Λύσεις Εξεταστικής Ιουνίου 2023

July 20, 2023

1 ΘΕΜΑ 1ο

α)

Έστω τα σύνολα $A = f^{-1}\left(\left(-1, \frac{3}{2}\right)\right) \subseteq X$ και $B = f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2}, 4\right)\right) \subseteq X$. Επειδή τα $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ είναι ανοικτά στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και η f είναι συνεχής, έπεται ότι τα A και B είναι ανοικτά στον (X, d) ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών μέσω της f. Έχουμε

$$\begin{aligned} X &\subseteq f^{-1}(f(X)) \\ &= f^{-1}([0,1] \cup [2,3]) \\ &= f^{-1}([0,1]) \cup f^{-1}([2,3]) \\ &\subseteq f^{-1}\left(\left(-1, \frac{3}{2}\right)\right) \cup f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2}, 4\right)\right) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

Επειδή $0 \in f(X)$ και $2 \in f(X)$ υπάρχουν a, $b \in X$ με $a \neq b$ ώστε $f(a) = 0$ και $f(b) = 2$. Εφ'όσον $f(a) = 0 \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ προκύπτει $a \in A$ και αντίστοιχα $f(b) = 2 \in \left(\frac{3}{2}, 4\right) \Rightarrow b \in B$, άρα $A \cap X \neq \varnothing$ και $B \cap X \neq \varnothing$. Τέλος

$$A \cap B = f^{-1}\left(\left(-1, \frac{3}{2}\right)\right) \bigcap f^{-1}\left(\left(\frac{3}{2}, 4\right)\right) = f^{-1}\left(\left(-1, \frac{3}{2}\right) \cap \left(\frac{3}{2}, 4\right)\right) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

και άρα $A \cap B \cap X = \varnothing$. Συνεπώς ο (X, d) είναι μη-συνεκτικός.

β-ι)

Γράφουμε $A = \{a_1, a_2, ...\}$ με $a_n \neq a_m$ για $n \neq m$. Υπάρχουν δείκτες i, $j \in \mathbb{N}$ με $a_i < a_j$. Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $a_i < x < a_j$ και $x \notin A$. Θεωρούμε τα ανοικτά $B = (-\infty, x)$, $C = (x, +\infty)$ και είναι προφανές ότι $A \subseteq B \cup C$, $A \cap B \neq \varnothing$ ($a_i \in A \cap B$), $A \cap C \neq \varnothing$ ($a_j \in A \cap C$) και τέλος $A \cap B \cap C = \varnothing$. Άρα το A είναι μη-συνεκτικό.

β-$\iota\iota$)

Η απεικόνιση $f\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x,y) = x$ είναι συνεχής. Ισχύει ότι $f(B) = \{x_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} = A$. Επειδή $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$ έχουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν το B ήταν συνεκτικό τότε λόγω συνέχειας της f θα είχαμε ότι το $A = f(B)$ είναι επίσης συνεκτικό, άτοπο λόγω του β-ι).

2 ΘΕΜΑ 2ο

α) Μπορεί να βρεθεί στις διαλέξεις Μαθημ.Αναλ.5 και Μαθημ.Αναλ.6

β)

Αφού η f είναι συνεχής με συμπαγές πεδίο ορισμού, είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$d(x', x) < \delta \Rightarrow \rho(f(x'), f(x)) < \epsilon \ (I).$$

Αφού η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) < \delta$ για κάθε n, $m \geq n_0$. Άρα, για κάθε n, $m \geq n_0$ λόγω της (I) προκύπτει $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$. Συνεπώς η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον (Y, ρ).

Δεν ισχύει το ίδιο αν ο (X, d) δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω $(X, d) = ((0, 1], |\cdot|)$ και $(Y, \rho) = ([1, +\infty), |\cdot|)$. Ο (X, d) δεν είναι συμπαγής (δεν είναι καν κλειστός). Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f\colon (0, 1] \to [1, +\infty),\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι βασική στον $(0, 1]$ ενώ η $f(x_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι βασική στον $[1, +\infty)$.

3 ΘΕΜΑ 3ο

α)

Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1, 1).$$

Πρόκειται για δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Στο $(-1, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -\ln(1-x) + c$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Ιδιαίτερα, $f(0) = c = 0$, άρα $f(x) = -\ln(1-x),\ x \in (-1, 1)$.

Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε $0 < e^x < 1$ άρα

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n} \\ &= f(e^x) \\ &= -\ln(1-e^x) \end{aligned}$$

$\beta)$

Πρόκειται για δυναμοσειρά με κέντρο $x_0 = 0$ και συντελεστές

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & k = 2n \\ 0\ , & k = 2n-1 \end{cases} \quad , \ k \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίζουμε

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο $I = (-1, 1)$. Για $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Τελικά το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$.

4 ΘΕΜΑ 4ο

$\alpha)$

Οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Για $x \leq 0$ έχουμε ότι $f_n(x) = 0 \to 0$. Έστω $x > 0$. Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \frac{1}{x}$ οπότε $\frac{1}{n_0} < x$ και συνεπώς για $n \geq n_0$ ισχύει $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x$, οπότε για $n \geq n_0$ ισχύει $f_n(x) = 0$. Συνεπώς, η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Ωστόσο η σύγκλιση στη μηδενική συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφη. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} ||f_n - 0||_\infty &= \sup\{|f_n(x)| \ \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &\geq \sup\left\{\frac{\sin x}{x} \mid \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}\right\} \\ &= n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει με μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ στο $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0|| \neq 0.$$

$\beta)$

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1.$$

Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x} + x = 5 + (x-5) + \frac{1}{5-(5-x)} = 5 + (x-5) + \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-(5-x)/5}$

και άρα για $\left|\frac{5-x}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 10$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 + (x-5) + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5-x}{5}\right)^n \\
&= 5 + (x-5) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-5)^n \\
&= \left(5 + \frac{(-1)^0}{5}\right) + \frac{(-1)^1}{5^2}(x-5) + (x-5) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-5)^n \\
&= \frac{26}{5} + \frac{26}{25}(x-5) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-5)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-5)^n
\end{aligned}$$

όπου $b_0 = \frac{26}{5},\ b_1 = \frac{26}{25}$ και $b_n = \frac{(-1)^n}{5^{n+1}},\ n \geq 2$.

5 ΘΕΜΑ 5ο

$\alpha)$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in C([0,1])$ ισχύει

$$||f||_2^2 = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 ||f||_\infty^2 \mathrm{d}t = ||f||_\infty^2,$$

δηλαδή $||f||_2 \leq ||f||_\infty$. Ο χώρος $C([0,1])$ με τη νόρμα $||\cdot||_\infty$ είναι διαχωρίσιμος με αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο το σύνολο $\mathcal{P}$ των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με ρητούς συντελεστές. Έστω $\epsilon > 0$ και έστω $f \in C([0,1])$. Υπάρχει τότε $P \in \mathcal{P}$ ώστε $||f-P||_\infty < \epsilon$, οπότε $||f-P||_2 \leq ||f-P||_\infty < \epsilon$. Προκύπτει λοιπόν ότι το αριθμήσιμο $\mathcal{P}$ είναι πυκνό στο $C([0,1])$ και ως προς τη νόρμα $||\cdot||_2$. Άρα ο H είναι διαχωρίσιμος.

$\beta)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, επεκτείνεται 2π-περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, επειδή η f είναι άρτια οι συντελεστές b_n, $n \geq 1$ είναι όλοι μηδέν. Έτσι, για τα a_n, $n \geq 0$ εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε εύκολα

$$a_0 = \frac{\pi}{2},\ a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi\,n^2},\ n \geq 1.$$

Εφ'όσον
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\, n^2} < \infty$$
η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και έχουμε
$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi\, n^2}\,\cos(n\,x),\ x\in[-\pi,\pi]$$
ή
$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,\cos((2k+1)x),\ \ x\in[-\pi,\pi]\,.$$