28–06–2017

Μαθηματική Ανάλυση

Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο: Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών.
(i) Να βρείτε το $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(ii) Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ y \in \mathbb{Q}\}$. Να βρείτε το $\overline{A}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda})$.
(iii) Έστω $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ y \in \mathbb{Q}, \ y > 0\}$. Να βρείτε το $\overline{B}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda}), \ d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda}$.
Θυμίζουμε ότι $d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ||(x_1 - x_2, y_1 - y_2)||_2$.
Αιτιολογίστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Θέμα 2ο: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.
(i) Αν $A, B \subset X$ να δείξετε ότι $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o)$.
(ii) Αν ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του (X, d) τέτοια ώστε $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ να αποδείξετε ότι η $(x_n)_n$ είναι Cauchy .

Θέμα 3ο: Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f_n : A \to \mathbb{R}, \ n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Αν η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f να αποδείξετε ότι η f είναι επίσης συνεχής.

Θέμα 4ο: Έστω $h_n(x) = \frac{\sin x}{n}, \ x \in \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων.
(i) Να εξετάσετε αν η $(h_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
(i) Να εξετάσετε αν η $(xh_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 5ο: Δίνετε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$.
(i) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
(ii) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < b$.

Θέμα 6ο: Έστω $T : (C[0, a], ||\cdot||) \to (C[0, a], ||\cdot||)$ με $Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$ και $0 < a < 1$.
(i) Να δείξετε ότι ο T είναι συστολή και συνεχής.
(ii) Να αποδείξετε ότι η T έχει σταθερό σημείο.
(iii) Να δείξετε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερό σημείο για την T, αν και μόνον αν, $f' = f$ και $f(0) = 1$.

Να απαντήσετε σε 5 από τα 6 θέματα.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ