

Μαθηματική Ανάλυση

B. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο:

α) Έστω $A = \left\{ \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Να αποδείξετε ότι $A^\circ = \emptyset$.

β) Να δείξετε ότι το $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ είναι πυκνό στο \mathbb{R} .

(2.0)

Θέμα 2ο:

Έστω $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ ομοιόμορφα συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον (X, d) , τότε $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον (Y, ρ) .

(2.0)

Θέμα 3ο:

Έστω ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, με τύπο:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία συναρτήσεων δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

(2.0)

Θέμα 4ο:

Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ και να υπολογίσετε το όριο της (δηλαδή σε ποια συνάρτηση συγκλίνει)

(2.0)

Θέμα 5ο:

Να αποδείξετε ότι σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) , μια ανοιχτή περιοχή (ανοιχτή μπάλα) ακτίνας $r > 0$ έχει διάμετρο μικρότερη ή και ίση του $2r$. Στην συνέχεια να δώσετε παράδειγμα ανοιχτής περιοχής (ανοιχτής μπάλας) με διάμετρο ακριβώς $2r$ και παράδειγμα ανοιχτής περιοχής με διάμετρο 0.

(Διευκρίνιση: Στα παραδείγματα πρέπει να προσδιορίσετε ακριβώς τον μετρικό χώρο στον οποίο αναφέρεστε και να δικαιολογήσετε πλήρως γιατί η διάμετρος είναι η ζητούμενη.)

(2.0)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ