AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 20

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

11 Δεκεμβρίου 2019

Η εξίσωση της θερμότητας στην ευθεία (συνέχεια)

Είδαμε ότι για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), && -\infty < x < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου η ϕ είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση η

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)\, \mathrm{d}y \tag{2}$$

είναι λύση του (1) με την έννοια ότι η αρχική συνθήκη υλοποιείται ως

$$\lim_{t \to 0+} u(x,t) = \phi(x). \tag{3}$$

Θέτουμε

$$\Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{4}$$

Τότε

1. $K(x,t;y) = \Theta(x-y,t)$, όπου K είναι ο πυρήνας της θερμότητας.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$ για κάθε $t>0$.
3. $\Theta_t = k\Theta_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$

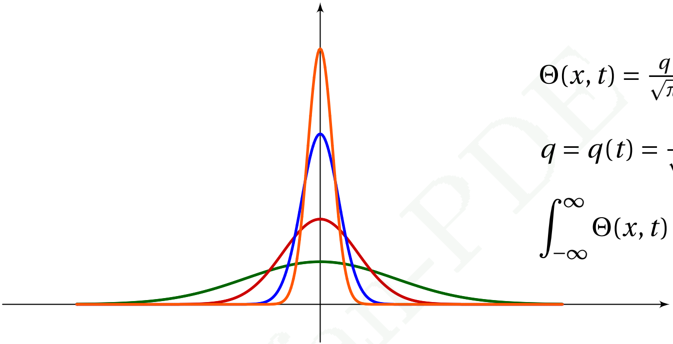
Η Θ λέγεται **θεμελιώδης λύση** της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας. Επιπλέον η λύση (2) του (1) γράφεται ως

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Επειδή για κάθε x είναι $u(x,t) \to \phi(x)$, καθώς $t \to 0+$, ειδικά για $x=0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+} u(0,t) &= \lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y = \phi(0).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει σε γενικότερο υπόβαθρο, βλέπε την άσκηση στην επόμενη διαφάνεια.



$$\Theta(x,t) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{-(qx)^2}$$

$$q = q(t) = \frac{1}{\sqrt{4kt}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$$

Σχήμα: Το γράφημα της $\Theta(\cdot, q)$ για $q=1$, $q=2$, $q=4$, $q=6$.

Άσκηση 1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση η οποία μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-a,a]$, με $a>0$. Δείξτε, δίχως αναφορά στην εξίσωση της διάχυσης-θερμότητας, ότι

$$\lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x,t) f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Η εξίσωση της θερμότητας στην ημιευθεία

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Dirichlet αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, && 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \infty \\ &u(0,t) = 0, && t > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

όπου η ϕ είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση με $\phi(0) = 0$. Η ιδέα είναι να επεκτείνουμε το πρόβλημα σ΄ ολόκληρη την ευθεία τη λύση του οποίου γνωρίζουμε. Ορίζουμε την περιττή επέκταση της ϕ

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής, και στη συνέχεια θεωρούμε το

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_t = k\tilde{u}_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ &\tilde{u}(x,0) = \tilde{\phi}(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{7}$$

Για την λύση $\tilde{u}$ του (7) έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y,t)\tilde{\phi}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{0} -\Theta(x-y,t)\phi(-y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \Theta(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_{0}^{\infty} \Theta(x+y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} \Theta(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{\infty} [\Theta(x-y,t)-\Theta(x+y,t)]\phi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right) \phi(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Η $\tilde{u}$ είναι συνεχής και παρατηρούμε ότι διατηρεί την συμμετρία της $\tilde{\phi}$

$$\tilde{u}(-x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{(-x-y)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(-x+y)^2}{4kt}} \right) \phi(y)\,\mathrm{d}y = -\tilde{u}(x,t)$$

κατά συνέπεια θα είναι $\tilde{u}(0,t)=0$ και η λύση του (6) θα είναι η

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t), \qquad x \geq 0, \quad t > 0. \tag{8}$$

Ορισμός

Η **συνάρτηση σφάλματος** ορίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{erf}(0) = 0$ και $\mathrm{erf}(x) \to 1$, καθώς $x \to \infty$ και ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \ell \\ 0, & |x| \geq \ell \end{cases}$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} \phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{4kt}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{4kt}}\,\mathrm{d}\xi \qquad\qquad s = \frac{x-\xi}{\sqrt{4kt}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x+\ell)/\sqrt{4kt}}^{(x-\ell)/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-\ell)/\sqrt{4kt}}^{(x+\ell)/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{(x+\ell)/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{(x-\ell)/\sqrt{4kt}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x+\ell}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-\ell}{\sqrt{4kt}}\right).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t - ku_{xx} + bu = 0, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

όπου $b > 0$ είναι μια σταθερά.

Γράφουμε την εξίσωση

$$u_t + bu = ku_{xx}$$

και όπως στην περίπτωση των ΣΔΕ αναζητάμε ολοκληρωτικό παράγοντα ο οποίος μετατρέπει το αριστερό μέλος σε t-παράγωγο γινομένου. Έτσι έχουμε

$$e^{bt}u_t + be^{bt}u = ke^{bt}u_{xx} \Leftrightarrow (e^{bt}u)_t = k(e^{bt}u)_{xx}.$$

Θέτοντας $v = e^{bt}u$ η v ικανοποιεί την κλασσική εξίσωση $v_t = kv_{xx}$ και την αρχική συνθήκη

$$v(x,0) = e^0 u(x,0) = u(x,0) = \phi(x),$$

έτσι

$$v(x,t) = e^{bt}u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} \phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} & u_t - ku_{xx} + bt^2 u = 0, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ & u(x,0) = \phi(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

όπου $b > 0$ είναι μια σταθερά.

Άσκηση 3. Για την εξίσωση

$$u_t = ku_{xx} + au_x + bu, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές, χρησιμοποιείστε την αλλαγή μεταβλητής $u = ve^{\lambda x + \mu t}$ για κατάλληλες σταθερές λ και μ ώστε να αναγάγετε την u-εξίσωση στην

$$v_t = kv_{xx}.$$

Το μη ομοιογενές πρόβλημα για την εξίσωση της θερμότητας

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} & u_t = k u_{xx} + f(x,t), && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ & u(x,0) = \phi(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{9}$$

όπου η ϕ είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση και η f μια επίσης συνεχής συνάρτηση. Από τη γραμμικότητα του προβλήματος εξυπακούεται ότι η λύση u του (9) είναι άθροισμα των λύσεων των

$$\begin{aligned} & v_t = k v_{xx} + f(x,t), && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ & v(x,0) = 0, && -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{10}$$

και

$$\begin{aligned} & w_t = k w_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ & w(x,0) = \phi(x), && -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{11}$$

οπότε αρκεί να επιλύσουμε το (10) μιας και η λύση του προβλήματος (11) δίνεται από την (2). Αποδεικνύεται, επαληθεύοντας, ότι η λύση του (10) είναι

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y, t-s) f(y,s) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s. \tag{12}$$

Έτσι η λύση u του αρχικού προβλήματος (9) είναι η

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y, t)\phi(y) \,\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y, t-s) f(y,s) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

♣ Αξίζει να παρατηρήσουμε την ομοιότητα της μορφής της λύσης (13) του (9) με αυτήν του μη ομοιογενούς γραμμικού πρωτοτάξιου ΠΑΤ

$$\begin{aligned} &u' + Au = f(t), \qquad u = u(t) \\ &u(0) = \phi \end{aligned} \tag{14}$$

όπου $\phi =$ σταθ., η οποία είναι

$$u(t) = e^{-tA}\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) \,\mathrm{d}s. \tag{15}$$

Η αντιστοιχία (such a resemblance) είναι η

$$e^{-\tau A}\phi \quad \leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-y, \tau)\phi(y) \,\mathrm{d}y.$$