AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 19

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

9 Δεκεμβρίου 2019

Η εξίσωση της θερμότητας στην ευθεία (συνέχεια)

Στην προηγούμενη διάλεξη δείξαμε, κάπως φορμαλιστικά, ότι η λύση του

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), & -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

είναι η

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4 k t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \, \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα αυτό.

Θεώρημα

Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι μια φραγμένη, συνεχής συνάρτηση. Η u στην (2) είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ημιεπίπεδο $(-\infty,\infty) \times (0,\infty)$, ικανοποιεί την εξίσωση $u_t = k u_{xx}$ και $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \phi(x)$.

Τη συνάρτηση (με παράμετρο y), στην (2), λέμε **πυρήνα της θερμότητας**

$$K(x,t;y) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4 k t}} e^{-\left(\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;y)\mathrm{d}y &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4kt}}e^{-\left(\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s \qquad\qquad \left(s=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Γράφοντας

$$K(x,t;y)=\frac{h(t)}{\sqrt{\pi}}e^{-[h(t)(x-y)]^2}, \qquad h(t)=(4kt)^{-1/2} \tag{4}$$

βλέπουμε ότι ο πυρήνας K έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Επιπλέον ο πυρήνας K ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας, δηλαδή

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t;y)=k\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t;y), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0 \tag{5}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Πράγματι για y σταθερό αλλά τυχαίο υπολογίζουμε

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\pi}K_t &= [h'(t) - 2h^2(t)h'(t)(x-y)^2]e^{-[h(t)(x-y)]^2}\\ \sqrt{\pi}K_x &= -2h^3(t)(x-y)e^{-[h(t)(x-y)]^2}\\ \sqrt{\pi}K_{xx} &= [-2h^3(t) + 4h^5(t)(x-y)^2]e^{-[h(t)(x-y)]^2}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Έτσι η εξίσωση $K_t = kK_{xx}$ ικανοποιείται αν και μόνον αν

$$\begin{aligned} h'(t) - 2h^2(t)h'(t)(x-y)^2 - k[-2h^3(t) + 4h^5(t)(x-y)^2] &= 0\\ h'(t) + 2kh^3(t) - [h'(t) + 2kh^3(t)]2h^2(t)(x-y)^2 &= 0\\ [h'(t) + 2kh^3(t)][1 - 2h^2(t)(x-y)^2] &= 0\end{aligned}$$

η οποία ισχύει αφού

$$h'(t) + 2kh^3(t) = -\frac{1}{2\sqrt{4k}}t^{-3/2} + 4k\frac{1}{2(4k)^{3/2}}t^{-3/2} = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $|\phi(x)| \leq M$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$|u(x,t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x,t;y)\phi(y)|\,\mathrm{d}y \leq M\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;y)\,\mathrm{d}y = M$$

από τις ιδιότητες του K, συνεπώς η u είναι καλά ορισμένη.

1. Για την ύπαρξη των μερικών παραγώγων της u, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, Διάλεξη 10, αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} K}{\partial t^p \partial x^q}(x,t;y)\phi(y) \right| \mathrm{d}y, \qquad p,q \in \mathbb{N}_0 \tag{7}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $t_0 \le t \le t_1$, όπου $t_0 > 0$. Κάθε τάξης μερική παράγωγος της K είναι άθροισμα όρων της μορφής

$$G(x-y,t) = C t^{-(2n-1)/2}(x-y)^m e^{-[h(t)(x-y)]^2},$$

βλέπε (6), όπου $C =$ σταθ. και $n, m \in \mathbb{N}$, και για $|x-y| > 0$

$$\frac{|Ct^{-(2n-1)/2}(x-y)^m|}{e^{[h(t)(x-y)]^2}} \le \frac{|C| t^{-(2n-1)/2}|x-y|^m}{|x-y|^{2\ell}/[\ell!(4kt)^\ell]} = \frac{C_\ell t^{\ell-n+1/2}}{|x-y|^{2\ell-m}}$$

για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$. Έτσι για $2\ell - m > 1$ εκτιμώντας το σχετικό ολοκλήρωμα γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x-y,t)\phi(y)|\,\mathrm{d}y = \left(\int_{|x-y|\le 1} + \int_{|x-y|>1} \right) |G(x-y,t)\phi(y)|\,\mathrm{d}y$$

και στη συνέχεια εκτιμάμε κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά.

Έτσι αφενός

$$\int_{|x-y|\le 1} |G\phi| \le |C| M t^{-n+1/2} \int_{x-1}^{x+1} |y-x|^m \,\mathrm{d}y \le \frac{2|C|M}{m+1} t^{-n+1/2}$$

αφού $e^{-[h(t)(x-y)]^2} \le 1$, και αφετέρου

$$\int_{|x-y|>1} |G\phi| \le 2MC_\ell t^{\ell-n+1/2} \int_{x+1}^{\infty} \frac{1}{(y-x)^{2\ell-m}} \,\mathrm{d}y = \frac{2C_\ell M}{2\ell-m-1} t^{\ell-n+1/2}$$

κατά συνέπεια

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C t^{-(2n-1)/2} (x-y)^m e^{-[h(t)(x-y)]^2} \phi(y)| \,\mathrm{d}y \le (A+Bt^\ell) t^{-n+1/2}$$

με $\ell > (m+1)/2$. Συνεπώς κάθε ολοκλήρωμα (7) συγλίνει.

2. Το ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση είναι συνέπεια του μέρους **1.** της απόδειξης και της (5) αφού

$$u_t - ku_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} (K_t - kK_{xx})(x,t;y)\phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

3. Έστω $x \in \mathbb{R}$ σταθερό, δείχνουμε ότι $|u(x,t) - \phi(x)| \to 0$, καθώς $t \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon/2$ οποτεδήποτε $|x - y| < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) - \phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;y)\phi(y)\,\mathrm{d}y - \phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;y)[\phi(y) - \phi(x)]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{|x-y|<\delta} [\cdots]\,\mathrm{d}y + \int_{|x-y|\geq\delta} [\cdots]\,\mathrm{d}y =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{|x-y|<\delta} K(x,t;y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le 2M \int_{|x-y|\ge\delta} K(x,t;y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2M \int_{|x-y|\ge\delta} \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} e^{-\left(\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2}\,\mathrm{d}y, \qquad \left(\xi = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}\right) \\
&= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{|\xi|\ge \frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \qquad \left(\to 0 \text{ καθώς } t \to 0+\right) \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

για $t < t_0$. Έτσι τελικά βρίσκουμε

$$
|u(x,t) - \phi(x)| \le |I_1| + |I_2| < \epsilon, \qquad t < t_0
$$

όπου $t_0 = t_0(\epsilon)$. □

Παρατήρηση. Για τη λύση u του (1) έχουμε

1. Εάν $m \le \phi(x) \le M$, τότε (βλέπε αρχή της απόδειξης)

$$m \le u(x,t) \le M.$$

2. Αν $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| \mathrm{d}x < \infty$, τότε από την $e^{-[(x-y)/\sqrt{4kt}]^2} \le 1$ έπεται ότι

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| \mathrm{d}x = \frac{C}{\sqrt{\pi 4kt}}$$

κατά συνέπεια $u(x,t) \to 0$, καθώς $t \to \infty$.

3. Αν επίσης $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| \mathrm{d}x < \infty$ τότε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$