = (0, 0).$

(γ) $F(x, y, z) = e^y\sin x + x^2\cos y + x^2 + x^3\sin z,\ M_0 = (0, 0, \pi).$

Οι έννοια της καμπύλης.

5.6.9. Να γραφεί η παραμετρική παράσταση του κύκλου του Oxy-επιπέδου με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα R.

5.6.10. Να αποδειχθεί ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\vec{i} + \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\vec{j}, \quad t \in [1, \infty),$$

είναι παραμετρική παράσταση του κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq a$, $y \geq 0$.

5.6.11. Να αποδειχθεί ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

είναι παραμετρική παράσταση λείας καμπύλης η οποία είναι υποσύνολο της επιφάνειας με εξίσωση: $x^2 + y^2 - e^z = 0$.

5.6.12. Να γραφεί η παραμετρική παράσταση και να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις: $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \ t \in [0, b] \end{cases}$.

Λύση. Για $r_1(t) = e^t \cos t$ και $r_2(t) = e^t \sin t$, η παραμετρική παράσταση της καμπύλης είναι

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j}, \ t \in [0, b].$$

Για $A = (r_1(0), r_2(0))$ και $B = (r_1(b), r_2(b))$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\ell(\widehat{AB}) &= \int_0^b |\vec{r}\,'(t)|dt = \int_0^b \sqrt{[r_1'(t)]^2 + [r_2'(t)]^2}dt = \\
&= \int_0^b \sqrt{[e^t \cos t - e^t \sin t]^2 + [e^t \sin t + e^t \cos t]^2}\ dt = \\
&= \int_0^b \sqrt{2e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt = \int_0^b \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^b - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

5.6.13. Να γραφεί η παραμετρική παράσταση και να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις: $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \ t \in [0, 2\pi], \ r > 0. \end{cases}$

5.6.14. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j} + e^t\vec{k},\ t \in (-\infty, \infty)$$

μεταξύ των σημείων τομής της με τα επίπεδα $z = 1$ και $z = 2$.

Παραμετρικές παράστασεις καμπυλών.

5.6.15. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φραγμένο διάστημα Δ των πραγματικών αριθμών με άκρα a και b, με $a < b$ υπάρχει επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου ϕ που απεικονίζει το Δ σε ένα από τα διαστήματα: $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$, $(0,1]$. (Υπόδειξη: $\phi(t) = \frac{t-a}{b-a}$.)

5.6.16. Να αποδειχθεί ότι $\phi : (-\infty, \infty) \to (0,1)$ με $\phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan t}{\pi}$ είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου.

5.6.17. Να βρεθεί η παραμετρική παράσταση της καμπήλης γ που ορίζεται στο διάστημα $[0,1]$ αν μία παραμετρική παράσταση της γ είναι η

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + (1 - \cos t - \sin t)\vec{k},\ t \in [0, 2\pi]$$

5.6.18. Να αποδειχθεί ότι η αλλαγή παραμέτρου $t = \arctan\theta$, είναι επιτρεπτή και να γραφεί η παραμετρική παράσταση του κύκλου

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + 3\vec{k},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

με παράμετρο θ.

Επικαμπύλια ολοκληρώματα α'-είδους.

5.6.19. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_\gamma yzds$, για γ: $\vec{r}(t) = (t, 3t, 2t)$, $t \in [0,3]$.

(β) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y^2 + z)ds$, για γ: $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$, $t \in [1,4]$.

(γ) $\displaystyle\int_\gamma xyz\, ds$, για γ: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3})$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5.6.20. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της καμπύλης $\vec{r}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$, $t \in [a, 0]$, αν οι πυκνότητα σε κάθε σημείο (x, y, z) ισούται με 1, δηλαδή $p(x, y, z) = 1$.

5.6.21. Να βρεθεί η μάζα του σύρματος με παραμετρικές εξισώσεις $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$ αν οι πυκνότητα του στο σημείο (x, y) είναι y.

5.6.22. Να βρεθεί η μάζα του σύρματος με πυκνότητα $p = \sqrt{2y}$ και παραμετρική εξίσωση $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$, $t \in [0, 1]$.

5.6.23. Να βρεθεί το εμβαδόν του τοιχώματος K κάθετου στο Oxy-επίπεδο μεταξύ της καμπύλης $\gamma : 2x + 3y = 6, x \in [0, 6]$ του Oxy-επιπέδου και και της καμπύλης $z = x + \sqrt{y}$, $(x, y) \in \gamma$.

Επικαμπύλια ολοκληρώματα β'-είδους.

5.6.24. Έστω $V = (-1, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r}$, όπου

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (y + \ln(x + 1))\vec{i} + (x + 1 - e^y)\vec{j}, \ (x, y) \in V$$

κατά μήκους μιας καμπύλης του V με άκρα $A = (0, 0)$ και $B = (1, 2)$.

Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

5.6.25. $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r}$, όπου $\overrightarrow{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ και $\gamma : \vec{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$ στην κατεύθυνση μείωσης της μεταβλητής t.

5.6.26. $\displaystyle\int_\gamma \overrightarrow{F} d\vec{r}$, όπου $\overrightarrow{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ και $\gamma : \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, από το $A = (a, 0)$ έως $B = (0, b)$.

5.6.27. $\displaystyle\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy$, όπου AB είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A = (1, 1)$ και $B = (3, 4)$

Κεφάλαιο 6

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[a,b]$ εισάγεται με δύο περιορισμούς: το διάστημα $[a,b]$ να είναι φραγμένο και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση f να είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα γενικεύσουμε την έννοια του ολοκληρώματος σε μη φραγμένες συναρτήσεις και σε συναρτήσεις ορισμένες σε μη φραγμένα διαστήματα.

6.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα Ι είδους

Ορισμός 6.1.1. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ για κάθε $b \in (a,\infty)$.

Αν $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, τότε όρίζουμε

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

και λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Αν το όριο $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

Ορισμός 6.1.2. Έστω ότι η συνάρτηση $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ για κάθε $a \in (-\infty, b)$.

Αν $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, τότε όρίζουμε

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

και λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει.

Αν το όριο $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ αποκλίνει.

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα των μορφών $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ και $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ καλούνται *γενικευμένα ολοκληρώματα $I^{ου}$ είδους*.

Παραδείγματα 6.1.3.

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\arctan x\Big|_0^b\right) = \\ = \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \tfrac{\pi}{2},$$

2. $$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\cos x\Big|_0^b\right] = \lim_{b\to\infty}[-\cos b + \cos 0].$$

   Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\infty \sin x dx$ αποκλίνει.

3. $$\int_{-\infty}^{-1} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^{-1}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{-1} - e^a\right] = e^{-1}$$

4. $$\int_{-\infty}^{1} e^{-kx^2} x dx \overset{k\neq 0}{=} \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{e^{-kx^2}}{2k}\Big|_a^1\right) = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{e^{-k}}{2k} + \frac{e^{-ka^2}}{2k}\right] = \\ = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } k < 0, \\ -\dfrac{1}{2ke^k}, & \text{αν } k > 0. \end{cases}$$

6.1.1 Εφαρμογή του τύπου των Newton-Leibniz

Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $b \in (a,\infty)$. Αν η συνάρτηση F είναι παράγουσα της f στο $[a,\infty)$, τότε

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\big[F(b)-F(a)\big] = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

εφόσον $\lim\limits_{b\to\infty} F(b) \in \mathbb{R}$, διαφορετικά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει. Συμβολίζοντας $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(\infty)$ παίρνουμε

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a)$$

Όμοια, αν η συνάρτηση $f : (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $a \in (-\infty,b)$ και η συνάρτηση F είναι παράγουσα της f στο $(-\infty,b]$, τότε

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

εφόσον το όριο $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) \in \mathbb{R}$, διαφορετικά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ αποκλίνει. Συμβολίζοντας $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$ παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

Παραδείγματα 6.1.4.

1. $$\int_0^\infty \frac{2xdx}{e^x} = -2e^{-x}(x+1)\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty}[-2e^{-x}(x+1)] - [-2e^{-0}(0+1)] =$$
$$= -2\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x} + 2 = -2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} + 2 = 2.$$

2. $$\int_a^\infty c\ dx = cx\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} cx - ca = \begin{cases} 0, & \text{αν } c = 0 \\ \infty, & \text{αν } c > 0 \\ -\infty, & \text{αν } c < 0. \end{cases}$$

3. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$, συγκλίνει $\iff p > 1$.

Πράγματι, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$$p = 1 \Longrightarrow \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln a = \infty.$$

$$p \neq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right] - \frac{a^{1-p}}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{αν } p < 1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{αν } p > 1. \end{cases}$$

4. $\displaystyle\int_a^\infty r^x dx$, $r \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, συγκλίνει $\iff 0 < r < 1$.

Πράγματι,

$$\int_a^\infty r^x dx = \frac{r^x}{\ln r}\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{r^x}{\ln r} - \frac{r^a}{\ln r} = \begin{cases} -\dfrac{r^a}{\ln r}, & \text{αν } 0 < r < 1 \\ \infty, & \text{αν } r > 1. \end{cases}$$

6.2 Ιδιότητες γενικευμένων ολοκληρωμάτων Ι^{ου} είδους

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε τις ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$.

Ανάλογες ιδιότητες έχουν για τα ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Στις προτάσεις που ακολουθούν οι f και g είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[a,b]$ για κάθε $b > a$.

6.2.1. *Το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει αν και μόνον αν το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_b^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει για κάθε* $b > a$.

Επιπλέον, αν το $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει, ή είναι* ∞*, ή είναι* $-\infty$*, τότε*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $b, b' \in (a, \infty)$ ισχύει:

$$\int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b'} f(x)dx$$

Άρα,

$$\lim_{b'\to\infty} \int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{b'\to\infty} \int_b^{b'} f(x)dx,$$

απ' όπου προκύπτει η πρόταση.

□

6.2.2. *Αν το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_a^\infty cf(x)dx$ *συγκλίνει για κάθε* $c \in \mathbb{R}$*, επιπλέον*

$$\int_a^\infty cf(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx$$

Απόδειξη.

$$\int_a^\infty cf(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b cf(x)dx = \lim_{b\to\infty} c\int_a^b f(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx.$$

□

6.2.3. *Αν τα ολοκληρώματα* $\int_a^\infty f(x)dx$ *και* $\int_a^\infty g(x)dx$ *συγκλίνουν, τότε και το ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]dx$ *συγκλίνει, επιπλέον*

$$\int_a^\infty [f(x) + g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx.$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης.

□

6.2.4. *Αν το ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει και το ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty g(x)dx$ *αποκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]dx$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα το $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]dx$ συγκλίνει.

Επειδή $g(x) = [f(x)+g(x)] - f(x)$, από τις προτάσεις 6.2.2-6.2.3 προκύπτει ότι το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, που είναι άτοπο.

□

6.2.5. *Αν το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{b\to\infty} \int_b^\infty f(x)dx = 0.$

Απόδειξη. Έχουμε $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$

Θέτουμε $\int_a^\infty f(x)dx = I$, τότε $\int_b^\infty f(x)dx = I - \int_a^b f(x)dx$, συνεπώς

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \int_b^\infty f(x)dx =& I - \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \\ =& I - \int_a^\infty f(x)dx = I - I = 0.\end{aligned}$$

□

Παραδείγματα 6.2.6.

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{x^3}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$

   Επειδή το καθένα από τα ολοκληρώματα $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ και $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$ συγκλίνει, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \int_1^\infty \frac{e^x}{2}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty e^x dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-x}dx$

   Επειδή το $\int_1^\infty e^x dx$ αποκλίνει και το $\int_1^\infty e^{-x}dx$ συγκλίνει, το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

3. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{αν } x \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

έχουμε

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x^2} = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty = 1 + \frac{2}{\pi}.$$

6.3 Κριτήρια σύγκλισης του $\int_a^\infty f(x)dx$ όταν η $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \infty)$

6.3.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη

6.3.1. *Έστω ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \infty)$.*

Τότε το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $b \in (a, \infty)$ ισχύει $\int_a^b f(x)dx \leq M$.

Απόδειξη. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \infty)$, τότε η συνάρτηση

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$$

είναι μη αρνητική και αύξουσα στο $[a, \infty)$.

Το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\lim_{b\to\infty} \Phi(b) \in \mathbb{R}$.

Επειδή η Φ είναι μη αρνητική και αύξουσα στο $[a, \infty)$, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει φραγμένο όριο όταν $b \to \infty$ είναι να υπάρχει $M > 0$ ώστε η $\Phi(b) \leq M$ για κάθε $b \in (a, \infty)$, δηλαδή να ισχύει $\int_a^b f(x)dx \leq M$ για κάθε $b \in (a, \infty)$.

$\square$

6.3.2 Κριτήριο σύγκρισης

6.3.2. *Έστω* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in [a, \infty)$.

(*i*) *Αν το* $\int_a^\infty g(x)dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει.*

(*ii*) *Αν το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *αποκλίνει, τότε το* $\int_a^\infty g(x)dx$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. (*i*) Έστω ότι $b > a$. Επειδη οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $f(x) \leq g(x)$ στο $[a, b]$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Επειδή $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \infty)$ και το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, από την ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης 6.3.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $b \in (a, \infty)$ να ισχύει $\int_a^b g(x)dx \leq M$. Συνεπώς, $\int_a^b f(x)dx \leq M$ για κάθε $b \in (a, \infty)$. Άρα, το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

(*ii*) Αν υποθέσουμε ότι το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει από την (*i*), που είναι άτοπο .

□

Παραδείγματα 6.3.3.

1. Οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{1+x^{10}}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^{10}}$ είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[1, \infty)$.

   Επειδή $\dfrac{1}{1+x^{10}} \leq \dfrac{1}{x^{10}}$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^{10}}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \dfrac{dx}{1+x^{10}}$ συγκλίνει.

2. Οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ είναι μη αρνητικές στο διάστημα $[2, \infty)$.

   Επειδή $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ αποκλίνει.

6.3.3 Κριτήριο του ορίου

6.3.4. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι θετικές στο διάστημα $[a, \infty)$.*

(i) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, τότε ή και τα δυο ολοκληρώματα $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ και $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνουν, ή και τα δυο αποκλίνουν.

(ii) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ και το $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

(iii) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ και το $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ αποκλίνει, τότε το $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

Απόδειξη.

(i) Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι θετικές, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$.

Επομένως για $\varepsilon = \frac{L}{2}$ υπάρχει $a' > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \geq a'$ να ισχύει

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon = \frac{L}{2}$$

Άρα,

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $g(x) > 0$ τα μέλη της τελευταίας σχέσης παίρνουμε

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}g(x) \tag{6.1}$$

Αν το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_{a'}^\infty \frac{3L}{2}\, g(x)dx$ συγκλίνει.

Από τις ανισότητες (6.1) και από το κριτήριο σύγκρισης το $\int_{a'}^\infty f(x)dx$ συγκλίνει. Άρα, το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε υπάρχει $a' > a$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 1 \text{ για κάθε } x \in [a', \infty).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $g(x) > 0$, παίρνουμε $f(x) < g(x)$ στο $[a', \infty)$.

Επειδή το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, το $\int_{a'}^\infty g(x)dx$ συγκλίνει.

Επειδή $f(x) < g(x)$ στο $[a', \infty)$, το $\int_{a'}^\infty f(x)dx$ συγκλίνει απο το κριτήριο σύγκρισης.

Άρα, το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

(iii) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, τότε υπάρχει $a' > a$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \text{ για κάθε } x \in [a', \infty).$$

Επειδή $g(x) > 0$, από την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι $f(x) > g(x)$ στο $[a', \infty)$.

Αν το $\int_a^\infty g(x)dx$ αποκλίνει, τότε το $\int_{a'}^\infty g(x)dx$ αποκλίνει.

Επειδή $f(x) > g(x)$ στο $[a', \infty)$, το $\int_{a'}^\infty f(x)dx$ αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης. Άρα, το $\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

$\square$

Παραδείγματα 6.3.5.

1. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{(x+m)^p}$, $a > -m$, συγκλίνει αν και μόνον αν $p > 1$.

   Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{(x+m)^p}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ είναι θετικές στο $[a, \infty)$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{(x+m)^p} = 1$.

   Έστω δ ένας θετικός αριθμός μεγαλύτερος του a. Τότε
   $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{(x+m)^p}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_\delta^\infty \frac{dx}{(x+m)^p}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$
   $\displaystyle\int_\delta^\infty \frac{dx}{x^p}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow p > 1$.

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ συγκλίνει.

   Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ και $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ είναι θετικές στο $[1, \infty)$ και

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1$$

   Επειδή το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty g(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του ορίου το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$ αποκλίνει.

   Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι θετικές στο $[1, \infty)$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}} = 1$. Επειδή το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ αποκλίνει, από το κριτήριο του ορίου το $\int_1^\infty f(x)dx$ αποκλίνει. Άρα, το $\int_0^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

4. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ συγκλίνει.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι θετικές στο $[1,\infty)$ και

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

Επειδή το $\int_1^\infty g(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του ορίου το $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ συγκλίνει. Επομένως το $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ συγκλίνει.

5. $\int_1^\infty \frac{\ln x dx}{\sqrt{x+1}}$ αποκλίνει.

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ είναι θετικές στο $[1,\infty)$ και $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$.

Επειδή το $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ αποκλίνει, από το κριτήριο του ορίου το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

6.3.4 Πολυωνυμικό κριτήριο

6.3.6. *Έστω ότι $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού p και q αντίστοιχα και $Q(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq a > 0$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow q - p \geq 2$$

Απόδειξη. Επειδή το $P(x)$ έχει το πολύ p πραγματικές ρίζες, το πηλίκο $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ διατηρεί το πρόσημο σε κάποιο διάστημα $[a', \infty)$, όπου $a < a'$ και $a' > 0$.

Έστω ότι $f(x) \geq 0$ στο $[a', \infty)$. Για $g(x) = \dfrac{1}{x^{q-p}}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(\alpha_p x^p + \alpha_{p-1}x^{p-1} + ... + \alpha_0)x^{q-p}}{\beta_q x^q + \beta_{q-1}x^{q-1} + ... + \beta_0} = \dfrac{\alpha_p}{\beta_q} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Από το κριτήριο του ορίου το $\displaystyle\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν το $\displaystyle\int_{a'}^\infty \frac{dx}{x^{q-p}}$ συγκλίνει, δηλαδή για $q - p \geq 2$.

Έστω ότι $f(x) \leq 0$ στο $[a', \infty)$. Το $\displaystyle\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^\infty \frac{-P(x)}{Q(x)}\,dx$ (στο οποίο $-P(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού p και $\dfrac{-P(x)}{Q(x)} \geq 0$), δηλαδή για $q - p \geq 2$.

$\square$

Παραδείγματα 6.3.7.

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^5 + 2x + 1}{x^4 + 1}\,dx$ αποκλίνει, επειδή $q - p = 4 - 5 < 2$.

2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^3 + 2x + 1}{x^7 + 1}\,dx$ συγκλίνει, επειδή $q - p = 7 - 3 \geq 2$.

6.3.5 Κριτήριο του λόγου

6.3.8. *Αν η συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, θετική και υπάρχει $r \in (0, 1)$ για το οποίο*

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} < r, \ \forall x \in [a, \infty) \tag{6.2}$$

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Από την (6.2) έπεται ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$f(x+n) < r^n f(x), \ \forall x \in [a, \infty). \tag{6.3}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, \infty)$, η f είναι συνεχής στο $[a, a+1] \subseteq [a, \infty)$. Επομένως η f έχει απόλυτο μέγιστο στο $[a, a+1]$. Έστω $\xi \in [a, a+1]$ για το οποίο $\max(f, [a, a+1]) = f(\xi)$.

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ έχουμε

$$x \in [a+n, a+n+1] \Longrightarrow x-n \in [a, a+1] \Longrightarrow f(x-n) \leq f(\xi) \tag{6.4}$$

Από τις σχέσεις (6.3) και (6.4) για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$ παίρνουμε

$$x \in [a+n, a+n+1] \Longrightarrow f(x) < r^n f(x-n) \leq r^n f(\xi) \tag{6.5}$$

Άρα,

$$\int_{a+n}^{a+n+1} f(x)dx \leq \int_{a+n}^{a+n+1} r^n f(\xi)dx = r^n f(\xi) \tag{6.6}$$

Επειδή $0 < r < 1$, από την (6.6) προκύπτει ότι

$$\int_{a}^{a+n+1} f(x)dx \leq f(\xi)\left(1 + r + ... + r^n\right) \leq f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{f(\xi)}{1-r}$$

Έστω $b \in [a, \infty)$. Τότε $b \in [a, a+n+1]$ για κάποιο φυσικό αριθμό n. Οπότε

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{a+n+1} f(x) \leq \frac{f(\xi)}{1-r}.$$

Από την ικανή και αναγκαία συνθήκη (6.3.1) το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

□

6.3.9. *Αν η συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, θετική και*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = L < 1, \tag{6.7}$$

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $r \in (L, 1)$. Τότε $r - L > 0$. Από την (6.7) υπάρχει $\delta \in (a, \infty)$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(x+1)}{f(x)} - L\right| < r - L,\ \forall x \in [\delta, \infty)$$

Συνεπώς $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} < r,\ \forall x \in [\delta, \infty)$. Από την πρόταση (6.3.8) το $\int_\delta^\infty f(x)dx$ συγκλίνει. Άρα, συγκλίνει το $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\delta f(x)dx + \int_\delta^\infty f(x)dx$.

□

Παράδειγμα 6.3.10. Το ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \dfrac{dx}{(x+1)2^x}$ συγκλίνει, επειδή η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)2^x}$ είναι συνεχής και θετική στο διάστημα $[2, \infty)$ και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)2^x}{(x+2)2^{x+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

6.3.6 Κριτήριο της ρίζας

6.3.11. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ για κάθε $b \in [a, \infty)$.*

Αν υπάρχει $r \in (0, 1)$ για το οποίο

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} < r,\ \forall x \in [a, \infty), \tag{6.8}$$

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Από την (6.8) έπεται ότι

$$f(x) < r^x,\ \forall x \in [a, \infty). \tag{6.9}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty r^x dx$ για $0 < r < 1$ συγκλίνει (Παράδειγμα 6.1.4(4)).

Συνεπώς, από το κριτήριο σύγκρισης, το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

□

6.3.12. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ για κάθε $b \in [a, \infty)$. Αν*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = L < 1, \tag{6.10}$$

τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $r \in (L, 1)$. Τότε $r - L > 0$. Από την (6.10) υπάρχει $\delta \in (a, \infty)$ τέτοιο ώστε

$$\left|[f(x)]^{\frac{1}{x}} - L\right| < r - L,\ \forall x \in [\delta, \infty)$$

Συνεπώς $[f(x)]^{\frac{1}{x}} < r,\ \forall x \in [\delta, \infty)$, όπου $0 < r < 1$.

Από την πρόταση (6.3.11) το ολοκλήρωμα $\int_\delta^\infty f(x)dx$ συγκλίνει. Άρα, το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\delta f(x)dx + \int_\delta^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

□

Παράδειγμα 6.3.13. Το ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \frac{dx}{x^x}$ συγκλίνει, επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^x}$ είναι συνεχής και θετική στο διάστημα $[2, \infty)$ και

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 < 1.$$

Σημείωση 6.3.14. Αν $f(x) \leq 0$ στο $[a, \infty)$, τότε $-f(x) \geq 0$ στο $[a, \infty)$. Οπότε στο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty (-f(x))\,dx$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τα κριτήρια σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων των μη αρνητικών συναρτήσεων.

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ συγκλίνει} \iff \int_a^\infty (-f(x))\,dx \text{ συγκλίνει}$$

6.4 Γενικά κριτήρια σύγκλισης ολοκληρωμάτων I^{ου} είδους

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε τα κρητίρια σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_a^\infty f(x)dx$.

Κάθε ολοκληρώμα της μορφής $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^\infty f(x)dx$ από τον τύπο

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-a}^\infty f(-x)dx$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^a f(x)dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}[-\int_{-t}^{-a} f(-x)dx] = \\ &= \lim_{t\to-\infty}\int_{-a}^{-t} f(-x)dx = \lim_{-t\to\infty}\int_{-a}^{-t} f(-x)dx = \int_{-a}^\infty f(-x)dx.\end{aligned}$$

Στην παράγραφο αυτή οι συναρτήσεις f και g θεωρούνται ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ για κάθε $b\in(a,\infty)$.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη.

6.4.1. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $\varepsilon>0$ *υπάρχει* $b>a$ *τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε* $b_1,b_2>b$ *ισχύει:* $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$

Απόδειξη. Θέτουμε $\Phi(t)=\int_a^t f(x)dx$, $t\in[a,\infty]$.

Το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)\in\mathbb{R}$, δηλαδή όταν για κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει $b>a$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε $b_1,b_2>b$ να ισχύει:

$$\left|\Phi(b_2)-\Phi(b_1)\right|<\varepsilon.$$

Πράγματι, από την υπόθεση για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $b > a$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε $b_1, b_2 > b$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} \left|\Phi(b_2) - \Phi(b_1)\right| &= \left|\int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx\right| = \\ &= \left|\int_{b_1}^{a} f(x)dx + \int_a^{b_2} f(x)dx + \right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Απόλυτη σύγκλιση.

6.4.2. *Αν το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε και το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το $\displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ συγκλίνει, υπάρχει $b > a$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε $b_1, b_2 > b$ ισχύει:

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx = \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

Από τις ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx$$

Άρα, το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

$\square$

Παράδειγμα 6.4.3. Θα δείξουμε ότι το $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$ συγκλίνει.

Για κάθε $x \in [1, \infty)$ ισχύει $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Επειδή το $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισής συνεπάγεται ότι το $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ συγκλίνει. Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ συγκλίνει απόλυτα.

Ορισμός 6.4.4. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty |f(x)|dx$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty |f(x)|dx$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Κριτήρια απόκλισης

Πρόταση 6.4.5. *Αν* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0$, *τότε το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lim_{x\to\infty} f(x)dx = L > 0$, τότε για $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ υπάρχει $\delta > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > \delta$ να ισχύει: $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{L}{2}$.

Επομένως για κάθε $x > \delta$ έχουμε: $0 < \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < f(x)$.

Επειδή $L \neq 0$, το $\int_\delta^\infty \frac{L}{2}\, dx$ αποκλίνει, άρα (από το κριτήριο σύγκρισης) και το $\int_\delta^\infty f(x)dx$ αποκλίνει. Συνεπώς και το $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

Αν $L < 0$, τότε $\lim_{x\to\infty}[-f(x)]dx = -L > 0$. Επομένως, όπως αποδείξαμε παραπάνω, το $\int_\alpha^\infty [-f(x)]dx$ αποκλίνει. Συνεπώς και το $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

□

Πόρισμα 6.4.6. *Αν το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει και* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, *τότε* $L = 0$.

Πρόταση 6.4.7. *Αν* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *τότε το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, τότε υπάρχει $\delta > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > \delta$ να είναι $f(x) > 1$. Επειδή το $\int_\delta^\infty 1\, dx$ αποκλίνει, το $\int_\delta^\infty f(x)dx$ αποκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης). Συνεπώς και το $\int_a^\infty f(x)dx$ αποκλίνει.

□

Παραδείγματα 6.4.8.

1. Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty x\sin\frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει επειδή

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1\neq 0$$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty \ln x dx$, $a>0$, αποκλίνει επειδή $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$.

6.5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$

Θεώρημα 6.5.1. *Έστω ότι*
(i) η συναρτησεις f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $b>a$,
(ii) η συνάρτηση $\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx$, $b\in[a,\infty)$ είναι φραγμένη,
(iii) η g είναι φθίνουσα στο διάστημα $[a,\infty)$ και $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$.
Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Από την συνθήκη (ii) του θεωρήματος και από το Θεώρημα 4.13.4 της μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα προκύπτει ότι για κάθε υποδιάστημα $[b_1,b_2]$ του $[a,\infty)$ υπάρχει $\xi\in[b_1,b_2]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx=g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx+g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx \tag{6.11}$$

Από την συνθήκη (i) του θεωρήματος προκύπτει ότι $\left|\int_a^b f(x)dx\right|<K$ για κάθε $b\in[a,\infty)$. Άρα,

$$\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right|=\left|\int_{b_1}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{\xi} f(x)dx\right|\leq\left|\int_{b_1}^{a} f(x)dx\right|+\left|\int_{a}^{\xi} f(x)dx\right|<2K$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right|<2K$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, υπάρχει $b_0 > a$ ώστε για καθε $b > b_0$ να είναι $g(b) < \dfrac{\varepsilon}{4K}$. Από την (6.11) για $b_2 > b_1 > b_0$ έχουμε:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \le \left|g(b_1)\right|\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \left|g(b_2)\right|\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon$$

$\square$

Πόρισμα 6.5.2. *Αν η g είναι φθίνουσα στο $[a,\infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, τότε για κάθε $k \neq 0$ τα ολοκληρώματα*

$$\int_a^{\infty} g(x)\sin kx dx \ \textit{ και } \int_a^{\infty} g(x)\cos kx dx \quad \textit{συγκλίνουν}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένες οι συναρτήσεις $\Phi_1(b) = \displaystyle\int_a^b \sin kx dx$ και $\Phi_2(b) = \displaystyle\int_a^b \cos kx dx$.

Πράγματι, $\Phi_2(b) = \dfrac{\sin kx}{k}\Big|_a^b = \dfrac{\sin kb}{k} - \dfrac{\sin ka}{k}$.

Άρα, $|\Phi_2(b)| = \left|\dfrac{\sin kb}{k} - \dfrac{\sin ka}{k}\right| \le \left|\dfrac{\sin kb}{k}\right| + \left|\dfrac{\sin ka}{|k|}\right| \le \dfrac{2}{|k|}$.

Όμοια, $|\Phi_1(b)| \le \dfrac{2}{|k|}$.

$\square$

Παραδείγματα 6.5.3.

1. Για κάθε $a > 0$, $r > 0$ και $k \neq 0$ τα ολοκληρώματα

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin kx dx}{x^r},\ \int_a^{\infty} \frac{\cos kx dx}{x^r} \quad \text{συγκλίνουν.}$$

2. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x}dx$ συγκλίνει από το Πόρισμα 6.5.2, επειδή η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ είναι φθίνουσα στο $[e,\infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Πόρισμα 6.5.4. *Έστω ότι η g είναι φθίνουσα στο $[a, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Τότε για κάθε $k \neq 0$*

$$(i) \int_a^\infty |g(x)\sin kx|dx \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ συγκλίνει}$$

$$(ii) \int_a^\infty |g(x)\cos kx|dx \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ συγκλίνει}$$

Απόδειξη.
(i) Η g είναι φθίνουσα στο $[a, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, άρα $g(x) \geq 0$ στο $[a, \infty)$.

Αν $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^\infty |g(x)\sin kx|dx$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, αφού $|g(x)\sin kx| \leq |g(x)| = g(x)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι το $\int_a^\infty |g(x)\sin kx|dx$ συγκλίνει.

Από τον τύπο $1 = \cos 2kx + 2\sin^2 kx$, παίρνουμε

$$\int_a^\infty g(x)dx = \int_a^\infty g(x)\cos 2kxdx + 2\int_a^\infty g(x)\sin^2 kxdx$$

Το $\int_a^\infty g(x)\cos 2kx$ συγκλίνει από το Πόρισμα 6.5.2. Το $\int_a^\infty g(x)\sin^2 kxdx$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, αφού

$$g(x)\sin^2 kx = |g(x)\sin^2 kx| \leq |g(x)\sin kx|.$$

Συνεπώς το $\int_a^\infty g(x)dx$ συγκλίνει.

(ii) Αποδεικνύεται όμοια.

$\square$

Παραδείγματα 6.5.5. Να μελετηθεί αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν απολύτα ή συγκλίνουν υπό συνθήκη.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sin x dx}{x \ln x}$

   Η $g(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[2, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln \ln x - \ln \ln 2 = \infty.$$

   Αφού το $\displaystyle\int_2^{\infty} g(x)dx$ αποκλίνει, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}}$

   Η $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[1, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   Αφού το $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ αποκλίνει, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{e^x}$

   Η $g(x) = \dfrac{1}{e^x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[0, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   Αφού το $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x}\Big|_0^{\infty} = 1$ συγκλίνει, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα.

6.6 Γενικευμένα ολοκληρώματα ΙΙ είδους

Ορισμός 6.6.1. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, t]$ για κάθε $t \in (a, b)$. Αν $\lim\limits_{t \to b^-} \displaystyle\int_a^t f(x)dx \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

και λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$ συγκλίνει.

Αν το όριο $\lim\limits_{t \to b^-} \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$ αποκλίνει.

Έστω ότι η συνάρτηση $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t, b]$ για κάθε $t \in (a, b)$.

Αν $\lim\limits_{t \to a^+} \displaystyle\int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

και λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει.

Αν το όριο $\lim\limits_{t \to a^+} \displaystyle\int_t^b f(x)dx$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το γενικεύμενο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ αποκλίνει.

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα των μορφών $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)dx$ και $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ καλούνται *γενικευμένα ολοκληρώματα ΙΙ^{ου} είδους*.

Παραδείγματα 6.6.2.

1. $$\int_{2^+}^{7} \frac{dx}{(x-2)^4} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^7 \frac{dx}{(x-2)^4} = \lim_{t\to 2^+} \left[-\frac{1}{3(x-2)^3}\Bigg|_t^7 \right] =$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{t\to 2^+}\left[\frac{1}{(5)^3} - \frac{1}{(t-2)^3}\right] = \infty.$$
Άρα, το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

2. $$\int_{2^+}^{7} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^7 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\Bigg|_t^7 \right] =$$
$$= \frac{4}{3}\lim_{t\to 2^+}\left[\sqrt[4]{5^3} - \sqrt[4]{(t-2)^3}\right] = \frac{4\sqrt[4]{5^3}}{3}.$$

3. $$\int_{2}^{7^-} \frac{dx}{\sqrt[4]{7-x}} = \lim_{t\to 7^-} \int_2^t \frac{dx}{\sqrt[4]{7-x}} = \lim_{t\to 7^-} \left[\frac{(7-x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\Bigg|_2^t \right] =$$
$$= \frac{4}{3}\lim_{t\to 7^-}\left[\sqrt[4]{(7-t)^3} - \sqrt[4]{5^3}\right] = -\frac{4\sqrt[4]{5^3}}{3}.$$

6.6.1 Εφαρμογή του τύπου των Newton-Leibniz

Αν η συνάρτηση $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ για κάθε $t\in(a,b)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,t]$ και η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο $[a,b)$, τότε

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} F(t) - F(a)$$

εφόσον $\lim\limits_{t\to b^-} F(t)\in\mathbb{R}$. Συμβολίζοντας $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = F(b^-)$ παίρνουμε

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = F(b^-) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b^-}$$

Αν $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε το $\int_a^{b^-} f(x)dx$ αποκλίνει.

Αν η συνάρτηση $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ για κάθε $t\in(a,b)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t,b]$ και η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο $(a,b]$, τότε

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t)$$

εφόσον το όριο $\lim\limits_{t\to a^+} F(t) \in \mathbb{R}$. Συμβολίζοντας $\lim\limits_{x\to a^+} F(x) = F(a^+)$ παίρνουμε

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

Αν $\lim\limits_{t\to a^+} F(t)$ είναι $-\infty$ ή ∞ ή δεν υπάρχει, τότε το $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ αποκλίνει.

Παραδείγματα 6.6.3.

1. $\displaystyle\int_{a^+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}$, $b > a$, συγκλίνει $\iff p < 1$

   Πράγματι, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

   $$p \neq 1 \Longrightarrow \int_{a^+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_{a^+}^{b} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} + \lim_{x\to a^+}\left[\frac{(x-a)^{1-p}}{p-1}\right] =$$

   $$= \begin{cases} \infty, & \text{αν } p > 1 \\ \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & \text{αν } p < 1. \end{cases}$$

   $$p = 1 \Longrightarrow \int_{a^+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \ln(x-a)\Big|_{a^+}^{b} = \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+} \ln(x-a) = \infty.$$

   Όμοια αποδεικνύεται ότι:

2. $\displaystyle\int_{a}^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^p}$, $b > a$, συγκλίνει $\iff p < 1$

3. $\displaystyle\int_{0^+}^{b} \frac{dx}{x^p}$, $b > 0$ συγκλίνει $\iff p < 1$

Παρατήρηση 6.6.4. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε οι συναρτήσεις $\Phi(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ και $\Psi(t) = \displaystyle\int_t^b f(x)dx$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) = \lim_{t\to b^-} \Phi(t) = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Psi(a) = \lim_{t\to a^+} \Psi(t) = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Δηλαδή για τον ορισμό του ολοκληρώματος ΙΙ είδους παίρνουμε εκείνη την ισότητα που για τα ορισμένα ολοκληρώματα ισχύει έτσι και αλλιώς.

6.7 Ιδιότητες γενικευμένων ολοκληρωμάτων II^{ου} είδους

Οι προτάσεις που ακολουθούν εκφράζουν τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων τις μορφής $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$. Οι αποδείξεις αυτών είναι όμοιες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων των γενικευμένων ολοκληρωμάτων I^{ου} είδους.

Ανάλογες ιδιότητες έχουν τα ολοκληρώματα τις μορφής $\int_{a}^{b^-} f(x)dx$.

Στις προτάσεις που ακολουθούν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[c,b]$ για κάθε $c \in (a,b)$.

6.7.1. *Το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $c \in (a,b)$ *το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ *συγκλίνει*

Επιπλέον, αν $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει, ή είναι* ∞*, ή είναι* $-\infty$*, τότε*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

6.7.2. *Αν το* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_{a^+}^{b} cf(x)dx$ *συγκλίνει για κάθε* $c \in \mathbb{R}$*, επιπλέον*

$$\int_{a^+}^{b} cf(x)dx = c\int_{a^+}^{b} f(x)dx$$

6.7.3. *Αν τα ολοκληρώματα* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *και* $\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ *συγκλίνουν, τότε και το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} [f(x)+g(x)]dx$ *συγκλίνει, επιπλέον*

$$\int_{a^+}^{b} [f(x)+g(x)]dx = \int_{a^+}^{b} f(x)dx + \int_{a^+}^{b} g(x)dx$$

6.7.4. *Αν ένα από τα ολοκληρώματα* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$, $\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ *συγκλίνει και το άλλο αποκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} [f(x)+g(x)]dx$ *αποκλίνει.*

6.8 Κριτήρια σύγκλισης ολοκληρωμάτων II^{ου} είδους

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε τα κριτήρια σύγκλισης των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$, όπου $a < b$.

Οι αποδείξεις των κριτηρίων αυτών είναι όμοιες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων κριτηρίων συγκλισης των ολοκληρωμάτων I^{ου} είδους.

Ανάλογα κριτήρια ισχύουν και για τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{a}^{b^-} f(x)dx$.

Άλλωστε το ολοκλήρωμα $\int_{a}^{b^-} f(x)dx$ μετατρεπεται σε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ από τον τύπο:

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx = \int_{-b^+}^{-a} f(-x)dx$$

Πράγματι,

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \left[- \int_{-a}^{-t} f(-x)dx \right] =$$
$$= \lim_{t\to b^-} \int_{-t}^{-a} f(-x)dx = \lim_{-t\to -b^+} \int_{-t}^{-a} f(-x)dx = \int_{-b^+}^{-a} f(-x)dx$$

6.8.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη.

6.8.1. *Το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $b_1, b_2 \in (a, a+\delta)$ *ισχύει*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

6.8.2 Απόλυτη σύγκλιση

6.8.2. *Αν το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} |f(x)|dx$ *συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα* $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει.*

Ορισμός 6.8.3. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a^+}^{b} |f(x)|dx$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a^+}^{b} |f(x)|dx$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a^+}^{b} |f(x)|dx$ *συγκλίνει υπό συνθήκη.*

6.9 Κριτήρια συγκλισης του $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b]$

Στις προτάσεις που ακολουθούν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[c, b]$ για κάθε $c \in (a, b)$.

6.9.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη.

6.9.1. *Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b]$, τότε το $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{t}^{b} f(x)dx \leq M$ για κάθε $t \in (a, b)$.*

6.9.2 Κριτήριο σύγκρισης

6.9.2. *Αν $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in (a, b]$ και το $\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει.*

6.9.3 Κριτήριο του ορίου

6.9.3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g θετικές στο διάστημα $(a,b]$.*

(i) *Αν* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *τότε τα ολοκληρώματα* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ *ή και τα δύο συγκλίνουν, ή και τα δύο αποκλίνουν.*

(ii) *Αν* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *και το* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει.*

(iii) *Αν* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *και το* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ *αποκλίνει, τότε το* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *αποκλίνει.*

Θεώρημα 6.9.4. *Αν η συνάρτηση $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και για κάθε $c\in(a,b)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M\in(0,\infty)$ για το οποίο $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in(a,b]$. Όμως

$$\int_{a^+}^{b} Mdx = Mx\Big|_{a^+}^{b} = Mb - \lim_{x\to a^+} Mx = M(b-a).$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{a^+}^{b} Mdx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης 6.9.2 συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{a^+}^{b} |f(x)|dx$ συγκλίνει. Άρα, γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα.

$\square$

Όμοια αποδεικνύεται το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 6.9.5. *Αν η συνάρτηση $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και για κάθε $c\in(a,b)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_{a}^{b^-} f(x)dx$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Παραδείγματα 6.9.6. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

1. $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}}$

   Η $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ είναι θετική και συνεχής στο $(0,1]$ και $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

2. $\displaystyle\int_{2^+}^{3} \frac{(x^2+1)dx}{x^2-4}$

   Η $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ είναι θετική και συνεχής στο $(2,3]$.

   Για $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ βρίσκουμε $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{5}{4}$.

   Όμως το $\displaystyle\int_{2}^{3} g(x)dx = \int_{2}^{3} \frac{dx}{x-2}$ αποκλίνει. Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου, το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x^3}}$

   Η $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ είναι θετική και συνεχής στο $(0,1]$ και
   $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \infty$.

   Για $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ βρίσκουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

   Όμως το $\displaystyle\int_{0}^{1} g(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει. Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

   Η $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 0$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$.

   Για $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ έχουμε ότι $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{g(x)} = -\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = 0$ και το $\displaystyle\int_{0^+}^1 g(x)dx = \int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του ορίου το $\displaystyle\int_{0^+}^1 |f(x)|dx$ συγκλίνει. Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα.

5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln x dx}{(3-x)^q}$

   Οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln x}{(3-x)^q}$ και $g(x) = \dfrac{1}{(3-x)^q}$ είναι θετικές και συνεχείς στο $[2,3)$. Επίσης $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3^-} \ln x = \ln 3$.

   Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνον αν το $\displaystyle\int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 \frac{dx}{(3-x)^q}$ συγκλίνει, δηλαδή για $q < 1$.

6. $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\sin}{x} dx$

   Η $f(x) = \dfrac{\sin}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,1]$. Επίσης $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin}{x} = 1$. Άρα, η f είναι φραγμένη στο $(0,1]$. Από το Θεώρημα 6.9.4 συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\sin x}{x} dx$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.

7. $\displaystyle\int_{0^+}^1 \sin\frac{1}{x} dx$

   Η $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,1]$. Επίσης για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει: $|f(x) = \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$. Από το Θεώρημα 6.9.4 συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0^+}^1 \sin\frac{1}{x} dx$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.

6.10 Ολοκλήρωμα από a εως b

Έστω ότι $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ και $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$.

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a', b'] \subset (a, b) \setminus \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Επιλέγουμε σημεία $c'_1, c'_2, ..., c'_{n+1} \in (a, b)$, τέτοια ώστε $c'_i < c_i < c'_{i+1}$ και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c'_1} + \int_{c'_1}^{c_1} + \int_{c_1}^{c'_2} + \ldots + \int_{c'_n}^{c_n} + \int_{c_n}^{c'_{n+1}} + \int_{c'_{n+1}}^{b} f(x)dx$$

εφόσον συγκλίνει το καθένα από τα γενικευμένα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας, διαφορετικά λέμε ότι το $\int\limits_a^b f(x)dx$ αποκλίνει.

Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

εφόσον συγκλίνει το καθένα από τα ολοκληρώματα $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$ και $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$. Αν ένα από τα ολοκληρώματα $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$, $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ αποκλίνει, τότε και το $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ αποκλίνει.

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b), όπου $a, b \in \mathbb{R}$, και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a', b'] \subset (a, b)$. Τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_c^{b^-} f(x)dx, \text{ όπου } c \in (a, b),$$

εφόσον συγκλίνει το καθένα από τα ολοκληρώματα $\int\limits_{a^+}^{c} f(x)dx$ και $\int\limits_c^{b^-} f(x)dx$. Αν ένα από τα ολοκληρώματα $\int\limits_{a^+}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_c^{b^-} f(x)dx$ αποκλίνει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int\limits_a^b f(x)dx$ αποκλίνει.

Παραδείγματα 6.10.1.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)(x-1)}=\int_{-\infty}^{-3}+\int_{-3}^{-2^-}+\int_{-2^+}^{0}+\int_{0}^{1^-}+\int_{1^+}^{2}+\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x+2)(x-1)}$

   Βρίσκουμε $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{|x+2|}+c$. Θέτουμε $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{|x-1|}{|x+2|}$.

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(x+2)(x-1)}=F(-3)-\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-3)$.

   $\displaystyle\int_{-3}^{-2^-}\frac{dx}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to-2^-}F(x)-F(-3)=\infty$. Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^p}+\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$

   Το $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^p}$ αποκλίνει για $p\geq 1$ και το $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ αποκλίνει για $p\leq 1$, άρα το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει για κάθε $p\in\mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

   $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\arctan b)-\arctan 0=\frac{\pi}{2}$,

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan 0-\lim_{b\to-\infty}(\arctan b)=\frac{\pi}{2}$. Άρα, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

   Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $(0,1]$ και ολοκληρώσιμη στο $[t,1]$ για κάθε $t\in(0,1]$. Από το Θεώρημα **;;** το $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

   $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.5.3(1).

   Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

6.11 Συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα του Euler

Πρόταση 6.11.1. *Το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \text{ συγκλίνει αν και μόνον αν } p>0 \text{ και } q>0.$$

Απόδειξη.

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx.$$

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\Big/\frac{1}{x^{1-p}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(1-x)^{q-1} = 1$ και το $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1-p}}$ συγκλίνει μόνο για $1-p<1$, δηλαδή μόνο για $p>0$.

Άρα, το $\displaystyle\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx$ συγκλίνει μόνο για $p>0$.

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\Big/\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\right) = \lim_{x\to 1^-} x^{p-1} = 1$ και το $\displaystyle\int_{1^-}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)^{1-q}}$ συγκλίνει μόνο για $1-q<1$, δηλαδή για $q>0$.

Άρα το $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx$ συγκλίνει μόνο για $q>0$.

Από τα παραπάνω το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνον αν $p>0$ και $q>0$.

□

Ορισμός 6.11.1. Η συναρτηση

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ p>0, q>0$$

καλείται Βήτα-συνάρτηση του Euler.

Πρόταση 6.11.2. *Το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx \text{ συγκλίνει αν και μόνον αν } p>0.$$

Απόδειξη. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx = \int_{0^+}^{1} \frac{dx}{e^x x^{1-p}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x x^{1-p}}.$

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{e^x x^{1-p}}$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x x^{1-p}}\Big/\frac{1}{x^{1-p}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x} = 1$ και το $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^{1-p}}$ συγκλίνει μόνο για $1-p<1$, δηλαδή για $p>0$.

Άρα $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{e^x x^{1-p}}$ συγκλίνει μόνο για $p>0$.

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x x^{1-p}}$.

Έστω $n\neq 0$ ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $1-p+n>1$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x x^{1-p}}\Big/\frac{1}{x^{1-p+n}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ και το $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1-p+n}}$ συγκλίνει.

Άρα το $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x x^{1-p}}$ συγκλίνει για κάθε $p\in\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνον αν $p>0$.

Ορισμός 6.11.2. Η συνάρτηση

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx,\ p>0$$

καλείται Γάμμα-συνάρτηση του Euler.

6.12 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Θεώρημα 6.12.1. *Έστω ότι οι $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες.*

Αν f' και g' είναι συνεχείς στο $[a, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)f'(x)dx$ συγκλίνει, τότε

$$\int_a^{\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} g(x)f'(x)dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $b \in [a, \infty)$ ισχύει:

$$\int_a^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b} - \int_a^{b} g(x)f'(x)dx.$$

Επομένως $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)g'(x)dx = \lim_{b\to\infty}\Big(f(x)g(x)\Big|_a^{b}\Big) - \lim_{b\to\infty}\int_a^{b} g(x)f'(x)dx.$

Αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ και $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)f'(x)dx$ συγκλίνει, τότε

$$\int_a^{\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{b\to\infty}\Big((f(b)g(b) - f(a)g(a)\Big) - \int_a^{\infty} g(x)f'(x)dx =$$
$$= f(x)g(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} g(x)f'(x)dx$$

□

Θεώρημα 6.12.2. *Έστω ότι οι $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες. Αν f' και g' είναι συνεχείς στο $(a, b]$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ και το $\displaystyle\int_{a^+}^{b} g(x)f'(x)dx$ συγκλίνει, τότε*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{a^+}^{b} - \int_{a^+}^{b} g(x)f'(x)dx.$$

Θεώρημα 6.12.3. *Έστω ότι οι $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες. Αν f' και g' είναι συνεχείς στο $[a, b)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ και το $\displaystyle\int_{a}^{b^-} g(x)f'(x)dx$ συγκλίνει, τότε*

$$\int_{a}^{b^-} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{a}^{b^-} - \int_{a}^{b^-} g(x)f'(x)dx.$$

Παραδείγματα 6.12.4.

1. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,\ a > 0.$

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_a^{\infty} -\frac{1}{x}\, d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\ \Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \in \mathbb{R}$.

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$.

$\displaystyle\Big|\frac{\cos x}{x^2}\Big| \le \frac{1}{x^2}$ και $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{\infty} \Big|\frac{\cos x}{x^2}\, dx\Big|$ συγκλίνει $\Longrightarrow$

$\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ συγλίνει $\Longrightarrow$ το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

2. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = \int_{0^+}^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = \int_{0^+}^1 \ln x\ d(\arctan x) =$$

$$= (\ln x \cdot \arctan x)\Big|_{0^+}^1 - \int_{0^+}^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx =$$

$$= (\ln 1 \cdot \arctan 1) - \lim_{x\to 0^+} (\ln x \cdot \arctan x) - \int_{0^+}^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx$$

Από τον κανόνα του L' Hospital: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln x \cdot \arctan x) = 0$.

Θα μελετήσουμε ως προς σύγκλιση το $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx$.

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,1]$ και

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arctan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1,$$

έπεται ότι η f είναι φραγμένη στο $(0,1]$.

Άρα, το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx$ συγκλίνει.

Συνεπώς, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

6.13 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Θεώρημα 6.13.1. *Έστω ότι $\varphi : [c, d) \to [a, b)$, $d, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, είναι γνησίως αύξουσα και επί συνάρτηση και φ' είναι συνεχής στο $[c, d)$. Αν $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε*

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \int_c^{d^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

εφόσον τα ολοκληρώματα συγκλίνουν, διαφορετικά και τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνουν.

Απόδειξη. Από την συνέχεια των φ και f έπεται ότι η φ είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, t_0]$ για κάθε $t_0 \in [c, d)$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x_0]$ για κάθε $x_0 \in [a, b)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\Phi(t_0) = \int_c^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, t_0 \in [c, d), \text{ και } F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx, x_0 \in [a, b)$$

Επειδή η $\varphi : [c, t_0] \to [a, \varphi(t_0]$ είναι επί και φ' είναι συνεχής, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\Phi(t_0) = \int_c^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^{\varphi(t_0)} f(x)dx = F(\varphi(t_0)), \; t_0 \in [c, d).$$

Επειδή $\varphi : [c, d) \to [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και επί, συνεπάγεται ότι $\lim_{t \to d} \varphi(t) = b$. Άρα, $\lim_{t_0 \to d} \Phi(t_0) = \lim_{t_0 \to d} F(\varphi(t_0)) = \lim_{x_0 \to b} F(x_0)$. Οπότε

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{x_0 \to b} F(x_0) = \lim_{t_0 \to d} \Phi(t_0) = \int_c^{d^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

□

Όμοια αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 6.13.2. *Έστω ότι η $\varphi : (c, d] \to (a, b]$, $c, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, είναι γνησίως αύξουσα και επί συνάρτηση και φ' είναι συνεχής στο $(c, d]$.*

Αν $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \int_{c^+}^{d} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

εφόσον τα ολοκληρώματα συγκλίνουν, διαφορετικά και τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνουν.

Θεώρημα 6.13.3. *Έστω ότι $\varphi : [c,d) \to (a,b]$ είναι γνησίως φθίνουσα και επί συνάρτηση και φ' είναι συνεχής στο $[c,d)$, όπου $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ και $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Αν $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = -\int_{c}^{d^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

εφόσον τα ολοκληρώματα συγκλίνουν, διαφορετικά και τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνουν.

Θεώρημα 6.13.4. *Έστω ότι η $\varphi : (c,d] \to [a,b)$ είναι γνησίως φθίνουσα και επί συνάρτηση και φ' είναι συνεχής στο $(c,d]$, όπου $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Αν $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε*

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx = -\int_{c^+}^{d} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

εφόσον τα ολοκληρώματα συγκλίνουν, διαφορετικά και τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνουν.

Παραδείγματα 6.13.5.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$, για $x = \sqrt{t}$, $t \in (0,\infty)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ είναι συνεχής στο$(0,1]$ και

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t} \cdot \sqrt{t}\right) = 0,$$

έπεται ότι η $f(x) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ είναι φραγμένη στο $(0,1]$. Άρα, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ συγκλιίνει. Το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ συγκλίνει από το Πόρισμα 6.5.2 επειδή η συνάρτηση $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ είναι γινόμενο της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{t}}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,\infty)$ και $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$, και της $\sin t$.

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

2. $\displaystyle\int_0^\infty x\sin(e^x)dx = \int_1^\infty \frac{\ln t}{t}\sin t dt$, για $x = \ln t$, $t \in [1, \infty)$.

   Θέτουμε $g(t) = \frac{\ln t}{t}$. Τότε $g'(x) = \frac{1-\ln t}{t^2} < 0$ για $t \in (e, \infty)$, δηλαδή η g είναι φθίνουσα στο (e, ∞). Επίσης $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

   Από το Πόρισμα 6.5.2 το $\int_e^\infty \frac{\ln t}{t}\sin t dt$ συγλίνει. Άρα, και το $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t}\sin t dt$ συγκλίνει. Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

3. $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

   όπου $c \in (a, b)$.

   Θέτουμε $x = \varphi(t) = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

   Τότε $dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt$ και $\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t\cos t$

   Οπότε $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\varphi^{-1}(c)} 2dt + \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$

Παρατήρηση 6.13.6. $f(x) = \sin x^2$ είναι παράδειγμα συνάρτησης η οποία δεν έχει όριο όταν $x \to \infty$ και όμως το ολοκλήρωμά της στο $[0, \infty)$ συγκλίνει.

Παρατήρηση 6.13.7. $f(x) = x\sin(e^x)$ είναι παράδειγμα μη φραγμένης συνάρτησης στο $[0, \infty)$ το ολοκλήρωμα της οποίας στο $[0, \infty)$ συγκλίνει.

6.14 Μετατροπή των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Ορίζουμε

$$\int_b^{a^+} f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_b^t f(x)dx, \quad \int_{b^-}^a f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_t^a f(x)dx$$
$$\int_\infty^a f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_b^a f(x)dx, \quad \int_b^{-\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

τότε

$$\int_b^{a^+} f(x)dx = -\int_{a^+}^b f(x)dx, \quad \int_{b^-}^a f(x)dx = -\int_a^{b^-} f(x)dx$$
$$\int_\infty^a f(x)dx = -\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_b^{-\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα I είδους $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $a > 0$, μετατρέπεται σε γενικευμένο ολοκλήρωμα II είδους (ή σε ορισμένο ολοκλήρωμα) με αντικαταστaση $x = \dfrac{1}{t}$, $t \in (0, \frac{1}{a}]$ ως εξής:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{f(\frac{1}{t})dt}{t^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{f(\frac{1}{t})dt}{t^2}\right] =$$
$$= \lim_{\frac{1}{b}\to 0^+}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{f(\frac{1}{t})dt}{t^2}\right] = \int_{0^+}^{\frac{1}{a}} \frac{f(\frac{1}{t})dt}{t^2}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα II είδους $\int_a^{b^-} f(x)dx$ μετατρέπεται σε γενικευμένο ολοκλήρωμα I είδους με αντικατάσταση $x = b - \dfrac{1}{t}$, $t \in [\frac{1}{b-a}, \infty)$ ως εξής:

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{b-c}} \frac{f(b-\frac{1}{t})dt}{t^2} =$$
$$= \lim_{\frac{1}{b-c}\to\infty}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{b-c}} \frac{f(b-\frac{1}{t})dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{f(b-\frac{1}{t})dt}{t^2}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα II είδους $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ μετατρέπεται σε γενικευμένο ολοκλήρωμα I είδους με αντικατάσταση $x = a + \dfrac{1}{t}$, $t \in [\frac{1}{b-a}, \infty)$ ως εξής:

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\left[-\int_{\frac{1}{c-a}}^{\frac{1}{b-a}} \frac{f(a+\frac{1}{t})dt}{t^2}\right] =$$
$$= \lim_{\frac{1}{c-a}\to\infty}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{c-a}} \frac{f(a+\frac{1}{t})dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{f(a+\frac{1}{t})dt}{t^2}$$

6.15 Ασκήσεις

Εφαρμογή του βασικού τύπου του ολοκληρωτικού λογισμού.

6.15.1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα ή δείξτε ότι αποκλίνει.

(α′) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

(β′) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$

(γ′) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$,

(δ′) $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$, $a>1$,

(ε′) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-kx}dx, k>0$,

(στ′) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$

(ζ′) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{kx}dx, k>0$,

(η′) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

(ϑ′) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx$

(ι′) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$

Απαντήσεις: (α′) αποκλίνει, (β′) αποκλίνει, (γ′) $\frac{1}{\ln 2}$, (δ′) $\frac{1}{\ln a}$, (ε′) $\frac{1}{k}$, (στ′) αποκλίνει, (ζ′) αποκλίνει, (η′) $\frac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\ln 3$, (ϑ′) 1, (ι′) $-\frac{1}{8}$

6.15.2. Δείξτε ότι αν $a>0$, τότε

(α′) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}$, (β′) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$.

6.15.3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας το ολκλήρωμα του Poisson $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: (α′) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$, $a>0$, (β′) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

6.15.4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας το ολκλήρωμα του Dirichlet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$: (α′) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$, (β′) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos bx}{x}\,dx$, $a>b>0$.

Κριτήρια σύγκλισης ολοκληρωμάτων $\mathrm{I}^{\text{ου}}$ είδους

6.15.5. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

(α′) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\ln x dx$.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln x}{e^x} = 0$ και $\displaystyle\int_1^\infty g(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, άρα το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β′) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$ και $\displaystyle\int_1^\infty g(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, άρα το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(γ′) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.

Λύση: Θέτουμε $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ και $\displaystyle\int_2^\infty g(x) = \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, άρα το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

6.15.6. Δείξτε ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}=0.$

Λύση: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\cosh x}+\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}.$

Θέτουμε $f(x)=\dfrac{x}{\cosh x}=\dfrac{2x}{e^x+e^{-x}}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}.$

Οπότε $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{e^x+e^{-x}}=0.$

Επειδή το $\displaystyle\int_1^{\infty}g(x)=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου και το $\displaystyle\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}$ συγκλίνει, άρα και το $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}$ συγκλίνει.

Από τον τύπο $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{\infty}f(-x)dx$ παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\cosh x}=\int_0^{\infty}\frac{-xdx}{\cosh(-x)}=-\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}.$$

Άρα, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\cosh x}+\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\cosh x}=0$

6.15.7. Δείξτε ότι για κάθε $p\in\mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\int\limits_1^{\infty}x^pe^{-x}dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο του ορίου στις

$f(x)=x^pe^{-x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^{n-p}}$, όπου $n-p>1.$

6.15.8. Να αποδειχθεί ότι το $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx$, όπου $k\neq 0$, συγκλίνει απόλυτα.

6.15.9. Να αποδειχθεί ότι αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα, η συνάρτηση g είναι φραγμενη στο $[a,\infty)$ και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $b>a$, τότε το $\int\limits_a^{\infty}f(x)g(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα.

Ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)g(x)dx$

6.15.10. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\cos xdx$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Λύση: $\left(\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\right)' = \dfrac{1-\ln\ln x}{x(\ln x)^2} < 0 \Longleftrightarrow 1-\ln\ln x < 0 \Longleftrightarrow e^e < x.$

Η $g(x) = \dfrac{\ln\ln x}{\ln x}$ είναι συνεχής και φθίνουσα στο διάστημα $[e^e, \infty)$ και $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\ln x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$

Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση το $\displaystyle\int_{e^e}^{\infty} g(x)dx = \int_{e^e}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\, dx.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}}\right) = \infty$$

Επειδή το $\displaystyle\int_{e^e}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ αποκλίνει, από το κριτήριο του ορίου το $\displaystyle\int_{e^e}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\, dx$ αποκλίνει. Άρα, το $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\cos x dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

6.15.11. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{\ln x}$ αποκλίνει.

6.15.12. Δείξτε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν υπό συνθήκη:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\, dx, \int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{\ln(1+x)}, \int_0^1 \frac{\sin x^{-1} dx}{x^2\ln(1+x^{-1})}.$$

Κριτήρια σύγκλισης ολοκληρωμάτων ΙΙ^{ου} είδους

6.15.13. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}$ συγκλίνει.

Λύση: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1-x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$

Οι συναρτήσεις $f(x) = -\dfrac{\ln x}{1-x}$ και $g(x) = -\ln x$ είναι θετικές και συνεχείς στο $(0,1]$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-x} = 1$ και

$$\begin{aligned}\int_{0^+}^{1} g(x)dx &= \int_{0^+}^{1} -\ln x dx = (-x\ln x + x)\big|_{0^+}^{1} = \\ &= (-1\ln 1 + 1) - \lim_{x\to 0^+}(-x\ln x + x) = 1 + \lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \\ &= 1 + \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του ορίου, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

6.15.14. Δείξτε ότι αποκλίνουν τα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1-x}$, (β΄) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{x^3}$

Ολοκλήρωμα από a εως b

6.15.15. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ συγκλίνει.

Λύση: Η $f(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \infty$.

Γράφουμε $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \int_{0^+}^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$,

Θέτουμε $g_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και $g_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

Το $\displaystyle\int_{0^+}^1 g_1(x) = \int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}} = 1$, άρα το $\displaystyle\int_{0^+}^1 f(x)dx = \int_{0^+}^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ συγκλίνει από το κριτήριο του ορίου.

Το $\displaystyle\int_1^\infty g_2(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ συγκλίνει και $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g_2(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{\sqrt{x}}} = 0$, άρα το $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ συγκλίνει από το κριτήριο του ορίου.

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

6.15.16. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ αποκλίνει.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$ είναι συνεχής στο $(0,1)$.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = -\infty$ και $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = -\infty$.

Οπότε, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x} = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$.

Για $g(x) = \frac{1}{1-x}$ το $\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{dx}{x-1}$ αποκλίνει.

Επειδή $\lim_{x\to 1^-} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln x} = 1$, από το κριτήριο του ορίου το $\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} (-f(x)) = \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{-dx}{\sqrt{x}\ln x}$ αποκλίνει. Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

6.15.17. Δείξτε ότι συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(α′) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, (β′) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

Λύση:

(α′) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\ln x \cdot \arcsin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx.$

Η συνάρτηση $\frac{\arcsin x}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,1]$ και

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$. Άρα, το $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}$ είναι ορισμένο.

Επίσης $\lim_{x\to 1^-} (\ln x \cdot \arcsin x) = 0 \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x \cdot \arcsin x) = \lim_{x\to 0^+} \left[(x \cdot \ln x) \cdot \frac{\arcsin x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [(x \cdot \ln x)] \cdot \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\arcsin x}{x}\right] = 0 \cdot 1 = 0 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β′) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = [x\ln(\sin x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\ dx =$$

$$= [x\ln(\sin x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\ dx$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x} = 0$,

το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\tan x}$ είναι ορισμένο.

Από την άλλη μεριά

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln(\sin x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 0 \in \mathbb{R}$$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[x\ln(\sin x)] = 0 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Κεφάλαιο 7

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace σε μια συνάρτηση f αντιστοιχεί την συνάρτηση Lf, την *μετασχηματισμένη κατά Laplace*, που ορίζεται ως εξής:

$$Lf(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$$

Η μετασχηματισμένη κατά Laplace της $f(x)$ συμβολίζεται και με $L\{f(x)\}$.

Παράδειγμα 7.0.1.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x$. Για $p \neq 1$ έχουμε

   $$Lf(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot e^x dx = \int_0^\infty e^{(1-p)x} dx = \left. \frac{e^{(1-p)x}}{1-p} \right|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(1-p)x}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

   Αν $p > 1$, τότε $Lf(p) = 0 + \dfrac{1}{p-1} = \dfrac{1}{p-1}$.

   Αν $p < 1$, τότε $Lf(p) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{(1-p)x}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} = \infty$.

   Αν $p = 1$, τότε $Lf(p) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cdot e^x dx = \int_0^\infty dx = x\Big|_0^\infty = \infty$.

   Άρα, $L\{e^x\}$ συγκλίνει στο διάστημα $(1, \infty)$.

2. $L\{e^{x^2}\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-px} \cdot e^{x^2} dx$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-px} \cdot e^{x^2} = \infty$ για κάθε $p \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $L\{e^{x^2}\}$ αποκλίνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

7.1 Οι μετασχηματισμένες κατά Laplace των στοιχειωδών συναρτήσεων

Πρόταση 7.1.1.

1. $L\{1\} = \frac{1}{p},\ p > 0$

2. $L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}},\ p > 0,\ n = 0, 1, ...$

3. $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a},\ p > a$

4. $L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2},\ p > 0$

5. $L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2},\ p > 0$

Απόδειξη. **1.** Θεωρούμε την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$. Αν $p > 0$, τότε

$$Lf(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot 1dx = \int_0^\infty e^{-px}dx = -\frac{1}{p}\ e^{-px}\Big|_0^\infty =$$
$$= \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{p}\ e^{-px}) - (-\frac{1}{p}\ e^{-p\cdot 0}) = \frac{1}{p}$$

2. Ο τύπος έχει αποδειχτεί για $n = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $p > 0$ και $L\{x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{p^n}$. Τότε:

$$L\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-px} \cdot x^n dx = \int_0^\infty x^n(-\frac{1}{p})d(e^{-px}) =$$
$$= -\frac{x^n e^{-px}}{p}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px}nx^{n-1}dx =$$
$$= \lim_{x\to\infty}(-\frac{x^n e^{-px}}{p}) + \frac{0^n \cdot e^{-0\cdot p}}{p} + \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}dx =$$
$$= \frac{n}{p}L\{x^{n-1}\} = \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3. Αν $p > a$, τότε

$$L\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-px} \cdot e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{(a-p)x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{a-p}\, d(e^{(a-p)x})$$

$$= \frac{e^{(a-p)x}}{a-p}\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(a-p)x}}{a-p} - \frac{1}{a-p} = 0 + \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-a}.$$

4. Αν $p > 0$, τότε

$$L\{\sin ax\} = \int_0^\infty e^{-px} \sin ax dx = -\frac{e^{-px}(p\sin ax + a\cos ax)}{p^2+a^2}\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{e^{-px}(p\sin ax + a\cos ax)}{p^2+a^2}\right) + \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{e^{-px}p\sin ax}{p^2+a^2}\right) + \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{e^{-px}a\cos ax}{p^2+a^2}\right) + \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$= -\frac{p}{p^2+a^2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin ax}{e^{px}} - \frac{a}{p^2+a^2}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos ax}{e^{px}} + \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$= \frac{a}{p^2+a^2} \text{ (επειδή } \lim_{x\to\infty}\frac{\sin ax}{e^{px}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos ax}{e^{px}} = 0.$$

5. Αν $p > 0$, τότε

$$L\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-px} \cos ax dx = \frac{e^{-px}(a\sin ax - p\cos ax)}{p^2+a^2}\Big|_0^\infty = \frac{p}{p^2+a^2}$$

□

Παραδείγματα 7.1.2.

1. $L(e^x) = \dfrac{1}{p-1},\ L(e^{-x}) = \dfrac{1}{p+1}$

2. $L(e^{2x}) = \dfrac{1}{p-2},\ L\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right) = \dfrac{1}{p+2}$

3. $L(x) = \dfrac{1}{p^2},\ L(x^2) = \dfrac{2}{p^3},\ L(x^3) = \dfrac{6}{p^4}$

4. $L(\sin x) = \dfrac{1}{p^2+1},\ L(\sin 2x) = \dfrac{1}{p^2+4}$

5. $L(\cos x) = \dfrac{p}{p^2+1},\ L(\cos 2x) = \dfrac{p}{p^2+4}$

7.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Πρόταση 7.2.1. *Ο μετασχηματισμός Laplace έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) $L\{af(x)+bg(x)\} = aL\{f(x)\} + bL\{g(x)\}$

(ii) $L\{f(x)\} = \phi(p) \Longrightarrow L\{e^{ax}\cdot f(x)\} = \phi(p-a)$

(iii) $L\{f(x)\} = \phi(p) \Longrightarrow L\{f(ax)\} = \dfrac{1}{a}\,\phi\left(\dfrac{p}{a}\right)$

Απόδειξη. (i) $L\{af(x)+bg(x)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-px}(af(x)+bg(x))dx =$

$$= a\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx + b\int_0^\infty e^{-px}g(x)dx =$$
$$= aL\{f(x)\} + bL\{g(x)\}$$

(ii) $L\{e^{ax}\cdot f(x)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-px}\cdot e^{ax}\cdot f(x)dx =$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x)dx = \phi(p-a)$$

(iii) $L\{f(ax)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-px}f(ax)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-p\frac{u}{a}}f(u)du =$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{p}{a})u}f(u)du = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{p}{a})x}f(x)dx = \frac{1}{a}\phi\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

Παραδείγματα 7.2.2.

6. $L\{\sinh ax\} = L\left\{\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}L\{e^{ax}\} - \dfrac{1}{2}L\{e^{-ax}\} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+a} = \frac{a}{p^2-a^2},\ p>|a|$$

7. $L\{\cosh ax\} = L\left\{\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\} = \dfrac{p}{p^2-a^2},\ p>|a|$

8. $L\{e^{ax}x^n\} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}},\ p>a$

9. $L\{e^{ax}\sin bx\} = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2},\ p > a$

10. $L\{e^{ax}\cos bx\} = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2},\ p > a$

Παράδειγμα 7.2.3. Θα υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-3x}\sin^2 x dx$$

με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace.

Παρατηρούμε για $f(x) = \sin^2 x$ έχουμε $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\sin^2 x dx = Lf(3)$.
Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$L\{f(x)\} = L\{\sin^2 x\} = L\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{\cos 2x\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

Άρα, $Lf(3) = \left[\dfrac{2}{p(p^2+4)}\right]_{p=3} = \dfrac{2}{39}$

Θεώρημα 7.2.4. $L\{x^n\cdot f(x)\} = (-1)^n\dfrac{d^n L\{f(x)\}}{dp^n},\ n = 1, 2, ...$

Παραδείγματα 7.2.5.

11. $L\{x\cdot\sin ax\} = -\dfrac{dL\{\sin ax\}}{dp} = -\left(\dfrac{a}{p^2+a^2}\right)'_p = \dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2},\ p > 0$

12. $L\{x\cdot\cos ax\} = -\dfrac{dL\{\cos ax\}}{dp} = -\left(\dfrac{p}{p^2+a^2}\right)'_p = \dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2},\ p > 0$

7.3 Αντιστροφή του Μετασχηματισμού Laplace

Στις εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ από την μετασχηματισμένη κατά Laplace αυτής $\phi(p)$, δηλαδή να λυθεί ως προς $f(x)$ η εξίσωση

$$L\{f(x)\} = \phi(p) \tag{7.1}$$

Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η ϕ είναι μετασχηματισμένη κατά Laplace, τότε η f είναι μοναδική. Γράφουμε τότε

$$f(x) = L^{-1}\{\phi(p)\}$$

και καλούμε τη συνάρτηση f αντίστροφη κατά Laplace της ϕ.

Παραδείγματα 7.3.1. Θα αποδείξουμε ότι:

(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p-a)^n}\right\} = \dfrac{e^{ax}x^{n-1}}{(n-1)!}$

(b) $L^{-1}\left\{\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax}\sin bx$

(c) $L^{-1}\left\{\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax}\cos bx$

(d) $L^{-1}\left\{\dfrac{b}{(p-a)^2-b^2}\right\} = e^{ax}\sinh bx$

(e) $L^{-1}\left\{\dfrac{p-a}{(p-a)^2-b^2}\right\} = e^{ax}\cosh bx$

Απόδειξη. (a) Από τον τύπο **8** παίρνουμε: $L\{e^{ax}x^{n-1}\} = \dfrac{(n-1)!}{(p-a)^n}$, συνεπώς

$$L\left\{\frac{e^{ax}x^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}L\{e^{ax}x^{n-1}\} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} = \frac{1}{(p-a)^n}$$

(b) Προκύπτει άμεσα από τον τύπο **9**.

(c) Προκύπτει άμεσα από τον τύπο **10**.

(d) Από τον τύπο 6: $L\{\sinh bx\} = \dfrac{b}{p^2 - b^2} = \phi(p)$.

Οπότε από την ιδιότητα (ii) του μετασχηματισμού Laplace:

$$L\{e^{ax}\sinh bx\} = \phi(p-a) = \frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$$

(e) Από τον τύπο **7**: $L\{\cosh bx\} = \dfrac{p}{p^2 - b^2} = \phi(p)$.

Οπότε από την ιδιότητα (ii) του μετασχηματισμού Laplace:

$$L\{e^{ax}\cosh bx\} = \phi(p-a) = \frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$$

7.4 Ιδιότητες του αντίστροφου κατά Laplace μετασχηματισμού.

Πρόταση 7.4.1. *Ο αντίστροφος κατά Laplace μετασχηματισμος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $L^{-1}\{a\phi_1(p) + b\phi_2(p)\} = aL^{-1}\{\phi_1(p)\} + bL^{-1}\{\phi_2(p)\}$

(ii) $L^{-1}\{\phi(p)\} = f(x) \Longrightarrow L^{-1}\{\phi(p-a)\} = e^{ax}f(x)$

(iii) $L^{-1}\{\phi(p)\} = f(x) \Longrightarrow L^{-1}\{\phi(ap)\} = \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x}{a}\right)$

Απόδειξη. (i) Αν $L\{L^{-1}\{\phi_1(p)\}\} = \phi_1(p)$ και $L\{L^{-1}\{\phi_2(p)\}\} = \phi_2(p)$, τότε

$$\begin{aligned} &L\{aL^{-1}\{\phi_1(p)\} + bL^{-1}\{\phi_2(p)\}\} = \\ &\qquad = aL\{L^{-1}\{\phi_1(p)\}\} + bL\{L^{-1}\{\phi_2(p)\}\} = \\ &\qquad = a\phi_1(p) + b\phi_2(p) \end{aligned}$$

(ii) Αν $L^{-1}\{\phi(p)\} = f(x)$, τότε $L\{f(x)\} = \phi(p)$.

Οπότε $L\{e^{ax}f(x)\} = \phi(p-a)$

(iii) Αν $L^{-1}\{\phi(p)\} = f(x)$, τότε $L\{f(x)\} = \phi(p)$.

Οπότε $L\left\{\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x}{a}\right)\right\} = \dfrac{1}{a}L\left\{f\left(\dfrac{x}{a}\right)\right\} = \dfrac{1}{a}\cdot a\cdot\phi(ap) = \phi(ap)$

□

7.5 Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

Ορισμός 7.5.1. Μια συνάρτηση f καλείται κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα I, αν η f είναι συνεχής στο $I \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ και στα σημεία $\{a_1, ..., a_n\}$ παρουσιάζει φραγμένα άλματα.

Θεώρημα 7.5.2. *Αν η συνάρτηση* $f(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ικανοποιεί τις συνθήκες*

(*i*) f *είναι συνεχής,*
(*ii*) f' *είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα* $[0, b]$,
(*iii*) *υπάρχουν αριθμοί* $M, a, b \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$|f(x)| \leq Me^{ax}, \ \forall x \in [b, \infty]$$

τότε $L\{f'(x)\} = pL\{f(x)\} - f(0)$ *για κάθε* $p > a$.

Απόδειξη. Επειδή ισχύουν οι συνθήκες (*i*) και (*ii*) έχουμε

$$\begin{aligned} L\{f'(x)\} &= \int_0^\infty e^{-px} f'(x) dx = \int_0^\infty e^{-px} df(x) = \\ &= e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(x) d(e^{-px}) = e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(x)e^{-px} dx = \\ &= e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty + pL\{f(x)\} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{px}} - f(0) + pL\{f(x)\} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Από την (*iii*) έχουμε $\left|\dfrac{f(x)}{e^{px}}\right| \leq \dfrac{Me^{ax}}{e^{px}} = Me^{(a-p)}x \longrightarrow 0$, αν $p > a$

Άρα

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{px}} = 0, \text{ αν } p > a \tag{7.3}$$

Από τα παραπάνω για κάθε $p > a$ ισχύει:

$$L\{f'(x)\} = pL\{f(x)\} - f(0)$$

□

Σημείωση 7.5.3. Αν f είναι μια από τις συναρτήσεις των τύπων 1-12, τότε ή $|f(x)| \leq M$ για κάποιο $M \in \mathbb{R}$, ή $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-ax} f(x) = 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Συνεπώς σε καθεμιά από τις συναρτησεις αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Πόρισμα 7.5.4. *Αν η συνάρτηση $f(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες*
(i) f, f',...,$f^{(n-1)}$ είναι συνεχείς στο $[0, \infty)$,
(ii) $f^{(n)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα $[0, b]$,
(iii) υπάρχουν αριθμοί $M, a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε για $k = 0, 1, ..., n-1$ ισχύει

$$|f^{(k)}(x)| \leq Me^{ax}, \ \forall x \in [b, \infty]$$

τότε για κάθε $p > a$ ισχύει

$$L\{f^{(n)}\} = p^n L\{f(x)\} - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

Απόδειξη. Προκύπτει από διαδοχικές επαναλήψης του Θεωρήματος 7.5.2:

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}\} =& pL\{f^{(n-1)}(x)\} - f^{(n-1)}(0) = \\ =& p\left[pL\{f^{(n-2)}(x)\} - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0) = \\ =& p^2 L\{f^{(n-2)}(x)\} - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = ... \end{aligned}$$

□

Παραδείγματα 7.5.5.

1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες
   $y'' + 2ay' + b^2 y = 0, \ y(0) = k, \ y'(0) = 0$, όπου $|b| > |a|$.

   Λύση: $L\{y''\} + 2aL\{y'\} + b^2 L\{y\} = 0$, όπου

   $L\{y'\} = pL\{y\} - y(0) = pL\{y\} - k$ και

   $L\{y''\} = pL\{y'\} - y'(0) = p^2 L\{y\} - pk.$

   Οπότε
   $p^2 L\{y\} - pk + 2a(pL\{y\} - k) + b^2 L\{y\} = 0 \Longrightarrow$

$(p^2+2ap+b^2)L\{y\}-kp-2ak=0 \Longrightarrow$

$L\{y\}=\dfrac{k(p+2a)}{p^2+2ap+b^2}=\dfrac{k[(p+a)+a]}{(p+a)^2+(b^2-a^2)} \Longrightarrow$

$y=kL^{-1}\left\{\dfrac{p+a}{(p+a)^2+(b^2-a^2)}\right\}+kL^{-1}\left\{\dfrac{a}{(p+a)^2+(b^2-a^2)}\right\}$

Έχουμε από τους τύπους (b) και (c):

$$L^{-1}\left\{\frac{p+a}{(p+a)^2+(b^2-a^2)}\right\}=e^{-ax}\cos(\sqrt{b^2-a^2})x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{(p+a)^2+(b^2-a^2)}\right\}=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(p+a)^2+(b^2-a^2)}\right\}=$$
$$=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,e^{-ax}\sin(\sqrt{b^2-a^2})x$$

Συνεπώς

$$y=ke^{-ax}\left[\cos\sqrt{b^2-a^2}+\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\sin\sqrt{b^2-a^2}\right]$$

2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες

$$f''(x)+a^2f(x)=0,\ \ f(0)=k,\ \ f'(0)=0$$

Λύση: $L\{f''(x)\}+a^2L\{f(x)\}=0$

$pL\{f'(x)\}-f'(0)+a^2L\{f(x)\}=0$

$p\,[pL\{f(x)\}-f(0)]-f'(0)+a^2L\{f(x)\}=0$

$p^2L\{f(x)\}-pf(0)-f'(0)+a^2L\{f(x)\}=0$

$(p^2+a^2)L\{f(x)\}=kp \Longrightarrow L\{f(x)\}=\dfrac{kp}{p^2+a^2} \Longrightarrow$

$f(x)=L^{-1}\left\{\dfrac{kp}{p^2+a^2}\right\}=kL^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+a^2}\right\}=k\cos ax$

Κεφάλαιο 8

Σειρές αριθμών

Έστω $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ μια άπειρη ακολουθία αριθμών.
Προσθέτοντας διαδοχικά τους όρους παίρνουμε τα αθροίσματα

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \\
&S_2 = a_1 + a_2, \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.
\end{aligned}
$$

Η ακολουθία $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ καλείται *σειρά με όρους* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ και συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ ή με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Τα αθροίσματα $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ καλούνται *μερικά αθροίσματα της σειράς*.
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, τότε η λέμε ότι *η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και έχει άθροισμα* S.

Γράφουμε τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ή

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S$$

Αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει*.

Παραδείγματα 8.0.6.

1. **Γεωμετρικές σειρές:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ...$$

Οι όροι της σειράς σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο.

Τα μερικά αθροίσματα είναι

$$S_n = \begin{cases} a + ... + aq^{n-1} = a(1 + ... + q^{n-1}) = a\,\dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{αν } q \neq 1 \\ a \cdot n, & \text{αν } q = 1. \end{cases}$$

Αν $|q| \geq 1$, τότε η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ αποκλίνει, άρα και η σειρά αποκλίνει.

Αν $|q| < 1$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q} \lim\limits_{n\to\infty} (1 - q^n) = \dfrac{a}{1-q}$.

2. **Τηλεσκοπικές σειρές**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) + ...$$

Τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 - a_2, \\ &S_2 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) = a_1 - a_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, τότε

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αποκλίνει, τότε και η τηλεσκοπική σειρά αποκλίνει.

Όμοια, αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n+1} - a_n) + ... = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

3. **Αρμονική σειρά.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\lambda > 1$.

   Για $\lambda = 1$ κάθε όρος αρχίζοντας από το δεύτερο είναι αρμονικός μέσος των γειτονικών όρων, δηλαδή $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

   Μια εύκολη απόδειξη είναι στα Παραδείγματα 8.2.11

4. Αν $a = a_0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ... \in \mathbb{R}$, τότε

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

Σημείωση 8.0.7. Κάθε σειρά μπορεί να γραφεί σε μορφή τηλεσκοπικής σειράς με την βοήθεια των μερικών αθροισμάτων της

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}), \text{ όπου } S_0 = 0.$$

Παραδείγματα 8.0.8.

1. Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

   Η σειρά είναι γεωμετρική με πρώτο όρο $a = \frac{1}{2}$ και λόγο $q = \frac{1}{2} < 1$.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

2. Βρείτε το άθροισμα της σεράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

   Η σειρά είναι τηλεσκοπική, αφού

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} == \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$, όπου $a_n = \frac{1}{n}$.

   Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3. Αν $a \neq -n$ για κάθε n, τοτε

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\Big) =$

   $= \Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\Big) + \Big(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\Big) + ... = \frac{1}{a} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a+n} = \frac{1}{a}$

8.1 Βασικές ιδιότητες των σειρών

8.1.1. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *συγκλίνει και*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Απόδειξη. $S_n = a_1 + ... + a_n$ και $S'_n = ca_1 + ... + ca_n = cS_n$.

Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S'_n = cS \Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ συγκλίνει και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

8.1.2. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *και η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνουν, τότε και η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *συγκλίνει, επιπλέον*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\begin{aligned} S'_n &= a_1 + ... + a_n \\ S''_n &= b_1 + ... + b_n \\ S_n &= (a_1 + b_1) + ... + (a_n + b_n) \end{aligned}$$

Έχουμε $S_n = S'_n + S''_n$.

Αν οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S_1 \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{n\to\infty} S''_n = S_2 \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S'_n + S''_n) = S_1 + S_2 \in \mathbb{R} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

□

8.1.3. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έχουμε $b_n = (a_n + b_n) - a_n$.

Αν υποθέσουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει, τότε, επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, που είναι άτοπο.

□

8.1.4. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά* $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει για κάθε* $m \geq 1$.

Για τις συγκλίνουσες σειρές ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + ... + a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$:

$$S_n = a_1 + ... + a_n$$
$$S'_n = a_{m+1} + ... + a_{m+n}$$

Τότε

$$S'_n = (a_1 + ... + a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+n}) - (a_1 + ... + a_m) = S_{m+n} - S_m$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow \{S_{m+n}\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty} \Longleftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Επιπλέον,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}(S_{m+n} - S_m) = \lim_{n\to\infty} S_{m+n} - S_m =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n - S_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + ... + a_m).$$

□

8.1.5. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $S_n = a_1 + ... + a_n$. Τότε $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$. Επειδή $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

□

8.1.6. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *φυσικών αριθμών ισχύει:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + ... + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}) + ... + (a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}) + ...$$

Απόδειξη. Έστω

$$S_n = a_1 + ... + a_n$$
$$S'_k = (a_1 + ... + a_{n_1}) + ... + (a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k})$$

Τότε $S'_k = a_1 + ... + a_{n_k} = S_{n_k}$.
Συνεπώς
$(a_1 + ... + a_{n_1}) + ... + (a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}) + ... = \lim_{n\to\infty} S'_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} =$
$= \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

8.1.7. *Έστω ότι* $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ *είναι η υπακολουθία όλων των μη μηδενικών όρων της ακολουθίας* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *συγκλίνει.*

Στην περίπτωση σύγκλισης και των δύο σειρών ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + ... + a_n \\ S'_k &= a_{n_1} + ... + a_{n_k} \end{aligned}$$

αντίστοιχα τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$.

Αν $n_k \leq n < n_{k+1}$, τότε $S_n = S_{n_k} = S'_k$. Συνεπώς

η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$

η ακολουθία $\{S'_k\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ συγκλίνει.

Στην περίπτωση σύγκλισης και των δύο σειρών ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S'_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

□

Παραδείγματα 8.1.8.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \\ = \frac{1}{3-1} + \frac{1}{2-1} = 1,5$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

   Αν n είναι περιττός, τότε $S_n = 1$, και αν n είναι άρτιος, τότε $S_n = 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

   Αν όμως ομαδοποιήσουμε τους όρους της σειράς παίρνουμε:

   $(1-1) + (1-1) + ... + (1-1) + ... = 0 + 0 + ... + 0 + ... = 0$ ή αλλιώς

   $1 + (-1+1) + ... + (-1+1) + ... = 1 + 0 + ... + 0 + ... = 1.$

   Το παράδοξο αυτό συμβαίνει επειδή η αρχική σειρά αποκλίνει και συνεπώς η ιδιότητα 8.1.6 δεν ισχύει.

3. Έστω $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$ και $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, ...$, τότε από την ιδιότητα 8.1.7:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + ... + \frac{1}{2^k} + 0 + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^k} + ... = 1$$

8.2 Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους

8.2.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη.

8.2.1. *Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με θετικούς όρους* a_n *συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι ανω φραγμένη.*

Απόδειξη. Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$S_{n+1} = a_1 + ... + a_n + a_{n+1} \geq a_1 + ... + a_n = S_n.$$

Άρα, η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Η αύξουσα ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει αν και μόνον αν είναι άνω φραγμένη.

□

8.2.2 Κριτήριο σύγκρισης.

8.2.2. *Έστω ότι* $0 \leq a_n \leq b_n$ *για κάθε* $n \geq 1$.

(i) *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(ii) *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *αποκλίνει*

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $S_n = a_1 + ... + a_n$ και $S'_n = b_1 + ... + b_n$.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο κριτήριο υπάρχει $S > 0$ τέτοιο ώστε $S'_n < S$ για κάθε $n \geq 1$.

Έστω $n \geq 1$. Επειδή $0 < a_n \leq b_n$ έχουμε

$$S_n = a_1 + ... + a_n \leq b_1 + ... + b_n = S'_n < S$$

Άρα $S_n < S$. Συμφωνα με το προηγούμενο κριτήριο η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Προκύπτει από την (i).

□

Παραδείγματα 8.2.3.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ συγκλίνει.

   Πράγματι, $a_n = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{n} \leq \underbrace{\dfrac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{2}}_{n-1 \text{ φορές}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = b_n$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο $\dfrac{1}{2} < 1$.

   Από το κριτήριο σύγκρισης η αρχική $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ σειρά συγκλίνει.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ αποκλίνει.

   Πράγματι, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{2n} = a_n$

   και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ αποκλίνει.

   Από το κριτήριο σύγκρισης η αρχική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

8.2.3 Κριτήριο του ορίου.

8.2.4. *Έστω ότι οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι με θετικούς όρους.*

(i) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ή συγκλίνουν και οι δύο, ή αποκλίνουν και οι δύο.

(ii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (*i*) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

όπου $L > 0$, επειδή $a_n > 0$ και $b_n > 0$.

Για $\varepsilon = \frac{L}{2}$ παίρνουμε:

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$$

Συνεπώς

$$\frac{L}{2}\, b_n < a_n < \frac{3L}{2}\, b_n$$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3L}{2} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{L}{2}\, b_n$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

(*ii*) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \Longrightarrow a_n < b_n$$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(*iii*) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$\frac{a_n}{b_n} > 1 \Longrightarrow a_n > b_n$$

Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ αποκλίνει $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

$\square$

Παραδείγματα 8.2.5.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ αποκλίνει.

   Πράγματι, για $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ και $b_n = \dfrac{1}{n}$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

   Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου αφού η αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ αποκλίνει, η αρχική σειρά αποκλίνει.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

   Πράγματι, για $a_n = \tan \dfrac{1}{n^2}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{n^2}} = 1$$

   Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου επιδή η αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η αρχική σειρά συγκλίνει.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει.

   Πράγματι, για $a_n = 2^{-n} \sin \dfrac{1}{n}$ και $b_n = 2^{-n}$ έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$$

   Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου, αφού η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ συγκλίνει, η αρχική σειρά συγκλίνει.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}}$ αποκλίνει.

Πράγματι, για $a_n = \sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}}$ και $b_n = \dfrac{1}{n}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3-n^2}{n^2+1}} = \infty$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του ορίου, αφού η αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ αποκλίνει, η αρχική σειρά αποκλίνει.

8.2.4 Πολυωνυμικό κριτήριο

8.2.6. *Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού p και q αντίστοιχα και $Q(n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ συγκλίνει} \iff q - p \geq 2$$

Απόδειξη. Επειδή το $P(n)$ έχει το πολύ p πραγματικές ρίζες, η παράσταση $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ διατηρεί το πρόσημο στο άπειρο. Έστω ότι $\dfrac{P(n)}{Q(n)} > 0$ για κάθε $n \geq n_0$.

Για $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + ... + \alpha_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + ... + \beta_q}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^{q-p}}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 n^q + \alpha_1 n^{q-1} + ... + \alpha_p n^{q-p}}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + ... + \beta_q} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Συμφωνα με το κριτήριο του ορίου η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ συγκλίνει $\iff$ η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{q-p}}$ συγκλίνει $\iff q - p \geq 2$.

Έστω $\dfrac{P(n)}{Q(n)} < 0$ για κάθε $n > n_0$. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ συγκλίνει αν και μόνον συγκλίνει η σειρά με θετικούς όρους $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-P(n)}{Q(n)}$ (στην οποία $-P(n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού p) $\iff q - p \geq 2$.

□

Παραδείγματα 8.2.7.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ αποκλίνει, επειδή το $P(n) = n$ είναι βαθμού $p = 1$ και $Q(n) = (n+1)(n+2)$ είναι βαθμού $q = 2$, άρα $q - p = 1 < 2$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^4}$ συγκλίνει, επειδή το $P(n) = 3n^2$ είναι βαθμού $p = 2$ και $Q(n) = (n+1)^4$ είναι βαθμού $q = 4$, άρα $q - p = 2 \leq 2$.

8.2.5 Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

8.2.8. *Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι θετική και φθίνουσα, τότε οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

ή και οι δύο συγκλίνουν, ή και οι δύο αποκλίνουν.

Απόδειξη. Αν η σειρά $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ αποκλίνει, τότε αντικαθιστώντας κάθε όρο a_k τέτοιο ώστε $2^{n-1} \leq k < 2^n$, $n = 2, 3, \ldots$, με $a_{2^{n-1}} \geq a_k$, παίρνουμε την σειρά $a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \ldots$ η οποία αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης. Άρα η σειρά $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ αποκλίνει επειδή έχει μεγαλύτερα μερικά αθροίσματα από την προηγούμενη σειρά.

Αν η σειρά $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει η σειρά $2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \ldots + 2a_n + \ldots$. Επομένως η σειρά με μικρότερα μερικά αθροίσματα $a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + \ldots + a_n + a_n + \ldots$ συγκλίνει. Στην τελευταία σειρά κάθε όρο a_k τέτοιο ώστε $2^{n-1} < k \leq 2^n$, $n = 2, 3, \ldots$, αντικαθιστούμε με $a_{2^n} \leq a_k$. Τότε προκύπτει η σειρά

$$a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \ldots + \underbrace{a_{2^n} + \ldots + a_{2^n}}_{2^n \text{ φορές}} + \ldots$$

η οποία συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης. Άρα συγκλίνει η σειρά

$$a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \ldots = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n} + \ldots$$

□

Παραδείγματα 8.2.9.

1. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\lambda}}$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\lambda > 1$.

   Για την απόδειξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

   (α′) Αν $\lambda < 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\lambda}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\lambda} = \infty$.
   Συνεπώς η σειρά αποκλίνει, αφού η ακολουθία των όρων της δεν τείνει στο μηδέν.

   (β′) Αν $\lambda \geq 0$, τότε η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n^{\lambda}}\right\}$ είναι φθίνουσα.
   Σύμφωνα με το κριτήριο συμπύκνωσης η αρχική σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν συγκλίνει η σειρά

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^{\lambda}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\lambda-1}}\right)^n$$

   Η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{\lambda-1}}\right)^n$ συγκλίνει αν και μόνον αν ο λόγος $\dfrac{1}{2^{\lambda-1}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lambda-1} < 1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$, δηλαδή μόνον για $\lambda > 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\ln^2 n}$ συγκλίνει.

   Πράγματι, η ακολουθία$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με
   $a_n = e^{-\ln^2 n} = \dfrac{1}{(e^{\ln n})^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln n}}$ είναι θετική και φθίνουσα.

   Θεωρούμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(2^n)^{\ln 2^n}}$ και την συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

   Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n a_{2^n}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2^n)^2}{(2^n)^{\ln 2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{n(2-\ln 2^n)}\right) = 0$.

   Από το κριτήριο του ορίου η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.

   Από το κριτήριο συμπύκνωσης η αρχική σειρά συγκλίνει.

8.2.6 Κριτήριο ολοκλήρωσης (του Maclaurin)

8.2.10. *Έστω ότι $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει.}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $x \in [1, \infty)$ και n είναι ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $n \leq x \leq n+1$.

Επειδή η f είναι φθίνουσα, προκύπτει ότι $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx &\Longrightarrow \\
f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) &\Longrightarrow \\
f(2) + \ldots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n) &\Longrightarrow \\
S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n &
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η αύξουσα ακολουθία $\left\{ \int_1^{n+1} f(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν η αύξουσα ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

Συνεπώς το $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει.

□

Παραδείγματα 8.2.11.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\lambda}}$ συγκλίνει αν και μόνον $\lambda > 1$.

   Για την απόδειξη διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

   (α΄) Αν $\lambda < 0$, τότε $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^{\lambda}} = \lim\limits_{n \to \infty} n^{-\lambda} = \infty$.

   Συνεπώς η σειρά αποκλίνει, αφού η ακολουθία των όρων της δεν τείνει στο μηδέν.

(β′) Αν $\lambda \geq 0$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$, $x \in [1, \infty)$, είναι φθίνουσα. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκλήρωσης η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx$ δηλαδή μόνο για $\lambda > 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει. Πράγματι, επειδή

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-x^2)'e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0$$

για κάθε $x \in [1, \infty)$, η $f(x) = xe^{-x^2}$ είναι φθίνουσα στο $[1, \infty)$,

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\ e^{-x^2}\Big|_1^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\ e^{-x^2}\right) + \frac{1}{2}\ e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Αφού $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$ συγκλίνει, η αρχική σειρά συγκλίνει.

8.2.7 Κριτήριο της ρίζας (του Cauchy).

8.2.12. *Έστω $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Αν υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 και πραγματικός αριθμός r τέτοιοι ώστε $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε $a_n \leq r^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < r < 1$ η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Άρα, από την ιδιότητα 8.1.4, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε $a_n \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο μηδέν. Άρα, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

$\square$

Πόρισμα 8.2.13. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, τότε $1 - L > 0$. Έστω $0 < \varepsilon < 1 - L$.

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon < 1$$

Σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας (για $r = L + \varepsilon$) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, τότε $L - 1 > 0$. Έστω $0 < \varepsilon < L - 1$.

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$:

$$1 < L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

□

Παρατήρηση 8.2.14. Αν οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι θετικοί και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, τότε η σειρά μπορεί να συγκλίνει, μπορεί και να αποκλίνει.

Για παράδειγμα:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$.

Παραδείγματα 8.2.15.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει.

   Πράγματι,

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3n}{1+n}\right)^n$ αποκλίνει.

Πράγματι,
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{3n}{1+n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{1+n} = 3 > 1.$$

8.2.8 Κριτήριο του λόγου(του d'Alembert).

8.2.16. *Έστω $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ για κάθε $n \ge n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ για κάθε $n \ge n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Αν υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 και πραγματικός αριθμός r τέτοιοι ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ για κάθε $n \ge n_0$, τότε $a_{n+1} \le ra_n$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} \le ra_{n_0},\\
&a_{n_0+2} \le ra_{n_0+1} \le r^2a_{n_0},\\
&a_{n_0+3} \le ra_{n_0+2} \le r^3a_{n_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n_0+k} \le ra_{n_0+k-1} \le r^ka_{n_0}
\end{aligned}$$

Επειδή $0 < r < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k$ συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k a_{n_0}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ συγκλίνει. Άρα, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ για κάθε $n \ge n_0$, τότε $0 \le a_n \le a_{n+1}$ για κάθε $n \ge n_0$. Οπότε η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο μηδέν. Άρα, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

□

Πόρισμα 8.2.17. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, τότε $1 - L > 0$. Έστω ότι $0 < \varepsilon < 1 - L$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Από το κριτήριο του λόγου (για $r = L + \varepsilon$) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, τότε $L - 1 > 0$. Έστω ότι $0 < \varepsilon < L - 1$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε: $1 < L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από το κριτήριο του λόγου η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

$\square$

Παρατήρηση 8.2.18. Αν οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι θετικοί και $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, τότε η σειρά μπορεί να συγκλίνει, μπορεί και να αποκλίνει.

Για παράδειγμα:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

Παρατήρηση 8.2.19. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, τότε και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Δηλαδή, αν η οριακή μορφή του κριτηρίου του λόγου δεν δίνει απάντηση για την σύγκλιση η απόκλιση της σειράς, δηλαδή αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, τότε είναι περιττό να δοκιμαστεί η οριακή μορφή του κριτηρίου της ρίζας.

Παραδείγματα 8.2.20.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x > 0$, συγκλίνει.

   Πράγματι, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ αποκλίνει.

   Πράγματι, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$.

8.2.9 Κριτήριο του Raabé.

8.2.21. *Έστω $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geq r > 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $s \in (1, r)$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^s}{\frac{1}{n}} = s < r$

Αν $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \geq r > 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε για αρκετά μεγάλα n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \quad \text{και} \quad \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^s}{\frac{1}{n}} < r \Longrightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s = \frac{(n-1)^s}{n^s} = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}$$

Επειδή $s > 1$, η αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει.

Συνεπώς (Άσκηση **6** στη σελίδα 285) η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) n \leq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(n-1)}}$.

Επειδή η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

□

Πόρισμα 8.2.22. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά με θετικούς όρους.*

Αν $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n > 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Αν $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n < 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = L > 1$, τότε $L-1>0$.

Έστω $0<\varepsilon<L-1$, τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:
$1 < L-\varepsilon < \left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n$ για κάθε $n\geq n_0$.

Σύμφωνα με το κριτήριο του Raabé (για $r=L-\varepsilon$) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = L < 1$, τότε $1-L>0$. Έστω $0<\varepsilon<1-L$, τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:
$\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n < L+\varepsilon < 1$ για κάθε $n\geq n_0$.

□

Σύμφωνα με το κριτήριο του η Raabé η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα 8.2.23.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)...(x+n)}$, $x>0$ συγκλίνει αν και μόνον αν $x>1$.

   Πράγματι, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{x+n+1}=1$.

   Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Raabé.

   $\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n=\left(1-\frac{n+1}{x+n+1}\right)n=\frac{nx}{x+n+1}\longrightarrow x$

   Αν $x>1$, τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $x<1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

   Αν $x=1$, τότε $\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n=\frac{n}{n+2}<1$ και η σειρά αποκλίνει.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\right)^m$, $m=1,2,...$ συγκλίνει αν και μόνον αν $m\geq 3$.

Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2(n+1)-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2(n+1)}\right)^m \cdot \left(\frac{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}\right)^m =$$
$$= \left(\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\right)^m = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^m \longrightarrow 1$$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Raabé.

$m=1 \Longrightarrow \left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = \left(1-\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)n = \dfrac{n}{2n+2} < 1,$

συνεπώς η σειρα αποκλίνει.

$m=2 \Longrightarrow \left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = \left(1-\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right)n = \dfrac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} < 1,$

συνεπώς η σειρα αποκλίνει.

$m=3 \Longrightarrow \left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)n = \dfrac{12n^3+18n^2+7n}{8n^3+24n^2+24n+8} \longrightarrow \dfrac{12}{8} > 1,$

συνεπώς η σειρα συγκλίνει.

$m>3 \Longrightarrow \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\right)^m < \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\right)^3,$

επειδή $\dfrac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n} < 1,$

συνεπώς η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης.

8.2.10 Κριτήριο του Kummer.

8.2.24. *Αν οι σειρές* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *είναι θετικές και* $c_n - c_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r > 0$ *για κάθε* $n \geq n_0$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση $ra_n \leq c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επομένως $ra_{n_0+i} \leq c_{n_0+i}a_{n_0+i} - c_{n_0+i+1}a_{n_0+i+1}$, για κάθε $i = 0, 1, ...$

Μεταβάλλοντας το i από 0 έως m παίρνουμε

$$r(a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+m}) \leq c_{n_0}a_{n_0} - c_{n_0+m+1}a_{n_0+m+1} \leq c_{n_0}a_{n_0}$$

Άρα, $a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+m} \leq \dfrac{c_{n_0} a_{n_0}}{r}$ για κάθε $m = 0, 1, ...$

Συνεπώς η $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και, άρα, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

□

Πόρισμα 8.2.25. *Έστω ότι οι σειρές* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *είναι θετικές.*
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c_n - c_{n+1} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 0$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

8.2.11 Κριτήριο του Jensen.

8.2.26. *Έστω ότι οι σειρές* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *είναι θετικές.*
Αν $c_n - c_{n+1} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$ *για κάθε* $n \geq n_0$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. $c_n a_n \leq c_{n+1} a_{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0 \Longrightarrow \{c_n a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ είναι αύξουσα $\Longrightarrow c_n a_n \geq c_{n_0} a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0 \Longrightarrow a_n \geq \dfrac{1}{c_n} c_{n_0} a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επειδή η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ αποκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

□

Πόρισμα 8.2.27. *Έστω ότι οι σειρές* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *είναι θετικές.*
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c_n - c_{n+1} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 0$ *και η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ *αποκλίνει, τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

8.2.12 Κριτήριο του Bertrand.

8.2.28. *Έστω ότι η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *είναι θετική και* $B_n = \ln n \left(n \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right)$

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} B_n > 1$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} B_n < 1$, *τότε η* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Θέτουμε $c_n = (n-1)\ln(n-1) \Longrightarrow$
$c_n - c_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (n-1)\ln\dfrac{n-1}{n} + B_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n - c_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -1 + B_n$.

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} B_n > 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n - c_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 0$, συνεπώς η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Kummer.

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} B_n < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n - c_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 0$.

Επειδή $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ αποκλίνει, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο του Jensen.

□

8.2.13 Κριτήριο του Gauss.

8.2.29. *Έστω ότι η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *είναι θετική και* $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = h + \dfrac{f(n)}{n^p}$, *όπου* f *είναι μια φραγμένη συνάρτηση.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει } \Longleftrightarrow h > 1$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = h$.

Από το κρητίριο του Raabé συνεπάγεται ότι:

Αν $h > 1$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν $h < 1$, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Αν $h = 1$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln n\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} \ln n\left(1 + \frac{f(n)}{n^p} - 1\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(n)\frac{\ln n}{n^p} = 0 < 1.\end{aligned}$$

Συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο του Bertrand η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

□

8.3 Κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς και αρνητικούς όρους

8.3.1 Γενική συνθήκη σύγκλισης σειράς.

8.3.1. *Μια σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall k = 1, 2, ...$$

Απόδειξη. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει αν και μόνον αν συγκλίνει η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $S_n = a_1 + ... + a_n$. Η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|S_m - S_n| < \varepsilon,\ \forall m \geq n_0 \text{ και } \forall n \geq n_0.$$

Αν $m > n$, τότε $m = n + k,\ k = 1, 2, ...$ Οπότε

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= (a_1 + ... + a_n + a_{n+1} ... + a_m) - (a_1 + ... + a_n) = \\ &= (a_1 + ... + a_n + a_{n+1} ... + a_{n+k}) - (a_1 + ... + a_n) = \\ &= a_{n+1} + ... + a_{n+k}. \end{aligned}$$

□

8.3.2 Απόλυτη σύγκλιση σειράς

8.3.2. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε την γενική συνθήκη σύγκλισης σεράς 8.3.1.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ σύγκλίνει, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$||a_{n+1}| + ... + |a_{n+k}|| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall k = 1, 2, ...$$

Όμως

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+k}| = ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+k}||$$

Συνεπώς

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0, \ \forall k = 1, 2, ...$$

Άρα, από την πρόταση 8.3.1, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

$\square$

Παραδείγματα 8.3.3.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \dfrac{n}{2^n}$ συγκλίνει απόλυτα.

   Πράγματι,

   $$|a_n| = \frac{n}{2^n} \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

   Σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, άρα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! x^n}{(2n)!}$ συγκλίνει απόλυτα.

   Πράγματι,

   $$|a_n| = \frac{n!|x|^n}{(2n)!} \Longrightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{n!|x|^n}{(2n)!}} = \frac{(n+1)|x|}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow 0 < 1.$$

   Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, άρα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Ορισμός 8.3.4. Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα*.

Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη*.

8.4 Εναλλασσόμενες σειρές

8.4.1 Κριτήριο του Leibniz

8.4.1. *Αν* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι θετική και φθίνουσα ακολουθία και* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *τότε*

(*i*) *η εναλλασσόμενη σειρά* $a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$ *συγκλίνει*

(*ii*) $(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ... < a_{n+1}$.

Απόδειξη.

(*i*) Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $S_n = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1}a_n$.

Η ακολουθία $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{S_1, S_3, S_5, ...\}$ είναι φθίνουσα, αφού

$$S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} = S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0.$$

Η ακολουθία $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{S_2, S_4, S_6, ...\}$ είναι αύξουσα, αφού

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0.$$

Επειδή, $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n} < 0$, συνεπάγεται ότι $S_{2n} < S_{2n-1}$.

Από τα παραπάνω

$$S_2 \leq S_{2n} < S_{2n-1} \leq S_1$$

Οι ακολουθίες $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονες και φραγμένες, άρα συγκλίνουν. Επίσης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty}(-a_{2n}) = 0.$$

Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}$. Άρα η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

(*ii*) $(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ... = S - S_n$.

Αν n είναι άρτιος, τότε $S_n < S < S_{n+1}$. Συνεπώς

$$S - S_n < S_{n+1} - S_n = (-1)^n a_{n+1} = a_{n+1}$$

Αν n είναι περιττός, τότε $S_{n+1} < S < S_n$. Επομένως

$$0 < S_n - S < S_n - S_{n+1} = -(-1)^n a_{n+1} = a_{n+1}$$

Άρα, $S - S_n < 0 < a_{n+1}$.

$\square$

Παραδείγματα 8.4.2.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ συγκλίνει, επειδή είναι εναλλασσόμενη σειρά και οι απόλυτες τιμές των όρων της σχηματίζουν φθίνουσα, μηδενική ακολουθία: $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos\dfrac{1}{n})$ συγκλίνει.

   Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{1 - \cos\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos\frac{1}{x},\ x \in [1, \infty)$ είναι φθίνουσα.

   Πράγματι: $f'(x) = -x^{-2}\sin\frac{1}{x} < 0,\ x \in [1, \infty)$.

   Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \cos\frac{1}{n}) = 0$. Συνεπώς, από το κριτήριο 8.4.1, η αρχική σειρά συγκλίνει.

Για να εφαρμοστεί το κριτήριο του Leibniz σε μια εναλλασσόμενη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, με $a_n > 0$, η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ πρέπει να είναι φθίνουσα και μηδενική.

Η πρόταση που ακολουθεί προσφέρει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών να είναι μηδενική.

Πρόταση 8.4.3. *Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.*

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ αν και μόνον αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Θέτουμε $b_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Επειδή η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα, $0 < b_n < 1$. Από την ισότητα $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - b_n$ αποδεικνύεται επαγωγικά ότι

$$a_n = a_1(1 - b_1) \cdot \ldots \cdot (1 - b_{n-1})$$

Επομένως

$$\ln\frac{a_n}{a_1}=\sum_{i=1}^{n-1}\ln(1-b_i) \tag{8.1}$$

Επειδή οι αριθμοί b_n είναι αρνητικοί, από την 8.1 συμπεραίνουμε:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \iff \lim_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty \iff$$
$$\iff \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\ln(1-b_i)=-\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-b_n) \text{ αποκλίνει}$$

Αν $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1-b_n)}{b_n}=0$. Άρα, από το κριτήριο του ορίου, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1-b_n)$ αποκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνει.

Η $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μη μηδενική αν και μόνον αν η ακολουθία $\{\ln(1-b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μη μηδενική. Στην περίπτωση αυτή και οι δύο σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1-b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

Παράδειγμα 8.4.4. Θα μελετήσουμε ως προς τη σύγκλιση την εναλλασσόμενη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Θέτουμε $a_n=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$, τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$$

Άρα, η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+2}$ αποκλίνει.

Από την Πρόταση 8.4.3, συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Άρα, από το Κριτήριο του Leibniz 8.4.1, η εναλλασσόμενη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ συγκλίνει.

8.5 Θετικό και αρνητικό μέρος σειράς

Σε κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αντιστοιχούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ οι όροι των οποίων ορίζονται ως εξής:

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \; q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

Οι όροι των καινούργιων σειρών είναι μη αρνητικοί. Πράγματι,

$$p_n = \begin{cases} a_n, & \text{αν } a_n > 0 \\ 0, & \text{αν } a_n \leq 0. \end{cases} \quad \text{και } q_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } a_n \geq 0 \\ -a_n, & \text{αν } a_n < 0. \end{cases}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ καλείται θετικό μέρος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ καλείται αρνητικό μέρος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Θεώρημα 8.5.1. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει αν και μόνον αν οι αντίστοιχες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ συγκλίνουν.*

Απόδειξη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Συνεπώς συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{2} + \frac{a_n}{2} \right) \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{2} - \frac{a_n}{2} \right)$$

Αντιστρόφως, αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ συγκλίνουν, τότε, επειδή $|a_n| = p_n + q_n$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

□

Θεώρημα 8.5.2. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε οι αντίστοιχες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ αποκλίνουν.*

Απόδειξη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει.

Συνεπώς οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{2} + \frac{a_n}{2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{2} - \frac{a_n}{2}\right)$$

αποκλίνουν, επειδή καθεμιά είναι άθροισμα μιας σειράς που συγκλίνει και μιας που αποκλίνει.

$\square$

Πόρισμα 8.5.3.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

2.
$$\left.\begin{array}{lcl} \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty & \text{και} & \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty \\ & \text{ή} & \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty & \text{και} & \sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ή συγκλίνει υπό συνθήκη,

   ή αποκλίνει.

Παραδείγματα 8.5.4.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{2^3} - ... + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{2k-1}} + ...$

   $a_{2k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}$, $a_{2k} = -\frac{1}{3^{2k-1}}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1}} = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει απόλυτα.}$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{7} - ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{3^k} + ...$

$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $a_{2k} = -\frac{1}{3^k}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει.}$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1} + ...$

$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $a_{2k} = -\frac{1}{4k-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-1} = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει ή} \\ \text{συγκλίνει υπό συνθήκη} \end{array}$$

Έστω η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει η σειρά

$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+... = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k-1)(4k-1)}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + ...$

$a_{2k-1} = \frac{1}{4k-1}$, $a_{2k} = -\frac{1}{4k-3}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-1} = \infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-3} = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει ή} \\ \text{συγκλίνει υπό συνθήκη} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}\right)+... =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4k-1)(4k-3)}$$

συγκλίνει σύμφωνα με το πολυωνυμικό κριτήριο.

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αντίστοιχα:

$$S_k^* = d_1+...+d_k,\ S_n = a_1+...+a_n$$

Έχουμε $S_{2k} = (a_1+a_2)+...+(a_{2k-1}+a_{2k}) = d_1+...+d_k = S_k^*$.

Επειδή η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ συγκλίνει, ισχύει: $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k^*$.

Από την άλλη μεριά

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}(a_1+...+a_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty}[(a_1+...+a_{2k-1}+a_{2k})-a_{2k}] =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left[S_{2k}+\frac{1}{4k-3}\right] = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4k-3} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_{2k}$$

Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1}$, η ακολουθία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Άρα, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

8.6 Αναδιάταξη σειράς

Θεώρημα 8.6.1. *Αν η θετική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε κάθε σειρά που προκύπτει από αναδιάταξη των όρων της συγκλίνει και έχει το ίδιο άθροισμα.*

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ προκύπτει από μια αναδιάταξη των όρων της συγκλίνουσας θετικής σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Τότε $a'_k = a_{\varphi(k)}$, όπου $\varphi : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ είναι μια ένα-προσ-ένα και επί απεικόνιση.

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$S'_k = a'_1 + ... + a'_k$$
$$S_n = a_1 + ... + a_n$$

Έχουμε $a'_1 = a_{\varphi(1)}, a'_2 = a_{\varphi(2)}, ..., a'_k = a_{\varphi(k)}$.

Έστω $n_k > \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(k)\}$, τότε

$$S_{n_k} = a_1 + ... + a_{\varphi(1)} + ... + a_{\varphi(k)} + ... + a_{n_k} \geq a_{\varphi(1)} + ... + a_{\varphi(k)} = a'_1 + ... + a'_k = S'_k.$$

Επομένως $S'_k \leq S_{n_k} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Άρα, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k = \lim\limits_{k\to\infty} S'_k \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αναδιάταξη της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$.

Άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$.

□

Θεώρημα 8.6.2. *Αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε κάθε σειρά που προκύπτει από αναδιάταξη των όρων της συγκλίνει απόλυτα και έχει το ίδιο άθροισμα.*

Απόδειξη. Επειδή η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ είναι αναδιάταξη της συγκλίνουσας θετικής σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, συμπεραίνουμε ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ συγκλίνει, δηλαδή η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ συγκλίνει απόλυτα.

Έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} q'_k$, όπου οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ είναι συγκλίνουσες με μη αρνητικούς όρους, άρα κάθε αναδιάταξή τους έχει το ίδιο άθροισμα.

Επομένως $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = \sum\limits_{n=k}^{\infty} q'_k$.

Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$.

□

Παράδειγμα 8.6.3. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\dfrac{1}{n}$ συγκλίνει, όχι όμως απόλυτα, αφού αποκλίνει η αντίστοιχη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία συγκλίνουσα αναδιάταξη $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, τέτοια ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Προσθέτοντας ανά δυο τους όρους της αρχικής συγκλίνουσας σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} = \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{b_1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{b_2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}_{b_k}+\ldots$$

σχηματίζουμε καινουργια σειρά με το ίδιο άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Θεωρόυμε την αναδιατεταγμένη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\ldots$$

Έστω $S_n = a_1+\ldots+a_n$ και $S'_n = a'_1+\ldots+a'_n$. Έχουμε

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}}-\frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2}S_{2n}$$

Παρατηρούμε ότι $S'_{3n-1} = S'_{3n} + \dfrac{1}{4n}$ και $S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \dfrac{1}{4n-2}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty} S'_{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S'_{3n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} S'_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}S_{2n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Θεώρημα 8.6.4. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε:*

(i) *υπάρχει αναδιάταξη της σειράς που αποκλίνει*

(ii) *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *υπάρχει αναδιάταξη της σειράς που έχει άθροισμα* a.

8.7 Γινόμενο σειρών κατά Cauchy

Ορισμός 8.7.1. Γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ είναι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ με γενικό όρο $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + ... + a_n b_0$.

Δηλαδή η σειρά

$$\underbrace{a_0b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0b_1 + a_1b_0)}_{c_1} + \underbrace{(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)}_{c_2} + \underbrace{(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)}_{c_3} + ...$$

Σημείωση 8.7.2. Γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=n_2}^{\infty} b_n$ είναι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ με γενικό όρο $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n_1+i} b_{n_2+n-i}$.

Παραδείγματα 8.7.3.

1. Το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

είναι η σειρά με γενικό όρο

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} x^i (-1)^{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} x^n.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= -x + x = 0, \\ c_2 &= x^2 - x^2 + x^2 = x^2, \\ c_3 &= -x^3 + x^3 - x^3 + x^3 = 0, \\ c_4 &= x^4 - x^4 + x^4 - x^4 + x^4 = x^4, ... \end{aligned}$$

Δηλαδή $c_{2k} = x^{2k}$ και $c_{2k+1} = 0$, όπου $k = 0, 1, 2, \ldots$. Οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + \ldots + x^{2k} + 0 + \ldots =$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

2. Το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ είναι η σειρά με γενικό όρο

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} x^i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} x^n = \underbrace{x^n + \ldots + x^n}_{(n+1)-\text{φορες}} = (n+1)x^n$$

Θεώρημα 8.7.4. *Αν οι σειρές* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνουν απόλυτα, τότε και το γινόμενο τους κατά Cauchy* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *συγκλίνει απόλυτα, επιπλέον*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Έχουμε: $c_n = a_0 b_n + .. + a_n b_0$. Άρα $|c_n| \leq |a_0||b_n| + .. + |a_n||b_0|$. Συνεπώς

$$|c_0| + |c_2| + \ldots + |c_n| \leq (|a_0| + \ldots + |a_n|)(|b_0| + \ldots + |b_n|)$$

Επειδή σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απόλυτα, υπάρχουν $A, B \in \mathbb{R}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$|a_0| + \ldots + |a_n| \leq A, \ |b_0| + \ldots + |b_n| \leq B$$

Άρα $|c_0| + |c_2| + \ldots + |c_n| \leq A \cdot B$. Επομένως η $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνει. Άρα, το γινόμενο κατά Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει απόλυτα

Θα δείξουμε ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Όμοια όπως αποδείξαμε ότι συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ αποδεικνύεται οτι συγκλίνει απόλυτα η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = a_0b_0 + a_0b_2 + a_2b_0 + a_0b_3 + a_2b_2 + a_3b_0 + ...$$

Έστω ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d'_n$ είναι μια αναδιάταξη της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$, τέτοια ώστε

$$S_0 = d'_0 = a_0b_0$$
$$S_3 = d'_0 + d'_1 + d'_2 + d'_3 = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n^2-1} = d'_0 + d'_1 + d'_2 + d'_3 + ... + d'_{n^2-1} = (a_0 + ... + a_n)(b_0 + ... + b_n)$$

Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} d'_n &= \lim_{n\to\infty} S_{n^2-1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_0 + ... + a_n)(b_0 + ... + b_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_0 + ... + a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_0 + ... + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 8.7.5. *Αν μία από τις συγκλίνουσες σειρές* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *και* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει απόλυτα, τότε και το γινόμενο τους κατά* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *Cauchy συγκλίνει (όχι όμως πάντα απόλυτα), επιπλέον* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Θεώρημα 8.7.6. *Αν οι σειρές* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *και το γινόμενο τους κατά Cauchy* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *συγκλίνουν, τότε* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Παραδείγματα 8.7.7.

1. Οι γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ για $|x|<1$ συγκλίνει απόλυτα.

   Στο Παράδειγμα 8.7.3(2) βρίκαμε ότι το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ είναι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Χρησιμποιώντας το Θεώρημα 8.7.4, βρίσκουμε το άθροισμα της σειράς αυτής για $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

2. Οι γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ συγκλίνει απόλυτα.

   Το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, όπου

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^{n-i}}\right) = \frac{n+1}{2^n}$$

   Χρησιμποιώντας το Θεώρημα 8.7.4, βρίσκουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

8.8 Δυναμοσειρές

Μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

καλείται δυναμοσειρά κένρου x_0.

Προφανώς κάθε δυναμοσειρά κέντρου x_0 για $x = x_0$ συγκλίνει.

Θέτοντας $X = x - x_0$ στην παραπάνω δυναμοσειρά παίρνουμε δυναμοσειρά κέντρου μηδέν

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n + ...$$

η οποία για $X = 0$ συγκλίνει.

Θεώρημα 8.8.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, $r \neq 0$, συγκλίνει, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in (-|r|, |r|)$.*

Απόδειξη. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ συγκλίνει και $r \neq 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$.

Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n r^n| < 1$. Οπότε

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| \cdot \frac{|r^n|}{|r^n|} = |a_n r^n| \cdot \frac{|x^n|}{|r^n|} < 1 \cdot \frac{|x^n|}{|r^n|} = \left|\frac{x}{r}\right|^n$$

Αν $x \in (-|r|, |r|)$, τότε $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$. Επομένως η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{r}\right|^n$ συγκλίνει. Άρα, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ με μικρότερους όρους συγκλίνει.

□

Πόρισμα 8.8.2. *Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:*

1. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει μόνο για $x = 0$.*

2. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα $\forall x \in (-\infty, \infty)$*

3. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα $\forall x \in (-R, R)$ και αποκλίνει $\forall x \notin [-R, R]$, όπου $R = \sup\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει}\} \neq 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει$\}$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $\Delta = \{0\}$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

2. $\Delta \neq \{0\}$ και Δ είναι άνω μη φραγμένο.

Στην περίπτωση αυτή για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$ υπάρχει $r_x > |x|$, τέτοιο ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_x^n$ συγκλίνει. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.8.1, επειδή $x \in (-r_x, r_x)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα.

3. $\Delta \neq \{0\}$ και Δ είναι άνω φραγμένο.

Θέτουμε

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει}\} = R$$

Από το Θεώρημα 8.8.1 συνεπάγεται ότι $R > 0$.

Αν $x \in (-R, R)$, τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $-R < -r < x < r < R$ και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ συγκλίνει. Από το Θεώρημα 8.8.1, η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα.

Αν $x > R$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει από τον ορισμό του R.

Μένει να δείξουμε ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει για $x < -R$.

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για ένα $x < -R$. Τότε, από το Θεώρημα 8.8.1, η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^*)^n$ συγκλίνει για κάθε $x^* \in (x, -x)$.

Όμως $x < -R < 0 < R < -x$. Συνεπώς η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^*)^n$ συγκλίνει για κάθε $x^* \in (R, -x)$. Επομένως $\sup\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει$\} > R$, που είναι άτοπο. Άρα, για για $x < -R$ η δυναμοσειρα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει.

□

Ορισμός 8.8.3. Το σύνολο

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει}\}$$

καλείται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσεράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει μόνο για $x = 0$, τότε λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 0$.

  Το διάστημα σύγκλισης στην περίπτωση αυτή είναι $\Delta = \{0\}$.

- Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$, τότε λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \infty$.

  Το διάστημα σύγκλισης στην περίπτωση αυτή είναι $\Delta = (-\infty, \infty)$.

- Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [-R, R]$, τότε ο αριθμός R καλείται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

  Το διάστημα σύγκλισης Δ στην περίπτωση αυτή είναι ένα από τα διαστήματα $[-R, R)$, $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$.

Πόρισμα 8.8.4. *Αν η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *είναι* $R \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \textit{ συγκλίνει}\}.$$

Παραδείγματα 8.8.5. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης για την καθεμιά από τις παρακάτω δυναμοσειρές:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

   Θέτουμε $b_n = n! x^n$.

   $x \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty.$

Άρα, $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} > 1$ για αρκετά μεγάλα n. Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ αποκλίνει για κάθε $x \neq 0$. Άρα, $R = 0$ και $\Delta = \{0\}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

   Θέτουμε $b_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

$$x \neq 0 \Longrightarrow \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 0$$

   Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$.

   Επομένως $R = \infty$ και $\Delta = \{-\infty, \infty\}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin n)x^n$

   Έχουμε $|a_n x^n| = |(\sin n)x^n| \leq |x|^n$.

   Αν $|x| < 1$, τότε η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ συγκλίνει.

   Επομένως συγκλίνει η σειρά με μικρότερους όρους: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |(\sin n)x^n|$.

   Αν $|x| > 1$, τότε $|(\sin n)x^n| > |\sin n|$. Επειδή η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\sin n|$ αποκλίνει, η σειρά με μεγαλύτερους όρους $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |(\sin n)x^n|$ αποκλίνει.

   Συνεπώς $R = \sup\{x \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |(\sin n)x^n| \text{ συγκλίνει}\} = 1$.

   Για $x = \pm 1$ παίρνουμε τις σειρές $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin n$ οι οποίες αποκλίνουν, επειδή οι όροι τους σχηματίζουν ακολουθία που δεν τείνει στο μηδέν. Συνεπώς $\Delta = (-1, 1)$.

Πρόταση 8.8.6. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης* R *και*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

(i) Αν $L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *τότε* $R = \frac{1}{L}$.

(ii) Αν $L = 0$, *τότε* $R = \infty$.

(iii) Αν $L = \infty$, *τότε* $R = 0$.

Απόδειξη. Σε κάθε περίπτωση η σειρά συγκλίνει για $x = 0$.

(i) Έστω $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $x \neq 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L|x|.$$

Αν $L|x| < 1$, ισοδύναμα $|x| < \frac{1}{L}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n|$ συγκλίνει.

Αν $L|x| > 1$, ισοδύναμα $|x| > \frac{1}{L}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n|$ αποκλίνει.

Άρα, $R = \sup\{x : \sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n| \text{ συγκλίνει}\} = \frac{1}{L}$.

(ii) Έστω $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ και $x \neq 0$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n|$ συγκλίνει.

Επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει. Άρα, $R = \infty$.

(iii) Έστω $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ και $x \neq 0$, τότε $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \infty$.

Συνεπώς για αρκετα μεγάλα n θα ισχύει $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$.

Αφού $\lim_{n\to\infty}|a_n x^n| \neq 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει, άρα, $R = 0$.

□

Παραδείγματα 8.8.7. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης για την καθεμιά από τις παρακάτω δυναμοσειρές:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n)!} x^n$.

   Θέτουμε $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 0$.

   Επομένως $R = \infty$ και, άρα,$\Delta = (-\infty, \infty)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

   Θέτουμε $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

   Επομένως $R = 4$.

   $|x| = 4 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \Longrightarrow$

   $\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \dfrac{(n+1)^2 \cdot 4}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} > 1 \Longrightarrow$

   $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n| \Longrightarrow$ η ακολουθία $\{a_n x^n\}_{n=1}^{\infty}$ για $|x| = 4$ δεν έχει όριο το μηδέν $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$ αποκλίνει. Συνεπώς $\Delta = (-4, 4)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)2^n}$

   Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2(n+2)} = \dfrac{1}{2}$.

   Επομένως $R = 2$.

   Για $x = R = 2$ παίρνουμε τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$, η οποία αποκλίνει σύμφωνα με το πολυωνυμικό κριτήριο.

   Για $x = -R = -2$ παίρνουμε τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$, η οποία συγκλίνει διότι είναι εναλλάσσουσα και οι απόλυτες τιμές των όρων της σχηματίζουν φθίνουσα μηδενική ακολουθία. Άρα $\Delta = [-2, 2)$.

Πρόταση 8.8.8. *Έστω* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης* R *και έστω ότι* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

(i) *Αν* $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *τότε* $R = \dfrac{1}{L}$.

(ii) *Αν* $L = 0$, *τότε* $R = \infty$.

(iii) *Αν* $L = \infty$, *τότε* $R = 0$.

Απόδειξη. Όμοια με την προηγούμενη πρόταση. Αντί του κριτηρίου του λόγου χρησιμοποιείται το κριτήριο της ρίζας.

□

Παραδείγματα 8.8.9. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης για την καθεμιά από τις παρακάτω δυναμοσειρές:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e}$$

Για $x = \pm R = \pm\dfrac{1}{e}$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}\right)} = e^L,$$

όπου $L = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{e^n} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$.

Επομένως για $x = \pm\dfrac{1}{e}$ η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα, $\Delta = \left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot x^n$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) = 1 \Longrightarrow R = 1.$

   Για $x = R = 1$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει σύμφωνα με το πολυωνυμικό κριτήριο.

   Για $x = -R = -1$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει απόλυτα. Άρα, $\Delta = [-1, 1]$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^n}{2n}$

   Θέτουμε $a_n = \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n}$, τότε

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} = 4 \Longrightarrow R = \frac{1}{4}.$

   Για $x = \frac{1}{4}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$, η οποία συγκλίνει διότι είναι εναλλασσόμενη και οι απόλυτες τιμές των όρων της σχηματίζουν φθίνουσα μηδενική ακολουθία.

   Για $x = -\frac{1}{4}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ η οποία αποκλίνει σύμφωνα με το πολυωνυμικό κριτήριο. Άρα, $\Delta = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

8.9 Η σειρά Taylor μιας συνάρτησης

Εστω ότι η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο n-τάξης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Από το Θεώρημα Taylor 1.3.3 για κάθε $x \in \Delta$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ο τύπος του Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

όπου $\lim\limits_{x\to x_0} R_n(x) = 0$.

Κατά Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, όπου c είναι μεταξύ x και x_0.

Ορισμός 8.9.1. Εστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$. Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...,$$

$x \in (a, b)$, καλείται *σείρα Taylor στη γειτονιά του* x_0 *παραγόμενη από τη συνάρτηση* f.

Προκύπτουν δύο ερωτήματα:

1. Συγκλίνει η σείρα Taylor για $x \neq x_0$;

2. Όταν η σείρα Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ συγκλίνει, ισχύει η ισότητα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n;$$

Από τα παραδείγματα που ακολουθούν προκύπτει ότι η απάντηση στο καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα είναι αρνητική.

Παραδείγματα 8.9.2.

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$, και $x_0 = 0$.

   $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1 + x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(1 + x)^3}$, ...,

   $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1 + x)^n}$. Επομένως $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$

   Συνεπώς $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ για $n \geq 1$ και $f(0) = \ln(1 + 0) = 0$.

   Η σειρά Taylor της f είναι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, της οποίας η ακτίνα σύγκλισης ισούται με 1 (για $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχουμε $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$). Αρα, για $|x| > 1$ η σειρά Taylor της f αποκλίνει.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

   Αποδεικνύεται ότι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0, \ \dots \ , f^{(n)}(0) = 0, \ n \geq 1$ (βλέπε Βιβλιογραφία: [3], σελίδα 184).

   Για τη σειρά Taylor στη γειτονιά του $x_0 = 0$ για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$$

Θεώρημα 8.9.3. *Εστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$ και $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Τότε*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \iff \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Απόδειξη. Από τον τύπο του Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Θέτουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = S_n(x)$$

Από τα παραπάνω $S_n(x) = f(x) - R_n(x)$, όπου $S_n(x)$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Taylor της f. Συνεπώς:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \iff f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) \iff$$
$$\iff f(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - R_n(x)] \iff \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

□

Θεώρημα 8.9.4. *Εστω ότι η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$. Αν υπάρχουν $M \in \mathbb{R}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, τότε για κάθε $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ισχύει*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Απόδειξη. Προφανώς το θεώρημα ισχύει για $x = x_0$.

Έστω $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ και $x \neq x_0$, τότε $|x - x_0| > 0$ και

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Για κάθε n, υπάρχει c_n μεταξύ των x και x_0 τέτοιο ώστε

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_n)(x - x_0)^n}{n!}.$$

Επειδή $f^{(n)}(c_n) \leq M$, συνεπάγεται ότι

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(c_n)(x - x_0)^n}{n!}\right| \leq \frac{M|x - x_0|^n}{n!}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^n}{n!} = 0$ (είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ για κάθε $a > 0$). Επομένως $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Από το Θεώρημα 8.9.3 προκύπτει ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

□

Παραδείγματα 8.9.5.

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...,\ x \in \mathbb{R}$.

   Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $x \in (-r, r)$ για κάποιο $r > 0$.

   Τότε $e^x < e^r$ για κάθε $x \in (-r, r)$.

   Θέτουμε $f(x) = e^x$, $M = e^r$ και $x_0 = 0$.

   Για κάθε $x \in (x_0 - r, x_0 + r) = (-r, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

   $$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^r = M$$

   Αρα, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ x^n$.

   Έχουμε $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Οπότε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. $a^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln a)^n}{n!} x^n,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}.$

   Πράγματι,
$$f(x) = a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n.$$

3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ...,\ x \in \mathbb{R}.$

   Πράγματι, για $f(x) = \sin x$ και για κάθε $n \geq 0$ έχουμε $|f^{(n)}(x)| = |\sin x|$ ή $|f^{(n)}(x)| = |\cos x|$.

   Άρα $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

   Εστω $x_0 = 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

   Υπάρχει $r \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $x \in (-r, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

   Στο $(-r, r)$ ικανοποιούνται οι συνθήκες σύγκλισης της σεράς Taylor της f, συνεπώς
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

   Εχουμε
$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= \sin 0 = 0, \\ f^{(1)}(0) &= \cos 0 = 1, \\ f^{(2)}(0) &= -\sin 0 = 0, \\ f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0, ... \end{aligned}$$

   $f^{(2n)}(0) = 0$ και $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, ...$

   Συνεπώς $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ...,\ x \in \mathbb{R}.$

   Αποδεικνύεται όμοια όπως και στην περίπτωση του $\sin x$.

5. $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...,\ x \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ... \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \end{aligned}$$

6. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...,\ x \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ... \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... \end{aligned}$$

8.10 Ασκήσεις

8.10.1. Βρείτε τα αθροίσματα των σειρών

(α΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n},\ |r| > 1$

Λύση: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r^1} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + ... = \frac{\frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{r-1}$

(β΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$

Λύση: $S_n = \int_1^2 e^{-\sqrt{x}} dx + \int_2^3 e^{-\sqrt{x}} dx + ... + \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx =$

$$= 2\int_1^\infty e^{-t}t dt = \left[-2(te^{-t}+e^{-t})\right]\Big|_1^\infty =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-2(te^{-t}+e^{-t})\right] + \frac{4}{e} = \frac{4}{e}$$

8.10.2. Δείξτε ότι οι σειρές είναι τηλεσκοπικές και βρείτε τα αθροίσματά τους

(α′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

Λύση: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln n - \ln(n+1)) = \ln 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\ln n = -\infty$

(β′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$

Λύση: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\Big) =$

$$= \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x} & \text{αν } , |x|<1 \\ \dfrac{1}{1-x} - 0 = \dfrac{1}{1-x} & \text{αν } , |x|>1. \end{cases}$$

8.10.3. Δείξτε ότι

(α′) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... = 1$

Λύση: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\Big) =$

$$= \Big(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\Big) + \Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big) + ... = \frac{1}{1!} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 1$$

(β′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdot ...\cdot(n+p)} = \frac{1}{pp!}$, όπου $p = 1, 2, ...$

Λύση:

$$\frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)...(n+p)}\right)$$
$$\frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = b_n - b_{n+1},\ b_n = \frac{1}{pn(n+1)...(n+p-1)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+p)} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{p(1\cdot \ldots \cdot p)} - 0 = \frac{1}{pp!}$$

Κριτήριο σύγκρισης

8.10.4. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(α′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

Λύση: Συγκλίνει, επειδή $\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ συγκλίνει.

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5}{4^n+n^2}$

Λύση: $a_n = \frac{3^n+5}{4^n+n^2} \leq \frac{3^n+5}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n = b_n.$

Επειδή η γεωμετρικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ συγκλίνουν, η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, άρα, συμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης, και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$

Λύση: $\frac{n!}{2^n+1} \geq \frac{2^{n-1}}{2^n+1} \geq \frac{2^{n-1}}{2^n+2^n} = \frac{1}{4}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}$ αποκλίνει, άρα και η αρχική σειρά με μεγαλύτερους όρους αποκλίνει.

Κριτήριο του ορίου.

8.10.5. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(α′) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$, (β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, (δ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$

Απαντήσεις: (α′) συγκλίνει, (β′) αποκλίνει, (γ′) αποκλίνει, (δ′) συγκλίνει.

8.10.6. Να αποδειχθεί ότι αν οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ έχουν θετικούς όρους, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ για κάθε n και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Λύση: Από τις ανισότητες $\dfrac{a_2}{a_1} \leq \dfrac{b_2}{b_1}$, $\dfrac{a_3}{a_2} \leq \dfrac{b_3}{b_2}$,..., $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ προκύπτει ότι $\dfrac{a_2}{a_1} \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_2}{b_1} \cdot \dfrac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Μετά την απλοποίηση: $\dfrac{a_{n+1}}{a_1} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_1}$, οπότε $a_{n+1} \leq \dfrac{a_1}{b_1}\, b_{n+1}$.

Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1}\, b_{n+1}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ συγκλίνει. Συνεπώς η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

8.10.7. Δείξτε ότι:

(α′) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ συγκλίνει.

Λύση: Η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι θετική και φθίνουσα. Έχουμε $2^n a_{2^n} = \dfrac{2^n}{(\ln 2^n)^{n \ln 2}} = \left(\dfrac{2}{(\ln 2^n)^{\ln 2}}\right)^n$.

Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n a_{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(\ln 2^n)^{\ln 2}} = 0 < 1$. Από το κριτήριο της ρίζας η $\sum\limits_{n=2} 2^n a_{2n}$ συγκλίνει. Άρα, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(β′) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\ln n)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ αποκλίνει.

Λύση: Αν $k \geq 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln n)^k \neq 0$, συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

Αν $k < 0$, τότε η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(\ln n)^k\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{(\ln n)^{-k}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι θετική και φθίνουσα και $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n}{(\ln 2^n)^{-k}} = \dfrac{1}{(\ln 2)^{-k}} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^{-k}}$.

Η τελευταία σειρά αποκλίνει από το κριτήριο της ρίζας, αφού
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n^{-k}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{(\sqrt[n]{n})^{-k}} = 2 > 1$. Άρα, η αρχική σειρά αποκλίνει.

Κριτήριο ολοκλήρωσης (του Maclaurin)

8.10.8. Δείξτε ότι:

(α′) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^s}$, $s \in \mathbb{R}$, συγκλίνει αν και μόνον αν $s > 1$.

Λύση: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^s}$ είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα $[n_s, \infty)$, όπου $n_s \in \mathbb{N}$.
Έχουμε: $[x(\ln x)^s]' = (\ln x)^{s-1}(\ln x + s) \geq 0$, για κάθε $x \geq \max\{1, e^{-s}\}$.
Έστω $n_s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_s > e^{-s}$.
Τότε η $\dfrac{1}{f(x)} = x(\ln x)^s$ είναι αύξουσα στο $[n_s, \infty)$.
Συνεπώς η f είναι φθίνουσα στο $[n_s, \infty)$.
Η $\sum_{n=n_s}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνον αν το $\int_{n_s}^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

$$s = 1 \Longrightarrow \int_{n_s}^{\infty} f(x)dx = \int_{n_s}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_{n_s}^{\infty} = \infty.$$

$$s \neq 1 \Longrightarrow \int_{n_s}^{\infty} f(x)dx = \int_{n_s}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \frac{(\ln x)^{1-s}}{1-s}\Big|_{n_s}^{\infty} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{αν } s < 1, \\ \ln(\ln n_s), & \text{αν } s > 1. \end{cases}.$$

Συνεπώς η αρχική σειρά συγκλίνει μόνο για $s > 1$.

(β′) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]}$ αποκλίνει.

Λύση: Η $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x[\ln(\ln x)]}$ είναι φθίνουσα και θετική στο $[3, \infty)$.

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x[\ln(\ln x)]} = \int_3^{\infty} \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln[\ln(\ln x)]\Big|_3^{\infty} = \infty.$$

Συνεπώς η $\sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ αποκλίνει.

(γ′) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^s}$, $s > 1$, συγκλίνει.

Λύση: Η $f(x) = \frac{1}{x \ln x [\ln(\ln x)]^s}$ είναι φθίνουσα και θετική στο $[3, \infty)$ και

$$\int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x [\ln(\ln x)]^s} =$$
$$= \int_3^{\infty} \frac{d(\ln(\ln x))}{[\ln(\ln x)]^s} = \frac{[\ln(\ln x)]^{1-s}}{1-s}\Big|_3^{\infty} = \frac{[\ln(\ln 3)]^{1-s}}{s-1}.$$

Άρα, η $\sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει.

Κριτήριο της ρίζας (του Cauchy).

8.10.9. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(α′) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)^n$

Λύση: Αποκλίνει, επειδή για $a_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)^n > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e > 1.$$

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^n$

Λύση: Συγκλίνει, επειδή για $a_n = \left(\frac{n+3}{2n}\right)^n > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

(γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

Λύση: Συγκλίνει, επειδή για $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

(δ΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$

Λύση: Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n} = 1$ και $\dfrac{3n}{3n+1} < 1$, το κριτήριο της ρίζας δεν εφαρμόζεται.

Η απόκλιση της σειράς προκύπτει από την αναγκαία συνθήκη σύγκλισης:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n} = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0$$

Κριτήριο του λόγου(του d'Alembert).

8.10.10. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(α΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x > 0$.

Λύση: Για $a_n = n! \left(\dfrac{x}{n}\right)^n > 0$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{(n)! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e} \ .$$

Αν $x < e$, τότε $\dfrac{x}{e} < 1$ και η σειρά συγκλίνει.

Αν $x > e$, τότε $\dfrac{x}{e} > 1$ και η σειρά αποκλίνει.

Αν $x = e$, τότε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, επειδή $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$, άρα η σειρά αποκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $x \in (-e, e)$.

(β΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $x > 0$.

Λύση: Για $a_n = nx^{n-1} > 0$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x}{n} = x\ .$$

Αν $0 < x < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει.

Αν $x > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

Αν $x = 1$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n = \infty$.

Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $0 < x < 1$.

(γ′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Λύση: Συγκλίνει, επειδή για $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

(δ′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (2n-1)}{4\cdot\ 8\cdot\ 12\cdot\ \dots\ \cdot\ 4n}$

Λύση: Συγκλίνει, επειδή για $a_n = \dfrac{1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (2n-1)}{4\cdot\ 8\cdot\ 12\cdot\ \dots\ \cdot\ 4n}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (2(n+1)-1)}{4\cdot\ 8\cdot\ 12\cdot\ \dots\ \cdot\ 4(n+1)}}{\frac{1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (2n-1)}{4\cdot\ 8\cdot\ 12\cdot\ \dots\ \cdot\ 4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-1}{4(n+1)} = \frac{2}{4} < 1$$

Σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους.

8.10.11. Να μελετηθεί αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα, αποκλίνουν ή
συγκλίνουν υπό συνθήκη.

(α′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{2^n}$

Λύση: $|a_n| = \left|\sin\dfrac{x}{2^n}\right| < \left|\dfrac{x}{2^n}\right| = \dfrac{|x|}{2^n} = b_n$.

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$

Λύση: $|a_n| = \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2n+5)} \Longrightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)+5} = \frac{3n+1}{2n+7}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1$

Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει.

Από την απόκλιση όμως της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ δεν συνεπάγεται η απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3n+1}{2n+7} \geq 1 \Longleftrightarrow 3n+1 \geq 2n+7 \Longleftrightarrow n \geq 6$$

Άρα $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ για κάθε $n \geq 6$. Η αύξουσα και θετική ακολουθία $\{|a_n|\}_{n=6}^{\infty}$ δεν μπορεί να έχει όριο μηδέν. Επομένως και η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν μπορεί να έχει όριο μηδέν. Συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$

Λύση: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}$ συγκλίνει διότι είναι εναλλάσσουσα και οι απόλυτες τιμές των όρων της σχηματίζουν φθίνουσα μηδενική ακολουθία. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ αποκλίνει ως αρμονική $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ με $\lambda = \frac{1}{5} \leq 1$.
Συνεπώς η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

(δ′) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$

Γινόμενο σειρών κατά Cauchy

8.10.12. Να αποδειχθεί ότι αν $|x| < 1$, τότε

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1-x}$.

Αν $|x| < 1$, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ είναι το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, τότε $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i x^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} x^n = (n+1)x^n$.

Άρα, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$

Έπειδή οι σειρές $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απόλυτα η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Η τελευταια ισότητα γράφεται:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ... = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

8.10.13. Να αποδειχθεί ότι αν $|x| < 1$, τότε

$$1 - 2x^2 + 3x^4 + ... + (-1)^n (n+1) x^{2n} + ... = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι για $|x| < 1$ ισχύει

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \right).$$

Έστω ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ είναι το γινόμενο κατά Cauchy των σειρών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, όπου $a_n = b_n = (-x^2)^n$. Τοτε

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-x^2)^i (-x^2)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-x^2)^n = (n+1)(-x^2)^n$$

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}$.

Επειδή οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απόλυτα η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Η τελευταια ισότητα γράφεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Δυναμοσειρές

8.10.14. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης για την καθεμιά από τις παρακάτω δυναμοσειρές.

(α΄) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

Λύση: Για $a_n = \frac{n!}{n^n}$ βρίσκουμε:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \Longrightarrow R = e$.

Αν $x = \pm R = \pm e \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (\pm e)^n \Longrightarrow$

$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \Longrightarrow |a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|$ για $|x| = e$.

Για $x = \pm e$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{|a_n x^n|\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n e^n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν, άρα και οι ακολουθίες $\{a_n e^n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{a_n (-e)^n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνουν στο μηδέν. Άρα, για $x = \pm e$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει.

Άρα, $\Delta = (-e, e)$.

(β′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n$.

Λύση: Θέτουμε $a_n = 1-(-2)^n$.

Αν n είναι άρτιος, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+2^{n+1}}{1-2^n}\right| = 2$.

Αν n είναι περιττός, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1-2^{n+1}}{1+2^n}\right| = 2$.

Άρα, $R = \dfrac{1}{2}$.

Για $x = -R = -\dfrac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, η οποία αποκλίνει διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-(-2)^n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -1 \neq 0$.

Για $x = R = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, η οποία αποκλίνει διότι η ακολουθία των όρων της δεν είναι μηδενική.

Άρα, $\Delta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(γ′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$.

Λύση: Για $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ έχουμε

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 \Longrightarrow R = \dfrac{1}{4}$.

Για $x = R = \dfrac{1}{4}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$.

Οπότε $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \dfrac{4n^2+6n+2}{4n^2+6n+4} \longrightarrow 1$ και

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(1-\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)\right] = \dfrac{n(2n+2)}{4n^2+8n+4} = \dfrac{2}{4} < 1$.

Συμφωνα με το κριτήριο του Raabe η σειρά αποκλίνει.

Για $x = -R = -\dfrac{1}{4}$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$.

Η $\{|b_n|\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, αφου $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \dfrac{4n^2+6n+2}{4n^2+6n+4} < 1$.

Έχουμε $|b_n| = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n}{(n!)^2 4^n} =$

$= \dfrac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))\cdot (2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)}{(n!)^2 4^n} =$

$= \dfrac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))\cdot (1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)\cdot 2^n}{(n!)^2 4^n} =$

$= \dfrac{n!\cdot 2^n\cdot [1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)]}{(n!)^2\cdot 4^n} = \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n} = \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$

Η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^3$ συγκλίνει (βλ. κριτήριο του Raabe).

Συνεπώς

$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^3 = 0.$

Από το κριτήριο του Leibniz προκύπτει ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Άρα, $\Delta = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

(δ΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}$, $a>0$, $b>0$.

Λύση: Για $a_n = \dfrac{1}{a^n+b^n}$ έχουμε:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^n+b^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \dfrac{1}{\max\{a,b\}}.$

Επομένως $R = \max\{a,b\}$.

Αν $\max\{a,b\} = a$, τότε $\dfrac{b}{a} < 1$ και $R = a$.

Για $x = R = a$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{a^n+b^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$, η οποία αποκλίνει διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1 \neq 0$.

Για $x = -R = a$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a^n}{a^n+b^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$, η οποία αποκλίνει διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} \neq 0$.

Άρα, $\Delta = (-\max\{a,b\}, \max\{a,b\})$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\Delta = (-\max\{a,b\}, \max\{a,b\})$ στην περίπτωση που $\max\{a,b\} = b$.

(ε΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Λύση: Για $a_n = \frac{1}{n}$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Longrightarrow R = 1.$$

Για $x = -R = -1$ παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει διότι είναι εναλλάσσουσα και οι απόλυτες τιμές των όρων της σχηματίζουν φθίνουσα μηδενική ακολουθία.

Για $x = R = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

Άρα, $\Delta = [-1, 1)$.

(στ΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$.

Λύση: Θέτοντας $y = x + 3$, παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+1)2^n}$, το διάστημα σύγκλισης της οποίας είναι $[-2, 2)$ και η ακτίνα σύγκλισης της οποίας είναι 2.

Η αρχική σειρά συγκλίνει $\Longleftrightarrow -2 \le x + 3 < 2 \Longleftrightarrow -5 \le x < -1$.

Συνεπώς $\Delta = [-5, -1)$ και $R = 2$.

(ζ΄) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{2n}$.

Λύση: Θέτοντας $y = x^2$, παίρνουμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} y^n}{2n}$, το διάστημα σύγκλισης της οποίας είναι $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $\frac{1}{4}$.

Η αρχική σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $x^2 \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, δηλαδή αν και μόνον αν $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Άρα, $\Delta = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ και $R = \frac{1}{2}$.

8.10.15. Να βρεθούν όλες οι τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

Λύση: Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$.

Θέτοντας $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ στη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} y^n$, το διάστημα σύγκλισης της οποίας είναι $[-1, 1)$.

Η αρχική σειρά συγκλίνει $\iff \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \in [-1, 1) \iff x > 0$.

Κεφάλαιο 9

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

9.1 Ακολουθίες συναρτήσεων

Ορισμός 9.1.1. Θα λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορισμένων στο στο σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ *συγκλίνει κατά σημείο στο* Δ *στη συνάρτηση* f, αν για κάθε $x \in \Delta$ η ακολουθία αριθμών $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Η συνάρτηση f καλείται *οριακή συνάρτηση* της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}_n^{\infty}$ στο σύνολο Δ.

Παραδείγματα 9.1.2.

1. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, ...$, στο διάστημα $[0, 1]$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0,1), \\ 1, & \text{αν } x = 1. \end{cases}$

2. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, ...$, στο διάστημα $[0, 1]$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = 0$.

3. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, ...$, στο διάστημα $(0, \infty)$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = 1$.

4. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \cos nx$, $n = 1, 2, ...$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$ δεν συγκλίνει κατά σημείο, επειδή για $x = \pi$ η ακολουθία αριθμών $\{\cos n\pi\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$ αποκλίνει.

5. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \sin x + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$, στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = \sin x$.

Η ισότητα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Delta$, αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ορισμός 9.1.3. Θα λέμε ότι η *ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* f *στο σύνολο* $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n_o = n_0(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Εύκολα αποδεικνύονται οι ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 9.1.4. *Αν η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* f *στο σύνολο* $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, *τότε η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει κατά σημείο στην* f *στο* Δ.

Πρόταση 9.1.5. *Αν η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο σύνολο* Δ *και* $\Delta' \subseteq \Delta$, *τότε η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο* Δ'.

Πρόταση 9.1.6. *Αν η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο καθένα από τα σύνολα* Δ_1 *και* Δ_2, *τότε η* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο σύνολο* $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Παραδείγματα 9.1.7.

1. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$, συγκλίνει ομαλά στο $\mathbb{R}$ στην $f(x) = 0$. Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Για κάθε $n > n_0$ ισχύει $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $\mathbb{R}$ στην f.

2. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $n = 1, 2, ...$, συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ στην $f(x) = 0$, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομαλή. Πράγματι,
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
Παρατηρούμε ότι $f_n(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ και για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n = n_0 + 1 > n_0$ και υπάρχει $x = n_0 + 1$, τέτοιο ώστε
$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| =& |f_{n_0+1}(n_0+1) - f(n_0+1)| = |f_{n_0+1}(n_0+1) - 0| = \\ =& |f_{n_0+1}(n_0+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

3. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + nx}$, $n = 1, 2, ...$, συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[0, \infty)$ στην συνάρτηση $f(x) = 0$. Πράγματι,
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 + nx} = 0 = f(x),\ \forall x \in [0, \infty)$$
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^2 + nx} \leq \frac{1}{n + nx} \leq \frac{1}{n(1+x)} \leq \frac{1}{n},\ \forall x \in [0, \infty)$$
Αν $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Συνεπώς η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[0, \infty)$ στην f.

4. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{xn}$, $n = 1, 2, ...$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(0, \infty)$ στην $f(x) = 0$, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομαλή. Πράγματι:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0 = f(x),\ \forall x \in (0, \infty)$$
Παρατηρούμε ότι $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\, n} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ και για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n = n_0 + 1 > n_0$ και υπάρχει $x = \dfrac{1}{n_0+1}$, τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_{n_0+1}\left(\frac{1}{n_0+1}\right) - f\left(\frac{1}{n_0+1}\right) \right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

9.2 Κριτήρια ομαλής σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων

Θεώρημα 9.2.1. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση f στο σύνολο Δ, αν και μόνον αν υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n^*$ το σύνολο $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\}$ είναι φραγμένο και*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\} = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην συνάρτηση f στο Δ. Τότε υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n^*$ και για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < 1$. Άρα, το σύνολο $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\}$ είναι φραγμένο για κάθε $n \geq n^*$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομαλή σύγκλιση της $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στην f στο σύνολο Δ συνεπάγεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in \Delta$ ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Επομένως $\forall n \geq n_0$ ισχύει: $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\} < \varepsilon$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\} = 0$$

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n^*$ το σύνολο $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\}$ είναι φραγμένο και

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\} = 0.$$

Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει:

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Delta\} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in \Delta$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην συνάρτηση f στο σύνολο Δ.

□

Παραδείγματα 9.2.2.

1. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$, $n = 1, 2, ...$, συγκλιίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ στη συνάρτηση $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2} = 0$.

   Έχουμε: $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n^2+x^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα,

   $$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\frac{1}{n^2+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{1}{n^2},$$

   για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως

   $$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

   Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $\mathbb{R}$ στην f.

2. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$, $n = 1, 2, ...$ συγκλίνει κατά σημείο στο διάστημα $[1, \infty)$ στη συνάρτηση $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx} = 0$.

   Έχουμε: $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{nx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [1, \infty)$. Άρα,

   $$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [1, \infty)\} = \sup\left\{\frac{1}{nx} : x \in [1, \infty)\right\} = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [1, \infty)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

   Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[1, \infty)$ στην f.

3. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, ...$, στο διάστημα $[0, \frac{1}{3}]$ συγκλιίνει κατά σημείο στην $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

   Άρα, $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \frac{1}{3}]\} = \sup\left\{x^n : x \in [0, \frac{1}{3}]\right\} = \frac{1}{3^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \dfrac{1}{3}]\} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$.

   Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[0, \frac{1}{3}]$ στην f.

Θεώρημα 9.2.3. *Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά σε κάποια συνάρτηση στο σύνολο Δ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Απόδειξη. Έστω η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην f στο Δ. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in \Delta.$$

Για $n, m \geq n_0$ παίρνουμε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall x \in \Delta$$

Αντιστρόφως, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, τότε $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του Cauchy για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = L(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \Delta$. Θα δείξουμε ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην L στο Δ.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε από την υπόθεση υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n, m \geq n_0,\ \forall x \in \Delta$$

Έστω $x \in \Delta$. Επειδή $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = L(x) \in \mathbb{R}$, υπάρχει $m_x \geq n_0$, τέτοιο ώστε

$$|f_{m_x}(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε

$$|f_n(x) - L(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Παράδειγμα 9.2.4. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$, $n = 1, 2, ...,$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[1, \infty)$. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ και n_0 είναι ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $m, n \geq n_0$ ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \frac{1}{x}\Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big| \leq \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big| \leq \Big|\frac{1}{n}\Big| + \Big|\frac{1}{m}\Big| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

9.3 Όριο και συνέχεια οριακής συνάρτησης

Θεώρημα 9.3.1. *Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα Δ και a ένα σημείο συσσώρευσης του Δ.*

Αν

(i) $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και

(ii) η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση f στο διάστημα Δ, τότε η ακολουθία $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι η $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Έστω $\varepsilon > 0$.

Από την ιδιότητα (ii) του θεωρήματος προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.1}$$

Από την ιδιότητα (i) του θεωρήματος προκύπτει ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in \Delta \cap (a - \delta, a + \delta)$, τότε

$$|f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } |f_m(x) - L_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.2}$$

Από τις σχέσεις (9.1) και (9.2) για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|L_n - L_m| \leq |L_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m| < \varepsilon \tag{9.3}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η ακολουθία $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Έστω $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \geq n_1 \tag{9.4}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) του θεωρήματος, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην f στο Δ. Άρα, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \geq n_2,\ \forall x \in \Delta \tag{9.5}$$

Από τα παραπάνω, για $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta \cap (a - \delta, a + \delta)$ να ισχύει

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \varepsilon \tag{9.6}$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

□

Παρατήρηση 9.3.2. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.3.1 ισχύει

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Παραδείγματα 9.3.3.

1. Θα μελετήσουμε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, ...,$ συγκλίνει ομαλά στην $f(x) = 0$ στο $[0, 1)$.

   Έχουμε
   $$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 1} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 1} x^n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
   και
   $$\lim_{x\to 1}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to 1}(\lim_{n\to\infty} x^n) = \lim_{x\to 1} 0 = 0.$$
   Επειδή
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right) \neq \lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right),$$
   η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει όχι ομαλά στην f στο $[0, 1)$.

2. Θα μελετήσουμε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, ...,$ συγκλίνει ομαλά στην $f(x) = 1$ στο $(0, \infty)$.

   Έχουμε
   $$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
   και
   $$\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$
   Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)\right) \neq \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει όχι ομαλά στην f στο $(0, \infty)$.

Θεώρημα 9.3.4. *Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα Δ με τις ιδιότητες*

(i) για κάθε $n = 1, 2, ...$ η f_n είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$,

(ii) η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση f στο διάστημα Δ,

τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη.

$1^{ος}$ **τρόπος:** Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0 έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0),\ n = 1, 2, ...$$

Επειδή η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην f στο διάστημα Δ, από το Θεώρημα 9.3.1 συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

$2^{ος}$ **τρόπος:** Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο Δ, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in \Delta \tag{9.7}$$

Άρα

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in \Delta \tag{9.8}$$

και

$$|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.9}$$

Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$ ισχύει

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.10}$$

Από τις εξισώσεις (5.8)-(5.10) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$ ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

□

Παράδειγμα 9.3.5. Η σύγκλιση της $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, ...$ στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

δεν είναι ομαλή στο $[0, 1]$, επειδή ενώ όλες οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, η οριακή συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

9.4 Παραγώγιση και ολοκλήρωση οριακής συνάρτησης

Θεώρημα 9.4.1. *Έστω ότι*

(i) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει για ένα τουλάχιστον* $x_0 \in [a,b]$

(ii) $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο διάστημα* $[a,b]$.

Τότε η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομαλά στο διάστημα* $[a,b]$ *σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *και για κάθε* $x \in [a,b]$ *ισχύει:* $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Απόδειξη. Έστω $p \in [a,b]$. Θέτουμε $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(p)}{x-p}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_{n+m}'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon, \ \forall n > n_0, \forall m = 1, 2, \ldots, \forall x \in [a,b]$$

Θέτουμε $U(x) = f_{n+m}(x) - f_n(x)$, τότε $U'(x) = f_{n+m}'(x) - f_n'(x)$.

Οπότε $\forall n > n_0, \forall m = 1, 2, \ldots, \forall x \in [a,b]$ έχουμε

$$|g_{n+m}(x) - g_n(x)| = \left|\frac{U(x) - U(p)}{x-p}\right| = U'(c) < \varepsilon$$

όπου c είναι μεταξύ του x και p. Άρα, η $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$.

Επειδή $|x-p| \leq b-a$, από την ομαλή σύγκλιση στο $[a,b]$ της ακολουθίας $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{f_n(x) - f_n(p)}{x-p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ συνεπάγεται η ομαλή σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n(x) - f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ (ως προς x) στο $[a,b]$.

Επειδή $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, από την ομαλή σύγκλιση (για $p = x_0$) της $\{f_n(x) - f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ (ως προς x) στο $[a,b]$ συνεπάγεται η ομαλή σύγκλιση της $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ στο $[a,b]$.

Έστω ότι $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$, είναι η οριακή συνάρτηση της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Τότε για $x \neq p$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x-p} = \frac{f(x) - f(p)}{x-p}$$

Επειδή η $\left\{\dfrac{f_n(x)-f_n(p)}{x-p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$ συνεπάγεται ότι:

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(p)}{x-p}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to p}\frac{f_n(x)-f_n(p)}{x-p}\right]=\lim_{n\to\infty}f_n'(p).$$

□

Παραδείγματα 9.4.2.

1. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)=1+\frac{x}{n}$, $n=1,2,\ldots$, συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση $f(x)=1$ στο $[0,1]$.

   Επειδή η ακολουθία των παραγώγων $f_n'(x)=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$, συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση $g(x)=0$ στο $[0,1]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.1 η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην f στο $[0,1]$. Έχουμε επίσης ότι $f'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

2. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι από την ομαλή σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων δεν συνεπάγεται η ομαλή σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων των συναρτήσεων αυτών.

   Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$, $n=1,2,\ldots$, συγκλίνει ομαλά στην συνάρτηση $f(x)=0$ στο $[0,\infty)$, αφού

   $$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+nx}\right|=\frac{x}{1+nx}\le\frac{x}{nx}=\frac{1}{n}\to 0$$

   Η ακολουθία των παραγώγων $f_n'(x)=\frac{1}{(1+nx)^2}$, $n=1,2,\ldots$, συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,\infty)$ στη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in(0,\infty),\\ 1, & \text{αν } x=0.\end{cases}$.

   Η σύγκλιση όμως δεν είναι ομαλή, αφού

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}f_n'(x)\right)=1\neq 0=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\right).$$

Θεώρημα 9.4.3. *Αν η ακολουθία* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ολοκληρώσιμων στο* $[a,b]$ *συναρτήσεων συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* f *στο διάστημα* $[a,b]$ *, τότε και η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$.

Απόδειξη. Έστω $D = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$, μια διαμέριση του $[a,b]$.

Συμβολίζουμε $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0,..,k-1$ και θέτουμε:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad L_D = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i,$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad U_D = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i,$$

Επίσης για κάθε $n = 1, 2, ...$ θέτουμε

$$m_i^n = \inf\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad L_D^n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i^n \Delta x_i,$$

$$M_i^n = \sup\{f_n(x) : x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad U_D^n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i^n \Delta x_i,$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση D του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U_D - L_D < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Επειδή η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην f στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$$

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $n \geq n_0$. Επειδή η f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ υπάρχει διαμέριση D του $[a,b]$ τέτοια ώστε $S_D^n - s_D^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Επειδή $f_n(x) - \varepsilon' < f(x) < f_n(x) + \varepsilon'$, για κάθε $i = 0, ..., k-1$ και για κάθε $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ισχύει: $m_i^n - \varepsilon' < m_i \leq f(x) \leq M_i < M_i^n + \varepsilon'$. Συνεπώς

$$m_i^n \Delta x_i - \varepsilon' \Delta x_i < m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i < M_i^n \Delta x_i + \varepsilon' \Delta x_i$$

Προσθέτοντας τις παραπανω ανισότητες για $i = 0, ..., k-1$ παίρνουμε

$$L_D^n - \varepsilon'(b-a) < L_D \leq U_D < U_D^n + \varepsilon'(b-a)$$

Άρα
$$U_D - L_D < U_D^n - L_D^n + 2\varepsilon'(b-a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ότι έπρεπε να δείξουμε.

$\square$

Θεώρημα 9.4.4. *Αν η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ολοκληρώσιμων στο $[a,b]$ συναρτήσεων συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$, τότε*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Απόδειξη. Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία ολοκληρώσιμων στο $[a,b]$ συναρτήσεων που συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$.

Από το προηγούμενο θεώρημα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομαλή σύγκλιση της $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στην f στο $[a,b]$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$
Άρα
$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon dx}{b-a} = \varepsilon$$

Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

$\square$

Παρατήρηση 9.4.5. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.4.4 ισχύει
$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Παράδειγμα 9.4.6. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{(n+1)x-1}, & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομαλά στο $[0,1]$.

Αν $x=0$, τότε $f_n(x)=0$ για κάθε n. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

Αν $x\in(0,1]$, τότε υπάρχει n_0 για το οποίο $\frac{1}{n_0}\leq x\leq 1$. Τότε για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ και, άρα, $f_n(x)=\frac{1}{(n+1)x-1}$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)x-1}=0$.

Άρα, η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x)=0$ στο $[0,1]$.

Έχουμε

$$\int_0^1 f_n(x)=\int_0^{\frac{1}{n}} n^2xdx+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{dx}{(n+1)x-1}=\frac{1}{2}+\frac{2\ln n}{n+1}.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\ln n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

ενώ $\displaystyle\int_0^1(\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx=\int_0^1 f(x)dx=0\neq\frac{1}{2}$.

Συνεπώς η σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο διάστημα $[0,1]$ δεν είναι ομαλή.

9.5 Σειρές συναρτήσεων

Ορισμός 9.5.1. Έστω $f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο $\Delta\subseteq\mathbb{R}$. Η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_1, f_1+f_2,\ldots,f_1+\cdots+f_n,\ldots.$$

καλείται *σειρά συναρτήσεων με όρους* $f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots$ και συμβολίζεται με με $f_1+f_2+...+f_n+...$ ή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Οι συναρτήσεις

$$S_1=f_1,\ S_2=f_1+f_2,\ldots,S_n=f_1+f_2+\cdots+f_n,\ldots$$

καλούνται *μερικά αθροίσματα της σειράς συναρτήσεων* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Ορισμός 9.5.2. Θα λέμε ότι η *σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση* S *στο σύνολο* Δ, αν η S είναι οριακή συνάρτηση της ακολουθίας συναρτήσεων $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1 + ... + f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο σύνολο Δ, δηλαδή αν

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Η συνάρτηση S καλείται *άθροισμα της σειράς συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ στο Δ.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η συνάρτηση S είναι άθροισμα της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ αν και μόνον αν $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Ορισμός 9.5.3. Λέμε ότι *η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* S *στο σύνολο* Δ αν η ακολουθία συναρτήσεων

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1 + ... + f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

συγκλίνει ομαλά στην S στο Δ.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση S στο σύνολο Δ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε φυσικό $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Η παραπάνω ανισότητα γράφεται

$$|f_1(x) + ... + f_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Παραδείγματα 9.5.4.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου $f_n(x) = x^{n-1}$, συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ στο $\Delta = [0, \frac{1}{2}]$.

   Πράγματι, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... = \dfrac{1}{1-x}$ και

   $S_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Οπότε

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|-\frac{x^n}{1-x}\right| = \frac{x^n}{1-x}.$$

Αν $x \in [0, 1/2]$, τότε

$$\frac{x^n}{1-x} \leq \frac{x^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 2x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι ένας φυσικός $> \lg_{\frac{1}{2}} \varepsilon + 1$.

Συνεπώς η σειρά συγκλίνει ομαλά στο $\Delta = [0, 1/2]$.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ με $f_n(x) = x^{n-1}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηαση $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $[0, 1)$, αλλά η συγκλιση της σειρας στα διαστήματα αυτά δεν είναι ομαλή.

   Πράγματι: $S_n(x) = 1 + x + ... + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$

   $|S_n(x) - S(x)| = \left|\dfrac{1-x^n}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}\right| = \left|-\dfrac{x^n}{1-x}\right|.$

   $\lim\limits_{x\to-1^+} |S_n(x) - S(x)| = \lim\limits_{x\to-1^+}\left|-\dfrac{x^n}{1-x}\right| = \dfrac{1}{2}$ για κάθε $n = 1, 2, ...$

   $\lim\limits_{x\to1^-} |S_n(x) - S(x)| = \lim\limits_{x\to1^-}\left|-\dfrac{x^n}{1-x}\right| = \infty$ για κάθε $n = 1, 2, ...$

   Για $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ δεν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|S_n(x) - S(x)| < \dfrac{1}{4}$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in (-1, 0]$ (αντίστοιχα, για κάθε $x \in [0, 1)$). Συνεπώς η σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $[0, 1)$ δεν είναι ομαλή.

3. Θα δείξουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$, συγκλίνει ομαλά στο $(-\infty, \infty)$, ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ αποκλίνει.

   Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ είναι εναλλάσσουσα με όρους $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$. Επειδή η ακολουθία $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα και μηδενική, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$. Έχουμε:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{x^2+i}, \; S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$$

και
$$S(x) - S_n(x) < |a_{n+1}| = \frac{1}{x^2 + (n+1)} < \frac{1}{n+1}.$$

Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και n_0 είναι ένας φυσικός $> \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$ ισχύει
$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$
που σημαίνει ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην S στο $(-\infty, \infty)$.

Από την άλλη μεριά η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n}$ αποκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$, σύμφωνα με το πολυωνυμικό κριτήριο.

Παρατήρηση 9.5.5. Η ομαλή σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ στο σύνολο Δ δεν συνεπάγεται την ομαλή σύγκλιση της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ στο Δ.

9.6 Κριτήρια ομαλής σύγκλισης σειράς συναρτήσεων

Θεώρημα 9.6.1. *(Cauchy) Η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο σύνολο Δ αν και μόνον αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*
$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+k}(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \Delta, \forall n \geq n_0, \ \forall k = 1, 2, ... \tag{9.11}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x), \ x \in \Delta$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο σύνολο $\Delta \iff$
η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο σύνολο $\Delta \iff$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall m, n \geq n_0$ και $\forall x \in \Delta$:
$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \tag{9.12}$$

Έστω $m, n \geq n_0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m > n$, οπότε $m = n + k$, όπου $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Άρα

$$S_m(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + ... + f_{n+k}(x) \tag{9.13}$$

Άπο τις σχέσεις 9.12 και 9.13 προκύπτει η σχέση 9.11.

□

Θεώρημα 9.6.2. *(Weierstarass) Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Αν*

(i) $|f_n(x)| \leq c_n$ για κάθε $x \in \Delta$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(ii) η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνει,

τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο Δ.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 9.6.1.

Από την (i) για κάθε $x \in \Delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k = 1, 2, ...$ ισχύει $c_n \geq 0$ και

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+k}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + ... + |f_{n+k}(x)| \leq c_{n+1} + ... + c_{n+k}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την (ii) έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k = 1, 2, ...$ να είναι

$$|c_{n+k} + ... + c_{n+1}| = c_{n+k} + ... + c_{n+1} < \varepsilon$$

Από τα παραπάνω $\forall x \in \Delta$, $\forall n \geq n_0$ και $\forall k = 1, 2, ...$ είναι

$$|f_{n+k}(x) + ... + f_{n+1}(x)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η $\sum\limits_{n+1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο Δ.

□

Πόρισμα 9.6.3. *Αν $|f_n(x)| \leq c_n$ για κάθε $x \in \Delta$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνει ομαλά στο Δ.*

Παραδείγματα 9.6.4.

1. Οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ συγκλίνουν ομαλά στο $\mathbb{R}$.

   Πράγματι, επειδή $\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$ και $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνουν μπορουμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstarass.

2. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ συγκλίνει, τότε η σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$ συγκλίνουν ομαλά στο $\mathbb{R}$.

   Πράγματι, επειδή $|c_n \sin nx| \leq |c_n|$ και $|c_n \cos nx| \leq |c_n|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ συγκλίνει μπορουμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstarass.

3. Για κάθε $r \in (0,1)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[0,r]$. Πράγματι, έστω $r<1$, τότε

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \leq r^n,\ \forall x \in [0,r],\ \forall n = 0,1,...$$

   και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει αφού $|r|<1$.

   Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[0,r]$.

9.7 Όριο και συνέχεια αθροίσματος σειράς συναρτήσεων

Θεώρημα 9.7.1. *Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο συσσώρευσης του Δ. Αν*
(i) $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n$ *για κάθε* $n = 1, 2, ...,$
(ii) η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* S *στο διάστημα* Δ.

Τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ *συγκλίνει και* $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$.

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$.
Από την (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ προκύπτει:

$$\lim_{x\to a} S_n(x) = L_1 + ... + L_n$$

Από την (ii) η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην S στο Δ.
Από το Θεώρημα 9.3.1 συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{L_1 + ... + L_n\}_{n+1}^{\infty}$ συγκλίνει και

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}(L_1 + ... + L_n)$$

Συνεπώς η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ συγκλίνει και $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$.

□

Παρατήρηση 9.7.2. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.7.1 ισχύει

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Παράδειγμα 9.7.3. Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1)$ αλλά όχι ομαλά.

Πράγματι, για κάθε $x \in [0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$. Η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1)$. Σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1)$.

Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ συγκλίνει ομαλά στο $[0,1)$.

Τότε, από το Θεώρημα 9.7.1, προκύπτει ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, που είναι άτοπο.

Θεώρημα 9.7.4. *Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα διάστημα Δ. Αν*

(i) η f_n είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$ για κάθε $n = 1, 2, ...$,

(ii) η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση S στο διάστημα Δ,

τότε και η S είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$.

Από την (ii) η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην S στο Δ και από την (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η S_n είναι συνεχής στο x_0 ως άθροισμα συνεχών στο x_0 συναρτήσεων.

Από το Θεώρημα 9.3.4 συνεπάγεται ότι η οριακή συνάρτηση S της $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι συνεχής στο x_0.

□

Παράδειγμα 9.7.5. Για κάθε $r \in (0, \sqrt{2})$ η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(-r, r)$ αλλά όχι ομαλά. Πράγματι, η σειρά είναι γεωμετρική με πρώτο όρο $a = x$ και λόγο $q = 1 - x^2$. Αν $x \in (-r, r) \setminus \{0\}$ και $0 < r < \sqrt{2}$, τότε $|q| < 1$. Επομένως

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x \in (-r, r) \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι η σειρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x^2)^n$ συγκλίνει ομαλά στο $(-r, r)$. Επειδή η συναρτήσεις $x(1-x^2)^n$ είναι συνεχείς στο $x_0 = 0 \in (-r, r)$, η συνάρτηση $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x^2)^n$ πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, που δεν ισχύει. Συνεπώς η σύγκλιση της σειράς στο $(-r, r)$ δεν είναι ομαλή.

9.8 Παραγώγιση και ολοκλήρωση σειράς συναρτήσεων

Θεώρημα 9.8.1. *Έστω ότι*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *συγκλίνει για ένα τουλάχιστον* $x_0 \in [a,b]$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *συγκλίνει ομαλά στο* $[a,b]$.

Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομαλα σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* S *στο διάστημα* $[a,b]$ *και για κάθε* $x \in [a,b]$ *ισχύει* $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$. Από την (i) προκύπτει ότι η ακολουθία $\{S_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Απο την (ii) προκύπτει ότι η $\{S_n'\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στο Δ. Απο το Θεώρημα 9.4.1 η ακολουθία συναρτήσεων $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση S και

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

□

Παρατήρηση 9.8.2. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.8.1 ισχύει

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Θεώρημα 9.8.3. *Αν η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση* S *στο διάστημα* $[a,b]$ *και κάθε* f_n *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$, *τότε και η* S *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$, *επιπλέον*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$.

Επειδή οι $f_1, ..., f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, η S_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b S_n(x) = \int_a^b f_1(x) + ... + \int_a^b f_n(x)$$

Επειδή η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομαλά στην S στο $[a,b]$ από το Θεώρημα 9.4.4 συνεπάγεται ότι:

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_1(x) + ... + \int_a^b f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

□

Παρατήρηση 9.8.4. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.8.3 ισχύει

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

9.9 Παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειρών

Θεώρημα 9.9.1. *Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R \neq 0$.*

1. *Η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[-r,r]$ για κάθε $r \in (0,R)$.*

2. *Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ (η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$, αντίστοιχα) αποκλίνει, τότε η σύγκλιση της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ στο $[0,R)$ (στο $(-R,0]$, αντίστοιχα) δεν είναι ομαλή.*

3. *Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[0,R]$.*

4. *Αν η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[-R,0]$.*

Απόδειξη.

1. Για κάθε $x \in [-r, r]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$.

Αν $r \in (0, R)$, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ συγκλίνει. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstarass η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[-r, r]$.

2. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά $[0, R)$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to R} a_n x^n = a_n R^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα 5.5.1 προκύπτει ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει, που είναι άτοπο.

3. Έστω $R = 1$. Τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Από το Θεώρημα 8.3.1 για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall k = 1, 2, ...$$

Θέτουμε $A_k = a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+k}$, $k = 1, 2, ...$ Τότε $|A_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$$a_{n_0+1} = A_1, \ a_{n_0+2} = A_2 - A_1, \ ..., a_{n_0+k} = A_{n_0+k} - A_{n_0+k-1}.$$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ και για κάθε $i = 1, 2, ...$, ισχύει $|x^i - x^{i+1}| = x^i - x^{i+1}$. Οπότε

$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i x^i\right| = \left|A_1 x^{n_0+1} + \sum_{i=n_0+2}^{n_0+k} (A_i - A_{i-1}) x^i\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1} A_i (x^i - x^{i+1})\right) + A_k x^{n_0+k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1} |x^i - x^{i+1}| + \frac{\varepsilon}{2} |x^{n_0+k}| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1} (x^i - x^{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+k} = \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+1} - \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+k} + \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+k} < \varepsilon$$

Από το Θεώρημα 9.6.1 η δυναμοσειρά συγκλίνει ομαλά στο $[0, 1]$.

Αν $R \neq 1$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n y^n$, όπου $y = \frac{x}{R}$. Η τελευταία δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει για $y = 1$, επομένως συγκλίνει ομαλα για $[0,1]$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i R^i y^i\right| < \varepsilon,\ \forall y \in [0,1],\ \forall n \geq n_0,\ \forall k = 1,2,...$$

Αν $x \in [0,R]$, τότε $\frac{x}{R} \in [0,1]$, οπότε $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} a_i R^i \left(\frac{x}{R}\right)^i\right| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k = 1,2,....$ Από η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγλίνει ομαλά στο $[0,R]$.

4. Έστω $R = 1$. Τότε συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Από το Θεώρημα 8.3.1 για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$|(-1)^{n+1}a_{n+1} + ... + (-1)^{n+k}a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0,\ \forall k = 1,2,...$$

Θέτουμε $A_k = (-1)^{n+1}a_{n_0+1} + ... + (-1)^{n+k}a_{n_0+k},\ k = 1,2,...$. Τότε $|A_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ και

$$(-1)^{n_0+1}a_{n_0+1} = A_1,\ (-1)^{n_0+2}a_{n_0+2} = A_2 - A_1,\ ...,$$
$$(-1)^{n_0+k}a_{n_0+k} = A_{n_0+k} - A_{n_0+k-1}.$$

Για κάθε $x \in [-1,0]$ και για κάθε $i = 1,2,...$, ισχύει $||x^i| - |x^{i+1}|| = |x^i| - |x^{i+1}|$. Οπότε

$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i x^i\right| = \left|\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} (-1)^i a_i |x^i|\right| = \left|A_1|x^{n_0+1}| + \sum_{i=n_0+2}^{n_0+k}(A_i - A_{i-1})|x^i|\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1} A_i(|x^i| - |x^{i+1}|)\right) + A_k x^{n_0+k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1} ||x^i| - |x^{i+1}|| + \frac{\varepsilon}{2}|x^{n_0+k}| =$$

$$= \varepsilon \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k-1}(|x^i| - |x^{i+1}|) + \frac{\varepsilon}{2}|x^{n_0+k}| = \frac{\varepsilon}{2}|x^{n_0+1}| - \frac{\varepsilon}{2}|x^{n_0+k}| + \frac{\varepsilon}{2}|x^{n_0+k}| < \varepsilon$$

Συμφωνα με το κριτήριο ομαλής σύγκλισης του Cauchy (Θεώρημα 9.6.1) η δυναμοσειρά συγκλίνει ομαλά στο $[-1,0]$.

Για $R \neq 1$ η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση 3.

$\square$

Πόρισμα 9.9.2. *Αν Δ είναι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $a, b \in \Delta$ $(a < b)$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$.*

Παραδείγματα 9.9.3.

1. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1,1]$. Συνεπώς η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει ομαλά στο $[-1,1]$ και σε κάθε υποδιάστημα του $[-1,1]$.

2. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ είναι το $(-1,1]$. Η σειρά συγκλίνει ομαλά σε κάθε $[a,b]\subseteq(-1,1]$.

   Π.χ., η σειρά συγκλίνει ομαλά στο $[0,1]$. Από την άλλη μεριά, επειδή το άκρο $x=-1$ του διαστήματος σύγκλισης δεν ανήκει στο διάστημα σύγκλισης, στο $(-1,1]$ η σύγκλιση της σειράς δεν είναι ομαλή.

Πρόταση 9.9.4. *Αν Δ το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, τότε η συνάρτηση $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $x\in\Delta$, είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0\in\Delta$. Υπάρχουν $a,b\in\Delta$ ώστε $x_0\in[a,b]\subseteq\Delta$.

Σύμφωνα με την Πόρισμα 9.9.2 η $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[a,b]$.

Επειδή κάθε $f_n(x)=a_nx^n$ είναι συνεχής στο x_0, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.7.4.

□

Πρόταση 9.9.5. *Αν $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, τότε για κάθε $x\in(-R,R)$*

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}. \tag{9.14}$$

Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ συγκλίνει και για $x=R$ (αντίστοιχα, $x=-R$), τότε η ισότητα (9.14) ισχύει και για $x=R$ (αντίστοιχα, $x=-R$).

Απόδειξη. Έστω R' ακτίνα σύγκλισης της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Θα δείξουμε ότι $R' = R$, οπότε από τα Θεωρήματα 9.9.1 και 9.8.1 συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (-R, R)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$$

Έστω $x \in (-R, R)$. Τότε $|x| < r$, όπου $0 < r < R$. Επειδή η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ συγκλίνει, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n r^n = 0$. Άρα, υπάρχει $L > 0$ για το οποίο $|a_n r^n| < L$, $n = 1, 2, \ldots$. Οπότε

$$|na_n x^{n-1}| = n|a_n r^n| \cdot \frac{1}{r} \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1} \leq n \cdot \frac{L}{r} \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$$

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\frac{L}{r} \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου, αφού

$$\frac{(n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n}{n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}} = \left|\frac{x}{r}\right| \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \left|\frac{x}{r}\right| < 1$$

Από τα παραπάνω η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ σύγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in (-R, R)$. Άρα $(-R, R) \subseteq (-R', R')$.

Έστω $x \in (-R', R')$. Τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |na_n x^n| = |x| \sum\limits_{n=0}^{\infty} |na_n x^{n-1}|$ συγκλίνει. Επειδή $|a_n x^n| \leq |na_n x^n|$, η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης των σειρών. Επομένως $x \in (-R, R)$. Άρα $(-R', R') \subseteq (-R, R)$. Συνεπώς $R = R'$.

Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n R^{n-1}$ (αντίστοιχα, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n (-R)^{n-1}$) συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ συγκλίνει ομαλά στο $[0, R]$ (αντίστοιχα, στο $[-R, 0]$), άρα και η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[0, R]$ (αντίστοιχα, στο $[-R, 0]$). Οπότε η ισότητα (9.14) ισχύει και για $x = R$ (αντίστοιχα, για $x = -R$).

□

Πρόταση 9.9.6. *Αν Δ είναι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$*

$$\int_0^{x_0} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x_0} a_n x^n dx. \tag{9.15}$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \Delta$. Επειδή κάθε $f_n(x) = a_n x^n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x_0]$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομαλά στο $[0, x_0] \subseteq \Delta$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x_0]$, επιπλέον ισχύει ο παραπάνω τύπος 9.15.

□

Πόρισμα 9.9.7. *Οι παρακάτω δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} &= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} &= a_1 + 2a_2 x + ... + a_n n x^{n-1} + ...
\end{aligned}$$

Παραδείγματα 9.9.8.

1. Επειδή $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} + ... = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ προκύπτει ότι
   $(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + ... + (x^{n-1})' + ... = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)'$, $x \in (-1, 1)$
   Άρα,

   $$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1, 1)$$

   Επίσης

   $$\int_0^x 1dt + \int_0^x tdt + \int_0^x t^2 + ... + \int_0^x t^{n-1}dt + ... = \int_0^x \frac{dt}{1-t},\ x \in (-1, 1)$$

Επομένως

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...=-\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$$

2. Να αποδειχθεί ότι

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}+...,\ x\in(-1,1].$$

Λύση: Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}+...$$

είναι το $(-1,1]$. Θέτουμε

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n}+...,\ x\in(-1,1].$$

Έχουμε (από την Πρόταση 9.9.5)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\\&=1-x+...=\frac{1}{1+x},\ x\in(-1,1).\end{aligned}$$

Επειδή $f(0)=0$, παίρνουμε

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x),\ x\in(-1,1)$$

Θα βρούμε το άθροισμα $f(1)$ της σειράς για $x=1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης $(-1,1]$, παίρνουμε

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(\ln(1+x))=\ln(1+1)$$

3. Να αποδειχθεί ότι

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...,\ x\in[-1,1]$$

Λύση: Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειρας

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$$

είναι το $[-1, 1]$. Θέτουμε

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...,\ x \in [-1, 1].$$

Έχουμε (από την Πρόταση 9.9.5)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} =$$
$$= 1 - x^2 + ... = \frac{1}{1+x^2},\ x \in (-1, 1).$$

Επειδή $f(0) = 0$, παίρνουμε

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x,\ x \in (-1, 1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης $[-1, 1]$, παίρνουμε

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1$$

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \arctan x = \arctan(-1)$$

Πρόταση 9.9.9. *Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ για κάθε x που ανήκει στο διάστημα Δ και $0 \in \Delta$, τότε $a_n = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, ...$*

Απόδειξη. Θέτοντας $x = 0$ στην ισότητα

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...$$

παίρνουμε $a_0 = b_0$. Ας υποθέσουμε ότι $a_i = b_i$, για κάθε $i = 0, 1, ..., n$, τότε

$$a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + ... = b_{n+1} x^{n+1} + b_{n+2} x^{n+2} + ...$$

Διαιρώντας την ισότητα δια του $x^{n+1} \neq 0$, παίρνουμε

$$a_{n+1} + a_{n+2}x + ... = b_{n+1} + b_{n+2}x + ..., x \in \Delta \setminus \{0\}$$

Θέτουμε για κάθε $x \in \Delta$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n+1} + a_{n+2}x + ... \\ g(x) &= b_{n+1} + b_{n+2}x + ... \end{aligned}$$

Οπότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή οι συναρτήσεις $a_n x^n$ και $b_n x^n$ είναι συνεχείς στο $x = 0$, οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x = 0$, άρα

$$a_{n+1} = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = b_{n+1}.$$

□

Πρόταση 9.9.10. *Αν* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$, *τοτε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, ...$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} f(x) =& a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... \\ f'(x) =& 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ... \\ f''(x) =& 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + ... + (n-1) n a_n x^{n-2} + ... \\ f'''(x) =& 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + ... + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3} + ... \\ \vdots & \\ f^{(n)}(x) =& 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n a_n + \ldots \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = 1{\cdot}a_1,\ f''(0) = 1{\cdot}2{\cdot}a_2,\ f'''(0) = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}a_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

□

Πόρισμα 9.9.11. *Αν* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, *τοτε*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n = 0, 1, 2, ...$$

Απόδειξη. Θέτοντας $x - x_0 = y$ και $f(x) = f(y + x_0) = g(y)$ παίρνουμε

$$g(y) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} y^n$$

Από τον ορισμό της g έχουμε: $f^{(n)}(x) = \left[g^{(n)}(y)\right]_{y=x-x_0}$.

Επομένως $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)$. Άρα,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$\square$

Ορισμός 9.9.12. Μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ καλείται αναλυτική στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

9.10 Ασκήσεις

3. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$, $n = 1, 2, ...$, συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1 + n^2x^2}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι: $\dfrac{2n|x|}{1 + n^2x^2} \leq 1$.

Επομένως $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{2n}$.

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n_0 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

Τότε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \geq n_0$.

4. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $n = 1, 2, ...,$ στο διάστημα $[0, \infty)$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in (0, \infty), \\ 1, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

5. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = 2n^2 x \cdot e^{-n^2 x^2}$, $n = 1, 2, ...,$ στο διάστημα $[0, 1]$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = 0$.

6. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, ...,$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι ομαλά.

Λύση: Αν $x \neq 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0 = f(x)$$

Αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = f(0)$.

Παρατηρούμε ότι $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, για $x_0 = \dfrac{1}{n}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(x_0) - 0| = |f_n\left(\frac{1}{n}\right)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon$$

7. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = 2ne^{-nx^2}$, $n = 1, 2, ...,$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(0, 1]$ αλλά όχι ομαλά, ενώ συγκλίνει ομαλά στο $[1, \infty)$.

Λύση: Η οριακή συνάρτηση της $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο $(0, \infty)$ είναι η

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^{nx^2}} = 0, \ \forall x \in (0, \infty).$$

Για $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in (0, 1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \frac{2n}{e} > \frac{1}{e}$$

Άρα δεν υπάρχει $n(\frac{1}{e}) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\forall n > n(\frac{1}{e})$ και $\forall x \in (0,1]$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{e}$ και συνεπώς η συγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων στι διάστημα $(0,1]$ δεν είναι ομαλή.

Αν $x \in [1,\infty)$, τότε $e^{nx^2} > e^n$ και συνεπώς

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2n}{e^{nx^2}} \leq \frac{2n}{e^n} \longrightarrow 0.$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n(\varepsilon)$, τέτοιος ώστε για κάθε $n > n(\varepsilon)$ και για κάθε $x \in [1,\infty)$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, δηλαδή η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $[1,\infty)$.

8. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $n = 1, 2, ...$ συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι ομαλά.

Λύση: Η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει κατα σημείο στη συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } |x| = 1, \\ 1, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

Η συγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων δεν είναι ομαλή, επειδή κάθε συνάρτηση $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ενώ η οριακή συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

9. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(x^2+1)^n}$, συγκλίνει ομαλά στη $S(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ στο $\Delta = (-\infty, \infty)$.

Λύση: Η $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $a = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ και λόγο $q = -\dfrac{1}{x^2+1}$. Επομένως $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{x^2}{x^2+2}$.

Τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι $S_n(x) = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, άρα[1]

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{a(1-q^n)}{1-q} - \frac{a}{1-q}\right| = \left|\frac{aq^n}{q-1}\right| =$$
$$= \left|\frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)^n \cdot \frac{1}{-\frac{x^2}{x^2+1} - 1}\right| = \frac{x^2}{(x^2+1)^n(x^2+2)} <$$
$$< \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = \frac{x^2}{(1+nx^2+...)} \leq \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}.$$

Αν $\varepsilon > 0$ και $n(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon}\}$, τότε $\forall n > n(\varepsilon)$ και $\forall x \in \Delta$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

10. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)^n}$ συγκλίνει στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ αλλά όχι ομαλά.

Λύση: Θέτουμε $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^n}$.

Προφανώς η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για $x = 0$.

Έστω $x \neq 0$. Τότε η $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $a = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ και θετικό λόγο $q = \dfrac{1}{x^2+1} < 1$, επομένως

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$$

$$S_n(x) = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right) \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Άρα $\sup\{|S_n(x) - S(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\dfrac{1}{(x^2+1)^n} : x \in \mathbb{R}\right\} = 1$.
Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|S_n(x) - S(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

Άρα η $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στην S στο $(-\infty, \infty)$ αλλά όχι ομαλά.

Συνεπώς η σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ στο $(-\infty, \infty)$ δεν είναι ομαλή

[1] Θα χρησιμοποιηθεί η ισότητα $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$

11. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Weierstarass για να δείξετε ότι η σειρά

$$\sin x + \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^3 3x}{3^2} + ... + \frac{\sin^n nx}{n^2} + ...$$

συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

Λύση: Επειδή $\left|\frac{\sin^n nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^2}$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

12. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ συγκλίνει στο διάστημα $[0, 1]$ αλλά όχι ομαλά.

Λύση: Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ είναι γεωμετρική με πρώτο όρο $a = x$ και λόγο $q = 1 - x$. Αν $x \in [0, 1]$, τότε $1 - x \in [0, 1]$. Οπότε αν $x \neq 0$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n = \frac{a}{1-q} = \frac{x}{1-(1-x)} = 1$$

Αν $x = 0$, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n = 0$. Συνεπώς η σειρά συγκλίνει στο $[0, 1]$.
Θέτουμε $f_n(x) = x(1-x)^n$ και $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$.

Κάθε συνάρτηση f_n είναι συνεχής στο $x = 0$, ενώ η $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ δεν είναι συνεχής στο $x = 0$ αφού

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ αν } x = 0, \\ 1 \text{ αν } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Συνεπώς η σύγκλιση της σειράς στο $[0, 1]$ δεν είναι ομαλή.

13. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{x}{n}$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ και ότι $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{x}{n}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{x}{n}\right)'$.

Λύση: Θέτουμε $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{x}{n}$.

(i) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει για $x_0 = 0$, αφού $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομαλά στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ από το κριτήριο του Weierstarass, αφού $|f_n'(x)| = \left|\dfrac{1}{n^3} \cos \dfrac{x}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$ για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ συγκλίνει.

Άπο το Θεώρημα 9.8.1 προκύπτει ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά στο $(-\infty, \infty)$ και ότι $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$.

14. Δείξτε ότι το Θεώρημα 9.8.1 της παραγώγισης των σειρών συναρτήσεων δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη σειρά

$$(x^2+1) + 2(x^2+1)^2 + 3(x^2+1)^3 + 4(x^2+1)^4 + ...$$

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά αποκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, \infty)$. Θέτουμε $a_n(x) = n(x^2+1)^n$. Τότε για $x \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(x^2+1)}{n} = x^2 + 1 > 1$$

Επομένως για $x \neq 0$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 0$ παίρνουμε την αποκλίνουσα σειρά $1 + 2 + ... + n + ...$

15. Δείξτε ότι το Θεώρημα 9.8.3 της ολοκλήρωσης των σειρών συναρτήσεων μπορεί να εφαρμοστεί στη σειρά

$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos^2 x}{2!} + \frac{\cos^3 x}{3!} + ..., \ x \in [a, b], \ a, b \in (-\infty, \infty).$$

Λύση: Θέτουμε $f_n(x) = \dfrac{\cos^n x}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$.

Για κάθε n η f_n είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα $[a, b]$.

Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ από το κριτήριο του Weierstarass, αφού $|f_n(x)| = \left|\dfrac{\cos^n x}{n!}\right| \leq \dfrac{1}{n!}$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ συγκλίνει (από το κριτήριο του λόγου, επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0 < 1$).

16. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^n}{n} \dots$

Λύση: Βρίσκουμε το διάστημα σύγλισης $[-1, 1)$ της $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Θέτουμε $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in [-1, 1)$. Έχουμε (από την Πρόταση 9.9.5)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + \dots = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1, 1)$$

Επειδή $f(0) = 0$, παίρνουμε

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x),\ x \in (-1, 1)$$

Θα βρούμε το άθροισμα $f(-1)$ της σειράς για $x = -1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης $[-1, 1)$, παίρνουμε

$$f(-1) = \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} (-\ln(1-x)) = -\ln(1-(-1))$$

Άρα, $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^n}{n} \dots = -\ln(1-x),\ x \in [-1, 1)$.

17. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+....$

Λύση: Το διάστημα σύγλισης της $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ είναι το $(-1,1)$.

Θέτουμε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ x\in(-1,1)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$:

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x+x^2+..=\frac{x}{1-x}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$, για $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ έχουμε $\Phi'(x)=f(x)$. Οπότε

$$f(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Άρα, $1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...=\frac{1}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$.

18. Να αποδειχθεί ότι αν $|x|<1$, τότε

$-2x+4x^3-6x^5+...+(-1)^n2nx^{2n-1}+...=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Λύση: Παρατηρούμε ότι (ολοκληρώνοντας κάθε όρο της σειράς)

$$-\int_0^x 2tdt+\int_0^x 4t^3dt-\int_0^x 6t^5dt+...=-x^2+x^4-x^6+...$$

Το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς $-x^2+x^4-x^6+...$ είναι το $(-1,1)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει

$$-x^2+x^4-x^6+...=\frac{-x^2}{1+x^2}$$

Έπίσης από την Πρόταση 9.9.5 έχουμε

$$-(x^2)'+(x^4)'-(x^6)'+...+(-1)^n(x^{2n})'+...=\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)'$$

Άρα, $-2x+4x^3-6x^5+...+(-1)^n2nx^{2n-1}+...=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Παράρτημα.

Πίνακας ορίων ακολουθιών.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0,\ c > 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right) = e$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = e^a,\ a \in R \setminus \{0\}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \infty,\ a > 1,\ k > 0$

Πίνακας παραγώγων.

1. $c' = 0$
2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \mu \in I\!R \setminus \{0\}$, $\left[\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0,\ [(e^x)' = e^x]$
4. $(\log_a x)') = \frac{1}{x \ln a}.\ \left[(\ln x)' = \frac{1}{x}\right]$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Πίνακας ολοκληρωμάτων

1. $\displaystyle\int 0 \cdot dx = c$

2. $\displaystyle\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$

3. $\displaystyle\int x^\mu \ dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c,\ \mu \neq -1 \Longrightarrow \int \frac{dx}{x^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1)x^{\mu-1}} + c, \mu \neq 1$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c$

5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a \in (0,\infty)\setminus\{1\} \Longrightarrow \int e^x dx = e^x + c$

6. $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + c$

7. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + c$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + c$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + c$

10. $\displaystyle\int \sinh x = \cosh x + c \left(\sinh x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

11. $\displaystyle\int \cosh x = \sinh x + c$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{x}{m} + c,\ m \neq 0.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+m^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)m^2(x^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2}\int \frac{dx}{(x^2+m^2)^{k-1}},$

    $m \neq 0,\ k = 2, 3, ...$

14. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+m} = \frac{1}{2}\ln|x^2+m| + c$

15. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+m)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+m)^{k-1}} + c,\ \ k \neq 1.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-m^2} = \frac{1}{2m}\ln\frac{|x-m|}{|x+m|} + c,\ m \neq 0.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{m} + c,\ m \neq 0.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln|x+\sqrt{x^2+m}| + c,\ m \neq 0.$

Πίνακας μετασχηματισμένων κατά Laplace

1. $L\{1\} = \dfrac{1}{p},\ p > 0$

2. $L\{x^n\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}},\ p > 0$

3. $L\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{p-a},\ p > a$

4. $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{p^2+a^2},\ p > 0$

5. $L\{\cos ax\} = \dfrac{p}{p^2+a^2},\ p > 0$

6. $L\{\sinh ax\} = \dfrac{a}{p^2-a^2},\ p > |a|$

7. $L\{\cosh ax\} = \dfrac{p}{p^2-a^2},\ p > |a|$

8. $L\{e^{ax}x^n\} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}},\ p > a$

9. $L\{e^{ax}\sin bx\} = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2},\ p > a$

10. $L\{e^{ax}\cos bx\} = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2},\ p > a$

11. $L\{x\cdot\sin ax\} = \dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2},\ p > 0$

12. $L\{x\cdot\cos ax\} = \dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2},\ p > 0$

Πίνακας αντιστρόφων κατά Laplace

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p-a)^n}\right\} = \dfrac{e^{ax}x^{n-1}}{(n-1)!}$

2. $L^{-1}\left\{\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax}\sin bx$

3. $L^{-1}\left\{\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax}\cos bx$

4. $L^{-1}\left\{\dfrac{b}{(p-a)^2-b^2}\right\} = e^{ax}\sinh bx$

5. $L^{-1}\left\{\dfrac{p-a}{(p-a)^2-b^2}\right\} = e^{ax}\cosh$

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] Tom M. Apostol, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, τόμοι I και II Εκδόσεις Ατλαντίς -Μ. Πεχλιβανιδης & ΣΙΑ, 1962.

[2] G. N. Berman *A problem book in mathematical analysis*, Mir Publischers, Moscow, 1977.

[3] L. Brand, *Μαθηματική Ανάλυση*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, 1984.

[4] B. Demidovich, (Ed.), *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976.

[5] G. M. Fichtenholz, *Differential-und Integralrechnung*, Vol I, II, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1973.

[6] Lewin Jonathan and Lewin Myrtel, *A simple test for nth term of a series to approach zero*, Amer. Math. Monthly 95 (1988), no 10, 942.

[7] Martin M. Lipschutz, *Schaum's Outline of Differential Geometry* McGraw-Hill Education - Europe, 1969.

[8] Marsden J. Tromba A., *Διανυσμτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2014.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition 1976, McGraw - Hill Book Co. - Singapore.

[10] Θ. Μ. Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ*, Εκδόσεις Τσότρας, 2014.