# AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

# Διάλεξη 9

# Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

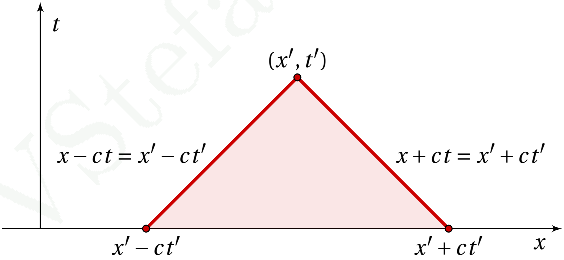
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

30 Οκτωβρίου 2019

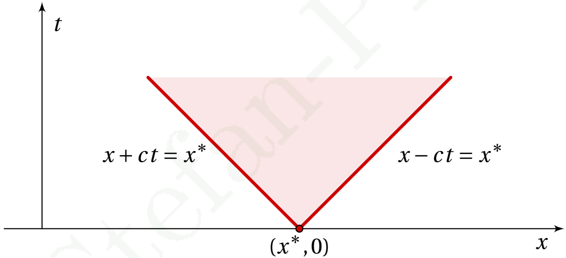
**2.2.2. Εξάρτηση και επιρροή.** Στην έκφραση της λύσης

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\phi(x+ct)+\phi(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

του προβλήματος αρχικών τιμών βλέπουμε ότι σε κάθε σημείο $(x',t')$ με $t'>0$ η λύση εξαρτάται από τις τιμές της $\phi$ στα σημεία $x'\pm ct'$ και μέσω της $\psi$ από εκείνα τα $x$ για τα οποία $x'-ct'\le x\le x'+c't$. Έτσι οποιαδήποτε αλλαγή στα αρχικά δεδομένα εκτός του διαστήματος $|x-x'|\le ct'$ δεν επηρεάζει την τιμή $u(x',t')$. Η σκιασμένη περιοχή λέγεται **περιοχή εξάρτησης** του σημείου $(x',t')$.



Και πάλι από τον τύπο της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών βλέπουμε ότι το σημείο $(x^*, 0)$ επηρεάζει μέσω των αρχικών δεδομένων τις τιμές της λύσης στα σημεία μεταξύ των ευθειών $x \pm ct = x^*$, δηλαδή στα σημεία της σκιασμένης περιοχής. Την περιοχή αυτή ονομάζουμε **περιοχή επιρροής** του σημείου $(x^*, 0)$.




Οι δύο οικογένειες ευθειών $x + ct =$ σταθ. και $x + ct =$ σταθ. λέγονται χαρακτηριστικές ευθείες για την εξίσωση του κύματος.

**΄Ασκηση Δ9-01** Να βρεθεί ο τύπος της εξίσωσης και στη συνέχεια, εφόσον είναι δυνατό, να βρεθεί η λύση της

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

**΄Ασκηση Δ9-02** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του κύματος στην ευθεία

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

όπου $\phi, \psi$ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$.

1. Εάν $\phi$ και $\psi$ είναι περιττές συναρτήσεις δείξτε ότι η λύση του προβλήματος είναι περιττή συνάρτηση του $x$ για όλα τα $t$.
2. Εάν $\phi$ και $\psi$ είναι άρτιες συναρτήσεις δείξτε ότι η λύση του προβλήματος είναι άρτια συνάρτηση του $x$ για όλα τα $t$.
3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αν $\phi(x) = e^x$ και $\psi(x) = \sin x$.

## 2.3. Το πρόβλημα αρχικών τιμών στην ημιευθεία.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση του κύματος στην ημιευθεία

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, && 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && 0 < x < +\infty \\
&u(0,t) = 0 \quad (\text{σσ: Dirichlet}) && t > 0
\end{aligned}$$

όπου $\phi$, $\psi$ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$. Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε ότι $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Έχοντας λύσει το πρόβλημα αρχικών τιμών στην ευθεία επεκτείνουμε κατάλληλα τα αρχικά δεδομένα στο $\mathbb{R}$ και να βρούμε τη λύση ώστε ο περιορισμός της στη θετική ημιευθεία να αποτελέσει τη λύση στο αρχικό πρόβλημα. Ορίζουμε τις περιττές επεκτάσεις

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

Εάν $\tilde{u}$ είναι η λύση της κυματικής εξίσωσης στην ευθεία με αρχικά δεδομένα $\tilde{\phi}$ και $\tilde{\psi}$, τότε

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}(x+ct)+\tilde{\phi}(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{\psi}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

Για $x=0$ είναι

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}(ct)+\tilde{\phi}(-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}\tilde{\psi}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(\phi(ct)-\phi(ct)) = 0,$$

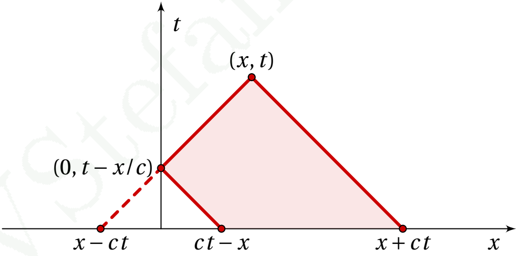
από τον ορισμό των $\tilde{\phi}$ και $\tilde{\psi}$, κατά συνέπεια η $\tilde{u}$ ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη σε ολόκληρη την ευθεία. Μας ενδιαφέρει η λύση για $x>0$. Αν $x-ct>0$ η (1) λύνει το αρχικό πρόβλημα. Έστω $x-ct<0$, τότε

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \frac{1}{2}(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)) + \frac{1}{2c}\Big[\int_{x-ct}^{ct-x}\tilde{\psi}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s\Big] \\ &= \frac{1}{2}(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Έτσι η λύση αρχικού του προβλήματος αρχικών τιμών στην ημιευθεία είναι

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\phi(x+ct)+\phi(x-ct))+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s, & x\geq ct\\ \dfrac{1}{2}(\phi(x+ct)-\phi(ct-x))+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s, & x<ct\end{cases}.$$

Η περιοχή εξάρτησης της λύσης στην περίπτωση όπου $x<ct$ δίνεται στο σχήμα.



**Άσκηση Δ9-03** Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια $C^1$, άρτια συνάρτηση. Δείξτε ότι $\phi'(0) = 0$.

**Άσκηση Δ9-04** Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών στην ημιευθεία

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, && 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && 0 < x < +\infty \\
&u_x(0,t) = 0 \quad \text{(σσ: Neumann)} && t > 0
\end{aligned}$$

όπου $\phi, \psi$ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$.

1. Δείξτε ότι $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ είναι αναγκαίες συνθήκες συμβατότητας για την ύπαρξη ομαλής λύσης.
2. Υποθέτοντας ότι $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ να βρεθεί η λύση του προβλήματος.

## 2.4. Η κυματική εξίσωση με πηγή.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του κύματος στην ευθεία

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), && -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

όπου $\phi$, $\psi$ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$. Δείχνουμε ότι η λύση του προβλήματος είναι

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} f(s,r)\,\mathrm{d}A} \quad (2)$$

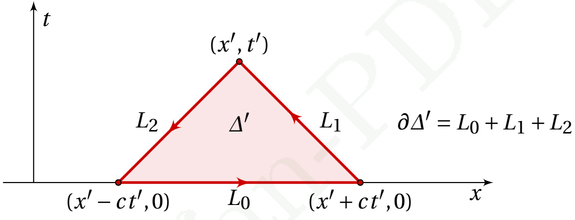
όπου $\Delta$ είναι η χαρακτηριστική τριγωνική περιοχή εξάρτησης του σημείου $(x,t)$.

**Απόδειξη.** Ολοκληρώνοντας την εξίσωση στην περιοχή εξάρτησης $\Delta'$ του σημείου $(x',t')$ ($\Delta' = \Delta'(x',t')$) παίρνουμε

$$\iint_{\Delta'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \iint_{\Delta'} (u_{tt} - c^2 u_{xx})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

και από το Θεώρημα του Green

$$\iint_{\Delta'} (u_{tt} - c^2 u_{xx})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Delta'} (-c^2 u_x\,\mathrm{d}t - u_t\,\mathrm{d}x)$$




Υπολογίζουμε το κάθε τμήμα του επικαμπυλίου ολοκληρώματος ξεχωριστά.

$$\int_{L_0} \cdots = \int_{L_0} -u_t\,\mathrm{d}x = -\int_{x'-ct'}^{x'+ct'} \psi(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{L_1} \cdots = \int_{L_1} (cu_x\mathrm{d}x + cu_t\mathrm{d}t) = c\int_{L_1} \mathrm{d}u = c(u(x', t') - \phi(x' + ct')),$$

αφού στην $L_1$ είναι $x + ct = x' + ct'$, συνεπώς $\mathrm{d}x + c\mathrm{d}t = 0$.

Όμοια

$$\int_{L_2} \cdots = \int_{L_2} (-cu_x \mathrm{d}x - cu_t \mathrm{d}t) = c\int_{-L_2} \mathrm{d}u = c(u(x',t') - \phi(x'-ct')),$$

αφού στην $L_2$ είναι $x - ct = x' - ct'$, συνεπώς $\mathrm{d}x - c\mathrm{d}t = 0$. Έτσι υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \Big(\int_{L_0} + \int_{L_1} + \int_{L_2}\Big)(-c^2 u_x \mathrm{d}t - u_t \mathrm{d}x) \\ &= -\int_{x'-ct'}^{x'+ct'} \psi(x)\mathrm{d}x + 2cu(x',t') - c\phi(x'+ct') - c\phi(x'-ct'),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η ζητούμενη σχέση. □

### Σημείωση

Διαφορετικά, εισάγοντας τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες $\xi = x + ct$ και $\eta = x - ct$, από την εξίσωση $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ παίρνουμε

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = f\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\Big) \Rightarrow u(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta) - \frac{1}{4c^2}\int^{\xi}\int^{\eta} f\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\Big)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi.$$

Βλέπε Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος.