Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

09-07-2020

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Έστω μετρικός χώρος (X,d) και A, B υποσύνολα του X. Είναι αλήθεια ότι

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \; ?$$

Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον $\mathbb{R}$ ώστε x_n φυσικός αριθμός για κάθε n. Αν η $(x_n)_n$ συγκλίνει δείξτε ότι είναι τελικά σταθερή.

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : f(x) \in \{0,1\}\}$$

είναι κλειστό στον X.

(β) Έστω μετρικός χώρος (X,d) και A υποσύνολο του X. Αν $x \in A^0$ και η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in A^0, \;\; \forall\, n \geq n_0$.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \;\; x \in [0, +\infty), \;\; n \in \mathbb{N}.$$

(β)Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο και ότι δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα x.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $(A_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων του X ώστε $diam(A_n) \to 0$. Δείξτε ότι

$$f(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cap_{n=1}^{\infty} f(A_n) = \{a\}.$$

(β)Έστω $K = [0,1] \times [0,1], (x_n)_n$ ακολουθία στο $[0,1]$ και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f((x_n, x))}{n^2}$$

Δείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη και ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Καλή επιτυχία