AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 12

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

11 Νοεμβρίου 2019

vStefan-PDE

Σειρές Fourier σε διάστημα μισής περιόδου

Είδαμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή στο διάστημα $[-\ell, \ell]$ η σειρά Fourier απλοποιείται και καταλήγει να είναι

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, \ldots$$

αν η f είναι άρτια, ενώ αν είναι περιττή

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Μια τυπική όμως συνάρτηση στο διάστημα $[-\ell, \ell]$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, μπορεί ωστόσο να παρασταθεί ως το άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης μέσω της σχέσης

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

γεγονός που δικαιολογεί το πλήρες ανάπτυγμα της f σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων.

VStefan-PDE

Αν η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$, επεκτείνοντάς την κατάλληλα στο $[-\ell,\ell]$ παίρνουμε την αντίστοιχη σειρά συνημιτόνων ή ημιτόνων, μόνο, δηλαδή την **σειρά Fourier σε διάστημα μισής περιόδου**, όπως λέγεται

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, && 0 < x < \ell \\ a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, && n = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

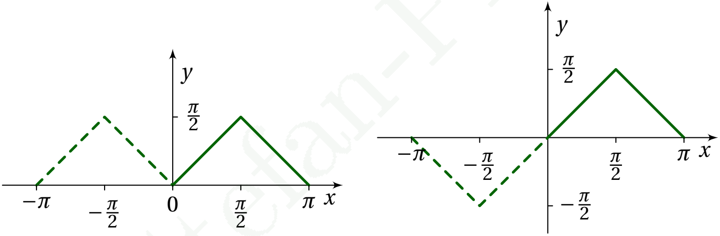
και

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, && 0 < x < \ell \\ b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x, && n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Παράδειγμα (Δ12-01)

Να βρεθούν η σειρά συνημιτόνων και η σειρά ημιτόνων της

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}.$$



Σχήμα: Άρτια και περιττή επέκταση της f.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και η f' είναι τμηματικά συνεχής στο ίδιο διάστημα, επιπλέον είναι $f(0) = f(\pi) = 0$, συνεπώς η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0,\pi]$, όπως και στην άρτια ή περιττή επέκτασή της στο $[-\pi,\pi]$.

Για τη σειρά συνημιτόνων υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(\text{εμβαδόν του τριγώνου}) = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\Big] \\
&= \frac{2}{\pi}\Big\{\Big[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big]_0^{\pi/2} + \Big[\frac{(\pi - x)\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2}\Big]_{\pi/2}^{\pi}\Big\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\Big(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\Big) \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos^2\frac{n\pi}{2}\Big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Επειδή

$$
\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 4k-3 \\ -1, & n = 4k-2 \\ 0, & n = 4k-1 \\ 1, & n = 4k \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & n \neq 4k-2 \\ \dfrac{-8}{n^2\pi}, & n = 4k-2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots
$$

Βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{6^2}\cos 6x + \frac{1}{10^2}\cos 10x + \cdots\right), \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Για τη σειρά ημιτόνων υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{(\pi - x)\cos nx}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

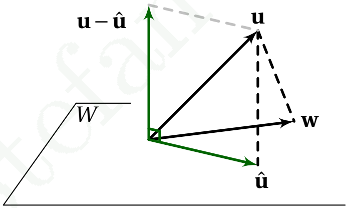
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \cdots\right), \qquad 0 \le x \le \pi.$$

L^2-Θεωρία (στοιχεία)

Ένα πρόβλημα από τη Γραμμική Άλγεβρα. Αν $\mathscr{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, W είναι ένας υπόχωρος του $\mathscr{V}$ πεπερασμένης διάστασης και $\mathbf{u}\in\mathscr{V}$ να βρεθεί η βέλτιστη προσέγγιση του $\mathbf{u}$ από διάνυσμα του W, ισοδύναμα να βρεθεί το

$$\min_{\mathbf{w}\in W}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|.$$

.



Αποδεικνύεται ότι η ελάχιστη απόσταση υλοποιείται από την προβολή $\hat{\mathbf{u}}$ του $\mathbf{u}$ στον W, όπου αν $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση στον W, τότε

$$\hat{\mathbf{u}}=\langle\mathbf{u},\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1+\cdots+\langle\mathbf{u},\mathbf{w}_n\rangle\mathbf{w}_n.$$

Άσκηση 1. Βέλτιστη προσέγγιση. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ μέ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$S_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(c_n \cos nx + c_n' \sin nx \Big), \tag{1}$$

όπου οι συντελεστές c_n, c_n' δεν είναι αναγκαστικά οι συντελεστές Fourier της f ως προς την L^2-μετρική. Ορίζουμε το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** (mean square error) της προσέγγισης να είναι η ποσότητα

$$E_N = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - S_N(x) \Big)^2 \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Δείξτε ότι το σφάλμα E_N ελαχιστοποιείται αν οι συντελεστές c_n, c_n' είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές Fourier της f. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε την συνάρτηση $E_N = E_N(c_0, c_1, c_1', \ldots, c_N, c_N')$ και βρήτε τα ακρότατα της E_N επιλύοντας το σύστημα

$$\frac{\partial E_N}{\partial c_n} = \frac{\partial E_N}{\partial c_n'} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Αν η f είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ και με S_N συμβολίσουμε το N-μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f, τότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ετσι από τον ορισμό των συντελεστών Fourier βρίσκουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2). \tag{3}$$

Με όμοιο τρόπο, λόγω των σχέσεων ορθογωνιότητας, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2). \tag{4}$$

Έτσι έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} [S_N(x)]^2 \, dx$$

ή

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right] \tag{5}$$

Από την τελευταία σχέση επειδή το αριστερό μέλος είναι μη αρνητικό έχουμε

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο από την υπόθεση στην f, έτσι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει, επιπλέον

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx. \tag{6}$$

Η σχέση (6) είναι η **ανισότητα του Bessel**.

Άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bessel είναι το

Θεώρημα (Θεώρημα του Riemann)

Εάν η συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

Από την τριγωνική ανισότητα (Minkowski)

$$\begin{aligned}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2} &\le \left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_N(x)]^2\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2} + \left\{\int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2}\\ &\le \left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_N(x)]^2\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2} + \left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

και το Θεώρημα της L^2-σύγκλισης της σειράς Fourier παίρνοντας το όριο του $N \to \infty$ μέσω της ανισότητας του Bessel προκύπτει, τελικά, η **ταυτότητα του Parseval**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Θεωρία των Sturm-Liouville

Ορισμός

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(p(x)y')' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \qquad a < x < b, \tag{8}$$

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0, \qquad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \tag{9}$$

όπου $p(x) > 0$ και $r(x) > 0$ στο (a, b) και p', q και r είναι συνεχείς στο $[a, b]$, και ένα τουλάχιστον από τα A_1, A_2 και ένα τουλάχιστον από τα B_1, B_2 είναι διάφορο του μηδενός θα το λέμε **πρόβλημα των Sturm-Liouville**.

Η μορφή της εξίσωσης (8) φαίνεται περιοριστική αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Ένα τυπικό γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών δεύτερης τάξης

$$\alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad a < x < b$$

με $\alpha_2(x) > 0$ και $\rho(x) > 0$ στο (a, b) και με α_j και ρ συνεχείς στο $[a, b]$, $j = 0, 1, 2$, μετασχηματίζεται στην (8).

Θέτοντας

$$p(x) = \exp\left(\int \alpha_1(x)/\alpha_2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

και πολλαπλασιάζοντας με $p(x)/\alpha_2(x)$ προκύπτει, με κατάλληλες q και r, η

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0.$$

Είναι πρακτικό να ορίσουμε τον διαφορικό τελεστή L με τη σχέση

$$L[u] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u$$

οπότε η εξίσωση (8) γράφεται ως

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0.$$

Η ταυτότητα του Lagrange. Εάν u και v είναι συναρτήσεις με συνεχείς δεύτερες παραγώγους, τότε

$$uL[v] - vL[u] = u(pv')' + uqv - v(pu')'vqu = (pv'u - pu'v)' = (pW(u,v))'$$

όπου $W(u,v)$ είναι η ορίζουσα του Wronski των u και v.

Παρατήρηση

Αν οι u και v ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (9) τότε η ορίζουσα Wronski στα $x=a$ και $x=b$ είναι ίση με μηδέν. Πράγματι στο $x=a$ είναι

$$W(u,v)(a) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix}$$

και θεωρούμε τις περιπτώσεις:

1. $A_1 = 0$, τότε $u'(a) = v'(a) = 0$, οπότε $W(u,v)(a) = 0$.
2. $A_2 = 0$, τότε $u(a) = v(a) = 0$, οπότε $W(u,v)(a) = 0$.
3. $A_1 A_2 \neq 0$ τότε $u(a) = Au'(a)$, $v(a) = Av'(a)$, όπου $A = -A_2/A_1$, οπότε

$$W(u,v)(a) = A \begin{vmatrix} u'(a) & v'(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Το ίδιο ισχύει και στο άκρο $x=b$. Έτσι

$$W(u,v)(a) = W(u,v)(b) = 0. \tag{10}$$

Θεώρημα

Εάν u και v είναι συναρτήσεις με συνεχείς δεύτερες παραγώγους οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (9), τότε

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\,\mathrm{d}x = 0. \tag{11}$$

Απόδειξη.

Από την ταυτότητα του Lagrange έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b (uL[v] - vL[u])\,\mathrm{d}x &= p(x)W(u,v)(x)\Big]_a^b \\ &= p(b)W(u,v)(b) - p(a)W(u,v)(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

από την Παρατήρηση. □

VStefan-PDE

Θεώρημα

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος Sturm-Liouville (8)-(9) *είναι πραγματικές.*

Απόδειξη.

Αν λ είναι ιδιοτιμή του προβλήματος και ϕ είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση τότε είναι $L[\phi] + \lambda r(x)\phi(x) = 0$ και παίρνοντας τη μιγαδική συζυγή έκφραση θα έχουμε επίσης ότι $L[\bar{\phi}] + \bar{\lambda} r(x)\bar{\phi}(x) = 0$. Έτσι

$$\bar{\phi} L[\phi] - \phi L[\bar{\phi}] + (\lambda - \bar{\lambda}) r(x) |\phi(x)|^2 = 0.$$

Ολοκληρώνοντας και παίρνοντας υπόψη το σχετικό Θεώρημα θα έχουμε

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 r(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

αφού το ολοκλήρωμα είναι θετικό, που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα (Ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων)

Εάν $\lambda \neq \mu$ είναι ιδιοτιμές του προβλήματος Sturm-Liouville (8)-(9) *με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ϕ και ψ τότε*

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)\, r(x) \mathrm{d}x = 0$$

Απόδειξη.

Πολλαπλασιάζοντας τις $L[\phi] + \lambda r(x)\phi(x) = 0$ και $L[\psi] + \mu r(x)\psi(x) = 0$ με ψ και ϕ αντίστοιχα, βρίσκουμε

$$\psi L[\phi] - \phi L[\psi] + (\lambda - \mu) r(x)\phi(x)\psi(x) = 0.$$

Ολοκληρώνοντας και παίρνοντας υπόψη την (11) έχουμε

$$(\lambda - \mu)\int_a^b \phi(x)\psi(x)\, r(x) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_a^b \phi(x)\psi(x)\, r(x) \mathrm{d}x = 0$$

αφού $\lambda \neq \mu$. □

N Stefan - PDE

Θεώρημα

Σε κάθε ιδιοτιμή ενός προβλήματος Sturm-Liouville αντιστοιχεί μία μόνο γραμμικά ανεξάρτητη ιδιοσυνάρτηση, στη περίπτωση αυτή λέμε ότι οι ιδιοτιμές ενός προβλήματος Sturm-Liouville είναι απλές. Επιπλέον οι ιδιοτιμές του προβλήματος αποτελούν μια γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη ακολουθία

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to \infty.$$

Άσκηση 2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις σε κάθε ένα από τα προβλήματα Sturm-Liouville με εξίσωση

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < 1$$

και συνοριακές συνθήκες

1. $y(0) = 0$ και $y(1) = 0$.
2. $y(0) = 0$ και $y'(1) = 0$.
3. $y'(0) = 0$ και $y(1) = 0$.
4. $y'(0) = 0$ και $y'(1) = 0$.
5. $y(0) = 0$ και $y(1) + y'(1) = 0$.

Θεώρημα

Για το πρόβλημα Sturm-Liouville (8)-(9) ας είναι $\phi_1, \phi_2, \ldots$ οι ιδιοσυναρτήσεις κανονικοποιημένες ώστε

$$\int_a^b \phi_n^2(x)\, r(x) \mathrm{d}x = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Έστω ότι η f είναι τμηματικά C^1 στο διάστημα $[a, b]$, τότε η σειρά

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \qquad c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x)\, r(x) \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

συγκλίνει σημειακά στο $f(x)$ σε κάθε σημείο συνεχείας της f στο (a, b) και στο $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$ αν το x είναι σημείο ασυνέχειας της f στο (a, b).

Ορισμός

Η σειρά (12) στο Θεώρημα λέγεται **γενικευμένη σειρά Fourier** της f, ή **σειρά Sturm-Liouville** της f.

V. Stefanidis-PDE

Το περιοδικό Sturm-Liouville πρόβλημα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του **περιοδικού** προβλήματος Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{13}$$

$$y(-1) - y(1) = 0, \qquad y'(-1) - y'(1) = 0. \tag{14}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. $\lambda = -r^2 < 0$ με $r > 0$, τότε $y = Ae^{-rx} + Be^{rx}$.
   $y(-1) = y(1) \Rightarrow Ae^{r} + Be^{-r} = Ae^{-r} + Be^{r} \Rightarrow A = B \Rightarrow y = A(e^{-rx} + e^{rx})$.
   $y'(-1) = y'(1) \Rightarrow Ar(e^{-r} - e^{r}) = Ar(e^{r} - e^{-r}) \overset{r>0}{\Rightarrow} A = 0 \Rightarrow y = 0$.
2. $\lambda = 0$, τότε $y = Ax + B$.
   $y(-1) = y(1) \Rightarrow -A + B = A + B \Rightarrow A = 0$, άρα $y =$ σταθερά.
3. $\lambda = r^2 > 0$ με $r > 0$, τότε $y = A\cos rx + B\sin rx$.
   $y(-1) = y(1) \Rightarrow A\cos r - B\sin r = A\cos r + B\sin r \Rightarrow 2B\sin r = 0$
   $y'(-1) = y'(1) \Rightarrow Ar\sin r + Br\cos r = -Ar\sin r + Br\sin r \Rightarrow 2A\sin r = 0$.
   Έτσι θα είναι $B = 0$ και $r = n\pi$, ή $A = 0$ και $r = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,
   ισοδύναμα $y = \cos n\pi x$, ή $y = \sin n\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Έτσι οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 0, && \phi_0(x) = 1 \\ &\lambda_n = (n\pi)^2, && \phi_n(x) = \cos n\pi x \quad \text{και} \quad \psi_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n = 1,2,3,\dots \end{aligned}$$

Σε κάθε ιδιοτιμή λ_n, $n \geq 1$ αντιστοιχούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις. Κάθε τέτοια ιδιοτιμή λέγεται διπλή. Αν f είναι μια ``καλή΄΄ συνάρτηση, περιοδική περιόδου 2, τότε η γενικευμένη σειρά Fourier της f

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}\phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\phi_n(x) + b_n\psi_n(x)\Big)$$

είναι η συνήθης σειρά Fourier της f.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι ένα πρόβλημα Sturm-Liouville παράγει ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων οι οποίες αναπαριστούν μέσω σειράς μια τμηματικά C^1 ή L^2 συνάρτηση. Επιπλέον το περιοδικό πρόβλημα παράγει το ορθογώνιο σύστημα που γεννά τις συνήθεις σειρές Fourier.