AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 16

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

27 Νοεμβρίου 2019

Παράδειγμα (Ράβδος με άκρα που διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \ell \\ &u(0,t) = T_1, \quad u(\ell,t) = T_2, && t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου T_1 και T_2 είναι σταθερές.

Η φυσική προσέγγιση: Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα η θερμοκρασία της ράβδου θα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, θα είναι δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου, συνεπώς

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = S(x).$$

Η μαθηματική προσέγγιση: Το πρόβλημα είναι γραμμικό επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$u(x,t) = v(x,t) + S(x),$$

όπου η v και S είναι λύσεις κατάλληλων προβλημάτων.

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση και αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&v_t = k(v_{xx} + S''), && 0 < x < \ell, \quad t > 0\\
&v(x,0) + S(x) = \phi(x), && 0 < x < \ell\\
&v(0,t) + S(0) = T_1, \quad v(\ell,t) + S(\ell) = T_2, && t > 0,
\end{aligned}$$

έτσι επιλέγουμε οι S και v να λύνουν τα προβλήματα

$$\begin{aligned}
&S''(x) = 0, \qquad 0 < x < \ell,\\
&S(0) = T_1, \quad S(\ell) = T_2,
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell}x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&v_t = k v_{xx}, && 0 < x < \ell, \quad t > 0\\
&v(x,0) = \phi(x) - S(x), && 0 < x < \ell\\
&v(0,t) = v(\ell,t) = 0, && t > 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

συνεπώς

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k(n\pi/\ell)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}} \tag{4}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} (\phi(x) - S(x)) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left[T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{\ell}x\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, οπότε μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{n\pi}[(-1)^n T_2 - T_1], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Έτσι η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{\ell}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k(n\pi/\ell)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

με τις σταθερές c_n να δίνονται από την (5).

Ερώτημα Ποιες είναι οι υποθέσεις στην ϕ ώστε η σειρά να είναι λύση του προβλήματος;

Σημείωση

Όταν σε μια λεπτή ράβδο με αρχική θερμοκρασία $u_0(x)$ τοποθετήσουμε στα άκρα της από ένα μηχανισμό που διατηρεί το κάθε άκρο, έστω $x = 0$ και $x = \ell$, σε σταθερή θερμοκρασία T_0 και T_1 αντίστοιχα, τότε εν γένει $u_0(0) \neq T_1$ και $u_0(\ell) \neq T_2$ και θα χρειαστεί κάποιο μικρό χρονικό διάστημα ώστε οι αντίστοιχες θερμοκρασίες να εξισωθούν. Και είναι αυτό, το ελαφρά τροποποιημένο φυσικό πρόβλημα, που περιγράφει το μοντέλο με τις συνθήκες συμβατότητας.

Παράδειγμα (Το μη ομοιογενές πρόβλημα Ι)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx} + f(x,t), && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && 0 < x < \ell \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0, && t > 0, \end{aligned} \tag{6}$$

όπου η $f(x,t)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση και η ϕ ικανοποιεί τις συνθήκες $\phi(0) = \phi(\ell) = 0$.

Η λύση του ομοιογενούς προβλήματος ($f = 0$) είναι

$$u_{\text{ομ}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k(n\pi/\ell)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Μιμούμενοι τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων από τις ΣΔΕ αναζητάμε λύση της μορφής

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{7}$$

όπου οι συναρτήσεις w_n πρέπει να προσδιοριστούν. Γράφουμε

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{8}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{9}$$

όπου οι ϕ_n (σταθερές) και f_n (συναρτήσεις του t) είναι οι συντελεστές Fourier της ϕ και f αντίστοιχα, δηλαδή

$$\phi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \qquad f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας όρο προς όρο την u σειρά και αντικαθιστώντας στην εξίσωση θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell} = -k\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 w_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dot{w}_n(t) + k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 w_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell} = 0. \tag{11}$$

Η αρχική συνθήκη ($t = 0$) υλοποιείται ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(0)\sin\frac{n\pi x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[w_n(0) - \phi_n\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell} = 0. \tag{12}$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\sin(n\pi x/\ell)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ αποτελούν ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα από τις (11) και (12) προκύπτει ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ θα πρέπει

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_n(t) + k\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2 w_n(t) = f_n(t), \qquad t > 0\\
&w_n(0) = \phi_n
\end{aligned}$$

επομένως

$$w_n(t) = \phi_n e^{-k(n\pi/\ell)^2 t} + \int_0^t e^{-k(n\pi/\ell)^2(t-s)} f_n(s)\,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

Κατά συνέπεια η λύση του προβλήματος (6) είναι η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\phi_n + \int_0^t e^{k(n\pi/\ell)^2 s} f_n(s)\,\mathrm{d}s\Big] e^{-k(n\pi/\ell)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{14}$$

όπου οι συντελεστές ϕ_n και f_n δίνονται από την (10) για $n = 1, 2, 3, \ldots$

Παράδειγμα (Το μη ομοιογενές πρόβλημα ΙΙ)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, && && 0<x<\ell, \quad t>0 \\ &u(x,0)=0, && && 0<x<\ell \\ &u(0,t)=f(t), && u(\ell,t)=g(t), && t>0, \end{aligned} \tag{15}$$

όπου f και g είναι ομαλές συναρτήσεις με $f(0)=g(0)=0$.

Υποθέτοντας ότι $u(x,t)=X(x)T(t)$ οι συνοριακές συνθήκες γράφονται ως

$$X(0)T(t)=f(t) \qquad \text{και} \qquad X(\ell)T(t)=g(t)$$

όπου δεν παίρνουμε κάποια πληροφορία. Η γραμμικότητα του προβλήματος επιτρέπει να αναζητήσουμε λύση στη μορφή $u(x,t)=v(x,t)+h(x,t)$ ώστε $v(0,t)=0$ και $v(\ell,t)=0$ για κάποια λογική επιλογή h. Έτσι ορίζοντας

$$v(x,t)=u(x,t)-\left[\left(1-\frac{x}{\ell}\right)f(t)+\frac{x}{\ell}g(t)\right]$$

έχουμε $v(0,t)=u(0,t)-f(t)=0$ και $v(\ell,t)=u(\ell,t)-g(t)=0$.

Υπολογίζοντας τις σχετικές μερικές παραγώγους και την αρχική συνθήκη

$$v_t = u_t - \left[\left(1-\frac{x}{\ell}\right)f'(t) + \frac{x}{\ell}g'(t)\right], \qquad v_{xx} = u_{xx}$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \left[\left(1-\frac{x}{\ell}\right)f(0) + \frac{x}{\ell}g(0)\right] = 0$$

αφού $f(0) = g(0) = 0$, και αντικαθιστώντας στο (15) παίρνουμε το v-πρόβλημα

$$\begin{aligned} & v_t = kv_{xx} - \left[\left(1-\frac{x}{\ell}\right)f'(t) + \frac{x}{\ell}g'(t)\right], && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ & v(x,0) = 0, && 0 < x < \ell \\ & v(0,t) = v(\ell,t) = 0, && t > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Το πρόβλημα (16) είναι όπως το (6) με $\phi(x) = 0$, κατά συνέπεια από τις (14) και (10) βρίσκουμε τελικά

$$u(x,t) = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)f(t) + \frac{x}{\ell}g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{k(n\pi/\ell)^2 s}h_n'(s)\mathrm{d}s\right]e^{-k(n\pi/\ell)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

όπου

$$h'(s) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left[\left(1-\frac{x}{\ell}\right)f'(s) + \frac{x}{\ell}g'(s)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x.$$