Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
04-09-2023
Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 50 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$. Να εξεταστεί το A ως προς την συνεκτικότητα.

(β) Έστω $B = \{(x, \frac{x}{n}) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. Να εξεταστεί το B ως προς την συνεκτικότητα.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 = 1\}$ Να εξεταστεί το K ως προς την συμπάγεια.

(β) Εστω (X, d) μετρικός χώρος ώστε η κλειστή μπάλλα $B[x, 1]$ να είναι συμπαγές σύνολο, για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι ο χώρος X είναι πλήρης. Είναι ο X απαραίτητα συμπαγής μετρικός χώρος;

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να υπολογιστούν τα όρια των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

(β) Να αναπτυχθούν οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^2,\ h(x) = \frac{1}{x^2}$$

σε δυναμοσειρές με κέντρο το 3.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $A \subseteq X$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο τότε το ίδιο είναι και το σύνολο $f(A) \subseteq Y$.

(β) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}, \ \ x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω ο χώρος $C([0, 3])$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[0, 3]$ εφοδιασμένος με την μετρική $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : 0 \leq x \leq 3\}$. Έστω ακόμα $X = \{f \in C([0, 3]) : f|_{[1,2]} = 0\}, \ \ Y = \{f \in C([0, 3]) : f|_{(1,2)} = 0\}$. Δείξτε ότι $Y = X = \overline{X}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$. Να αναπτυχθεί η f σε σειρά Fourier.

Καλή επιτυχία