

Μαθηματική Ανάλυση

B. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Δίνεται το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 2\}$. Να βρεθούν η κλειστή θήκη το εσωτερικό και το σύνορο του A , στον μετρικό χώρο (\mathbb{R}^2, d) όπου d η ευκλείδεια μετρική:

$$d((x, y), (z, \omega)) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - \omega)^2} = \|(x - z, y - \omega)\|_2.$$

(β) Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική. Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_n$ στοιχείων του X συγχλίνει σε σημείο του αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και ακολουθία $(x_n)_n$ στοιχείων του που συγχλίνει σε σημείο $x \in X$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

(β) Να βρεθούν τα συμπαγή υποσύνολα του συνόλου $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{x+n^2x}, x \in (0, 1]$. Δείξτε ότι η (f_n) δεν συγχλίνει ομοιόμορφα στο $(0, 1]$ αλλά συγχλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, 1]$ για $0 < \alpha < 1$.

(α) Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2}(x+1)^n$. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της και να υπολογιστεί το όριο της.

ΘΕΜΑ 4ο:

Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $K_n, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $K_{n+1} \subseteq K_n$ για κάθε n και $\delta(K_n) \rightarrow 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο. (Υπενθυμίζεται ότι $\delta(K) = \text{diam}(K)$ είναι η διάμετρος του συνόλου K .)

Καλή επιτυχία