Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
01-07-2015

ΘΕΜΑ 1ο: Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε την μετρική

$$d((a,b),(c,d)) = \|(a-c,b-d)\|_2 = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

(α) Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς την προηγούμενη μετρική στο (x,y) αν και μόνο αν $x_n \to x, y_n \to y$. (Μον. 10)

(β) Δείξτε ότι $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}^{\|\cdot\|_2} = \mathbb{R}^2$ όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο του Y, B το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι επίσης ανοικτό. (Μον. 20)

ΘΕΜΑ 3ο:
(α) Έστω

$$f_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1-x^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $(f_n)_n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού της. (Μον. 10)

(β) Έστω $\alpha > 1$ και

$$g_n : (\alpha,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{1-x^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $(g_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0. (Μον. 10).

ΘΕΜΑ 4ο:
Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
(α) Βρείτε το διάσημα συγκλισής της, I. (Μον. 10)
(β) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\ \ \forall x \in I$. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 5ο:
Έστω (X,d) μετρικός χώρος και M πυκνό υποσύνολο του X με την ιδιότητα κάθε Cauchy ακολουθία στοιχείων του M να έχει όριο μέσα στο X. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης.

Καλή επιτυχία