AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 23

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

8 Ιανουαρίου 2020

Παράδειγμα (Η εξίσωση του Laplace σε δακτύλιο)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, &\qquad a^2 < x^2 + y^2 < b^2 \\ u = 0, &\qquad x^2 + y^2 = a^2 \\ u = 1, &\qquad x^2 + y^2 = b^2. \end{aligned}$$

Γράφοντας το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες και υποθέτοντας, όπως στην περίπτωση του δίσκου, ότι $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ βρίσκουμε ότι οι R και Θ είναι λύσεις, αντίστοιχα, των

$$\begin{cases} r^2 R + rR' - \lambda R = 0, & a < r < b \\ \Theta'' + \lambda\Theta = 0, & 0 < \theta < 2\pi, \qquad \Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_n = n^2, &\qquad \Theta(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, &\qquad n = 0,1,2,\ldots \\ \lambda_0 = 0, &\qquad R_0(r) = C_0 + D_0 \log r \\ \lambda_n = n^2, &\qquad R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, &\qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε

$$u(r,\theta) = \frac{a_0 + b_0 \log r}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta \right]$$

και από τις $u(a,\theta) = 0$ και $u(b,\theta) = 1$ βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} a_0 + b_0 \log a &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 0 \, \mathrm{d}\theta = 0 \\ a_0 + b_0 \log b &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0 = -\frac{2\log a}{\log(b/a)}, \qquad b_0 = \frac{2}{\log(b/a)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n a^n + b_n a^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 0 \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0 \\ a_n b^n + b_n b^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1 \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = b_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} c_n a^n + d_n a^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 0 \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0 \\ c_n b^n + d_n b^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1 \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_n = d_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\log a}{\log(b/a)} + \frac{2}{\log(b/a)}\log r\right) = \frac{\log(r/a)}{\log(b/a)}.$$

Σημείωση. Σχετικά με τη λύση του ομοιογενούς συστήματος

$$\begin{pmatrix} a^n & a^{-n} \\ b^n & b^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

το οποίο δίνει τους συντελεστές a_n, b_n, c_n, d_n με $n \geq 1$, για την ορίζουσα των συντελεστών έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a^n & a^{-n} \\ b^n & b^{-n} \end{vmatrix} = \left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^n \neq 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

εκτός αν $a = b$, κατά συνέπεια το σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική.

Η εξίσωση του Laplace σε μη φραγμένο χωρίο

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα μη φραγμένο χωρίο, το οποίο, ως προς την τοποθέτησή του, φαινομενικά δείχνει να είναι το ανάλογο του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση του Laplace στο δίσκο.

Παράδειγμα (Η εξίσωση στο συμπλήρωμα του δίσκου)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \qquad & x^2 + y^2 > a^2 \\ u = g, \qquad & x^2 + y^2 = a^2 \end{aligned}$$

όπου η g είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στην περιφέρεια $x^2 + y^2 = a^2$.

Όπως στην περίπτωση του δακτυλίου, αφού είμαστε μακρυά από το $r = 0$, η λύση θα είναι στη μορφή

$$u(r,\theta) = \frac{a_0 + b_0 \log r}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta \right]$$

όπου

$$
\begin{aligned}
a_0 + b_0 \log a &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
a_n a^n + b_n a^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\
c_n a^n + d_n a^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις, αφού για παράδειγμα, για κάθε n και $a_n \in \mathbb{R}$ αν

$$
b_n = \Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta - a_n a^n\Big) a^n
$$

οι (1) ικανοποιούνται. Αν όμως επιβάλλουμε την συνθήκη η u να είναι φραγμένη καθώς $r \to \infty$ (συνοριακή συνθήκη στο $r = \infty$) τότε $b_0 = a_n = c_n = 0$, για $n \geq 1$, οπότε η λύση του προβλήματος θα είναι η

$$
u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a}{r}\Big)^n \Big[\tilde{b}_n \cos n\theta + \tilde{d}_n \sin n\theta\Big],
$$

όπου $a_0, \tilde{b}_n, \tilde{d}_n$ είναι οι συντελεστές Fourier της g, βλέπε (1), έτσι

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{a}{r}\Big)^n\Big[\cos n\theta\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sin n\theta\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a}{r}\Big)^n\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

και από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς για $r > a$

$$
= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a}{r}\Big)^n 2\cos n(\theta-\varphi)\Big)\,\mathrm{d}\varphi
$$

και όπως στην περίπτωση του δίσκου, αφού το όριο της σειράς υπολογίζεται βρίσκουμε

$$
u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-a^2)g(\varphi)}{a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad r > a. \tag{2}
$$

Η σχέση (2) είναι **ο τύπος του Poisson** στο συμπλήρωμα του δίσκου.

Σημειώνουμε ότι η συνοριακή συνθήκη στο $r = a$ υλοποιείται ως

$$\lim_{(r,\varphi)\to(a+,\theta)} u(r,\varphi) = g(\theta). \tag{3}$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν στην περίπτωση του δίσκου και αφήνεται σαν άσκηση.

Άσκηση 1 (Ο τύπος του Poisson στο ημιεπίπεδο). Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

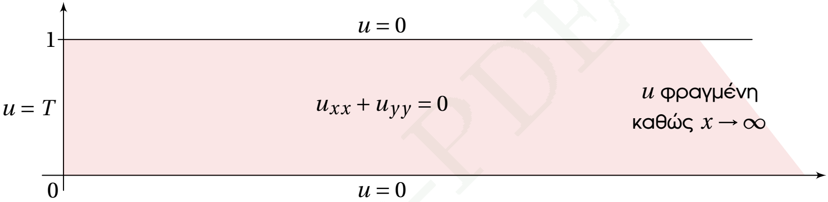
$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0 && -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\
&u(x,0) = g(x) && -\infty < x < \infty \\
&u(x,y) \quad \text{φραγμένη καθώς} && x^2 + y^2 \to \infty
\end{aligned}$$

όπου η g είναι μια φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, δίνεται από τη σχέση

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)\,\mathrm{d}s}{(s-x)^2 + y^2} \qquad y > 0. \tag{4}$$

Άσκηση 2 (Η εξίσωση του Laplace σε ημιάπειρη ζώνη).

(α') Να βρεθεί η λύση του προβλήματος



όπου T είναι μια θετική σταθερά.

(β') Τι μπορεί να ειπωθεί για το μέγιστο της λύσης του προβλήματος;

Λύση

(**α'**) Υποθέτοντας ότι $u(x, y) = X(x)Y(y)$, όπως στην περίπτωση του ορθογωνίου βρίσκουμε ότι οι X και Y είναι λύσεις των προβλημάτων

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & 0 < x < \infty, & X \text{ φραγμένη} \\ Y'' + \lambda Y = 0, & 0 < y < 1, & Y(0) = Y(1) = 0 \end{cases}$$

οπότε

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2, \qquad Y_n(y) = C_n \sin(n\pi y), \qquad n = 1,2,3,\dots$$
$$X_n(x) = A_n e^{n\pi x} + B_n e^{-n\pi x}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Επειδή η u είναι φραγμένη είναι $A_n = 0$, οπότε η λύση θα είναι

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi x} \sin(n\pi y)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} u(0,y) = T &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi y), \\ c_n &= 2T \int_0^1 \sin(n\pi y)\,\mathrm{d}y = \frac{2T}{n\pi}[1-(-1)^n]. \end{aligned} \tag{5}$$

Ετσι τελικά θα έχουμε

$$u(x,y) = \frac{4T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi y]}{2n-1} e^{-(2n-1)\pi x} \tag{6}$$

Σημείωση. Η σειρά στην (5) είναι η σειρά Fourier της (περιττής) συνάρτησης

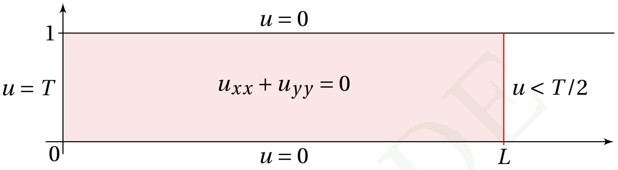
$$f(y) = \begin{cases} T & 0 < y < 1 \\ -T & -1 < y < 0 \end{cases}$$

η οποία στα 0, ± 1 (και γενικά στους ακεραίους η περιοδική επέκτασή της) συγκλίνει στο $0 = (-T + T)/2$.

(**β**$'$) Η αρχή του μεγίστου ισχύει σε φραγμένο χωρίο, άρα δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή, τουλάχιστον αμέσως. Ας δούμε πώς συμπεριφέρεται η λύση στην (6).

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\le \frac{4T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n-1)\pi x}}{2n-1} e^{-n\pi x} \\ &\le \frac{4T}{\pi} e^{-\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n-1)\pi}}{2n-1} && \text{για } x > 1 \\ &= TCe^{-\pi x} && \text{για } x > 1 \end{aligned}$$

κατά συνέπεια $|u(x,y)| \to 0$, καθώς $x \to \infty$, οπότε για κάποιο $L > 1$ θα είναι $|u(x,y)| < T/2$ για $x \ge L$.



Το μέγιστο της u στο $[0,L]\times[0,1]$ λαμβάνεται στο σύνορο του ορθογωνίου ενώ στο $[L,\infty)\times[0,1]$ είναι $u \le T/2$, επομένως η μέγιστη τιμή της u είναι ίση με T και λαμβάνεται στο σύνορο της λωρίδας.

Άσκηση 3 (Το πρόβλημα Newmann στο δίσκο). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 && 0<r<a, \quad 0<\theta<2\pi \\ &\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = u_r(a,\theta) = g(\theta) && 0<\theta<2\pi. \end{aligned}$$

Τι παρατηρείτε; Σημειώνουμε ότι οι φυσιολογικές συνθήκες περιοδικότητας και ομαλότητας, που επιβάλλονται από την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων, ισχύουν. Γιατί (βλέπε Διάλεξη 21) $u_r = \partial u/\partial \mathbf{n}$;