Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

02-02-2022

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Θεωρώντας ότι κάθε διάστημα $[x, y], x < y$ είναι συνεκτικό στον $\mathbb{R}$, δείξτε ότι το $(a, +\infty)$ είναι επίσης συνεκτικό.

(β) Έστω $\emptyset \neq A, \emptyset \neq B$ συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $X = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι το σύνολο X είναι συμπαγές.

ΘΕΜΑ 2ο:

Έστω $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$.

(α) Βρείτε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X που δεν είναι συμπαγές.

(β) Βρείτε μη κενά κλειστά και φραγμένα υποσύνολα A, B του X ώστε

$$A \cap B = \emptyset, \quad d(A, B) = 0$$

όπου $d(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}$.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{100} (n \cos(nx) + (n+1)\sin(nx)).$$

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx, \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(100x)dx, \quad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(200x)dx.$$

(β) Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(\pi) = f(-\pi)$ και με παράγωγο συνεχή. Έστω $a_n = a_n(f), \quad b_n = b_n(f), \quad n = 1, 2, ...$ οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ που να συκλίνει ομοιόμορφα σε συνάρτηση f και η f να είναι συνεχής.

ΘΕΜΑ 5ο:

Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

στο διάστημα στο $(0, 1)$.

Καλή επιτυχία