Πανεπιστημιο Πατρων – Τμημα Μαθηματικων

AM436 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις 1η σειρά

ΜΔΕ 1ης τάξης

1. Να λυθεί η εξίσωση
$$au_t(x,t) + bu_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές με $a^2 + b^2 \neq 0$.

Υπόδειξη

3ος τρόπος επίλυσης: Η μέθοδος των συντεταγμένων. Ορίζουμε τις συντεταγμένες ξ και η με τις σχέσεις
$$\xi = bx + at, \qquad \eta = ax - bt$$
και ορίζουμε $U(\xi,\eta) = u(x,t)$. Έτσι από τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε
$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = aU_\xi - bU_\eta$$
$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = bU_\xi + aU_\eta.$$
Αντικαταστήστε στην εξίσωση και επιλύστε.

(α΄) Να λυθεί η εξίσωση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

(β΄) Δείξτε ότι το $\xi\eta$ σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.

2. Να λυθεί η εξίσωση
$$au_t + bu_x + cu = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
όπου a, b, c είναι σταθερές με $a^2 + b^2 \neq 0$.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄) $(1 + x^2)u_x + u_y = 0.$

(β΄) $u_x + yu_y = 0.$

(γ΄) $u_x + 2xy^2 u_y = 0.$

4. Να λυθεί η εξίσωση
$$3u_x + u_{yx} = 0.$$

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$u_t - xtu_x = u, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = -x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u^2 u_x + u_y = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ &u(x,0) = x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &xu_y - yu_x = u, && x > 0, \quad y > 0 \\ &u(x,0) = x, && x > 0, \quad y = 0. \end{aligned}$$