AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 17

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2 Δεκεμβρίου 2019

Η μέθοδος της ενέργειας

Ορισμός. Για τη λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \ell \\ &B_0[u] = B_\ell[u] = 0, && t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $B_0[u] = u(0,t)$ ή $B_0[u] = u_x(0,t)$ με ανάλογη έκφραση για την $B_\ell[u]$, ορίζουμε την **ενέργεια** να είναι η ποσότητα

$$E(t) = \int_0^\ell u^2(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Θυμίζουμε ότι η αντίστοιχη έκφραση για τη εξίσωση του κύματος παρέμενε σταθερή ως προς τον χρόνο. Στην περίπτωση της θερμότητας-διάχυσης έχουμε το

Θεώρημα

Η ενέργεια $E(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.

Απόδειξη. Η u είναι ομαλή συνάρτηση κατά συνέπεια παραγωγίζοντας την ενέργεια βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\ell u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\ell 2u(x,t)u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\ell 2ku(x,t)u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x && \text{(από την εξίσωση)} \\
&= 2ku(x,t)u_x(x,t)\Big]_0^\ell - 2k\int_0^\ell u_x^2\,\mathrm{d}x \\
&= -2k\int_0^\ell u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x \le 0 && \text{(από τις συνοριακές συνθήκες)}
\end{aligned}$$

γεγονός που συνεπάγεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα

Αν u είναι λύση του (1), τότε

$$\int_0^\ell u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell \phi^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Πόρισμα

Το πρόβλημα (1) έχει το πολύ μία λύση

Απόδειξη. Αν u_1 και u_2 είναι λύσεις του (1), τότε η $w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας και τις συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον $w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = 0$, επομένως από την (3) βρίσκουμε

$$\int_0^\ell w^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leq 0 \overset{w^2\geq 0}{\Rightarrow} w^2(x,t) = 0 \Rightarrow w(x,t) = 0,$$

κατά συνέπεια $u_1 = u_2$. $\square$

Η αρχή του μεγίστου

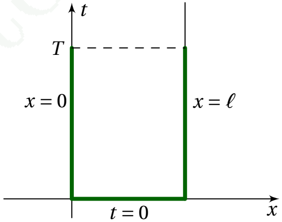
Θεώρημα

Έστω ότι η $u:[0,\ell]\times[0,T]\to\mathbb{R}$, όπου $\ell>0$ και $T>0$, είναι συνεχής συνάρτηση η οποία είναι λύση της εξίσωσης

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

στο $Q_T=(0,\ell)\times(0,T]$. Τότε η μέγιστη τιμή της u στο $\overline{Q}_T=[0,\ell]\times[0,T]$ λαμβάνεται σε κάποια από τις τρεις πλευρές $[0,\ell]\times\{0\}$, $\{0\}\times[0,t]$, $\{\ell\}\times[\ell,t]$.

Οι τρεις αυτές πλευρές αποτελούν το λεγόμενο **παραβολικό σύνορο** $\partial_p Q_T$.



Απόδειξη. Αν το (x_0, t_0) είναι εσωτερικό σημείο στο οποίο η u παίρνει την μέγιστη τιμή της στο $\overline{Q}_T$ τότε είναι

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \qquad u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$$

και από την εξίσωση προκύπτει ότι $u_{xx}(x_0, t_0) = 0$ απ' όπου δεν συνάγεται κάποιο συμπέρασμα.

Βήμα Ι. Αν $v : [0, \ell] \times [0, T] \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την

$$v_t - k v_{xx} < 0 \tag{4}$$

στο $Q_T = (0, \ell) \times (0, T]$, τότε η μέγιστη τιμή της u στο ορθογώνιο $\overline{Q}_T$ λαμβάνεται στο παραβολικό σύνορο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν το (x_0, t_0) είναι εσωτερικό σημείο του Q_T στο οποίο η v παίρνει την μέγιστη τιμή της στο $\overline{Q}_T$, τότε $v_t(x_0, t_0) = 0$ και $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ γεγονός που αντίκειται στην (4). Αν τώρα το μέγιστο λαμβάνεται σε σημείο (x_0, T), τότε αφενός

$$v_t(x_0, T) = \lim_{h \to 0+} \frac{v(x_0, T-h) - v(x_0, T)}{-h} \geq 0$$

και αφετέρου $v_{xx}(x_0, T) \leq 0$ γεγονός που και πάλι αντίκειται στην (4).

Κατά συνέπεια το μέγιστο της v λαμβάνεται σε κάποια από τις τρεις πλευρές του παραβολικού συνόρου.

Βήμα ΙΙ. Έστω M το μέγιστο της u στο παραβολικό σύνορο. Θα δείξουμε ότι

$$u(x,t) \leq M, \qquad 0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Για $\epsilon > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2 \tag{6}$$

η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$v_t - kv_{xx} = (u+\epsilon x^2)_t - k(u+\epsilon x^2)_{xx} = u_t - ku_{xx} - 2\epsilon k = -2\epsilon k < 0 \tag{7}$$

κατά συνέπεια από το Βήμα Ι η v λαμβάνει το μέγιστό της στο παραβολικό σύνορο, όπου από τον ορισμό της θα ισχύει

$$v(x,t) \leq M + \epsilon \ell^2, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T$$

επομένως για την u από την (6) τελικά παίρνουμε

$$u(x,t) \le M + \epsilon(\ell^2 - x^2), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

Επειδή το ϵ είναι τυχόν παίρνουμε την (5). $\square$

Πόρισμα (Η αρχή του ελαχίστου)

Εάν η u ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος, τότε λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο.

Απόδειξη. Η $-u$ ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις κατά συνέπεια λαμβάνει το μέγιστό της στο παραβολικό σύνορο. Το συμπέρασμα προκύπτει από τη σχέση $\max(-u) = -\min u$. $\square$

Άσκηση 1. Χρησιμοποιείστε την αρχή του μεγίστου-ελαχίστου για να δείξτε ότι το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \ell \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, && t > 0, \end{aligned}$$

έχει το πολύ μία λύση.

Σύγκριση λύσεων της εξίσωσης της θερμότητας

΄Ασκηση 2. Αν u και v είναι λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας

$$w_t - k w_{xx} = 0$$

με $u \leq v$ στο παραβολολικό σύνορο $t = 0$, $x = 0$, $x = \ell$, τότε

$$u(x,t) \leq v(x,t), \qquad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0.$$

΄Ασκηση 3. Ας υποθέσουμε ότι

$$u_t - k u_{xx} = f, \qquad v_t - k v_{xx} = g \qquad f \leq g$$

και ότι $u \leq v$, στο παραβολικό σύνορο $t = 0$, $x = 0$, $x = \ell$. Δείξτε ότι

$$u(x,t) \leq v(x,t), \qquad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0.$$