Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

14-06-2022

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $A = \{x, y\}$ Είναι το A συνεκτικό σύνολο ;

(β) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^2$ ώστε $\|x - y\| < \rho_1 + \rho_2, \rho_i > 0, i = 1, 2$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = B[x, \rho_1] \cup B[y, \rho_2]$ είναι συνεκτικό. Εδω $\| \cdot \|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα, και $B[x, \rho_1], B[y, \rho_2]$ οι κλειστές μπάλες.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι $\sup K = \max K, \inf K = \min K$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $K_n, n \in \mathbb{N}$ κλειστά υποσύνολα του ώστε

$$\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση *Lipchitz* με $f(0) = 0$ και $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{x}{n^2})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

(β) Έστω $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Να εξεταστεί η ακολουθία (f_n) ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$.

(β) Έστω

$$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}, \ \ C(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \|f\|_\infty < \infty\}$$

όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in X\}$. Δείξτε ότι ο χώρος $(C(X), \|f\|_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

ΘΕΜΑ 5ο: Δίνεται $f_n(x) = \frac{\log(nx)}{n!}, x \geq 1$. Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Καλή επιτυχία