Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης

08-09-2022

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

(1) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n^n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

(2) Έστω οι θετικές ακολουθίες $(a_n)_n, \ \ (b_n)_n$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει και $\lim_n b_n = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 2ο:

(1) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(2) Να βρεθεί το εσωτερικό του συνόλου $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, στον χώρο με νόρμα $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$. Εδώ $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών.

ΘΕΜΑ 3ο:

(1) Έστω $B = B[(0,0), 1]$ η κλειστή μπάλα με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1 στον χώρο με νόρμα $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$. Να βρεθεί το μεγαλύτερο a και το μικρότερο b ώστε

$$[-a, a] \times [-a, a] \subseteq B \subseteq [-b, b] \times [-b, b].$$

(2) Έστω $V \neq \{0\}$ διανυσματικός υπόχωρος του $(\mathbb{R}^5, \| \cdot \|_2)$. Να βρεθεί η διάμετρος του συνόλου V.

ΘΕΜΑ 4ο:

(1) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $U_n, n \in \mathbb{N}$ ανοικτά σύνολα ώστε

$$x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_{n+1} \subseteq U_n, \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι υπάρχουν κλειστά σύνολα K_n με μη κενό εσωτερικό ώστε $K_{n+1} \subseteq K_n \subseteq U_n$ για κάθε n και $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n$.

(2) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(x_n)_n \subseteq X$ ακολουθία ώστε $x_n \to x \in X$. Αν K_i η κλειστή θήκη του συνόλου $\{x_i, x_{i+1}, ...\}$, δηλαδή $K_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, ...\}}$ δείξτε ότι $\lim_i (diam K_i) = 0$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(1) Να βρεθούν μετρικές d, ρ του $\mathbb{R}^2$ ώστε η απεικόνιση $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, \rho)$ που ορίζεται από $f(p) = p \ \ \forall \ \ p \in \mathbb{R}^2$ να είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.

(2) Έστω $f : (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2) \to (\mathbb{R}^m, \| \cdot \|_2), \quad n, m, \mathbb{N}$ συνεχής συνάρτηση και p στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ ώστε $f(p) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|f(x)\|_2 > 0$ για κάθε x στην ανοικτή μπάλα $B(p, \delta)$.

Καλή επιτυχία