AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 8

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Οκτωβρίου 2019

2.1. Ταξινόμηση ΜΔΕ 2ης τάξης

Η γενική γραμμική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές, σε δύο μεταβλητές έχει τη μορφή

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au = f. \tag{1}$$

Τυπικά και αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων είναι

1. Η εξίσωση του Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
2. Η εξίσωση του κύματος: $u_{xx} - u_{tt} = 0$.
3. Η εξίσωση της θερμότητας: $u_{xx} - u_t = 0$.

Η εξίσωση (1) αντιστοιχεί στη γενική αλγεβρική εξίσωση 2ης τάξης

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0 \tag{2}$$

η οποία με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών (στροφή των αξόνων) ανάγεται σε μία από τις κωνικές τομές

1. Έλλειψη: $b^2(\xi-\xi_0)^2 + c^2(\eta-\eta_0)^2 = 1$.
2. Υπερβολή: $b^2(\xi-\xi_0)^2 - c^2(\eta-\eta_0)^2 = 1$.
3. Παραβολή: $b(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0) = 0$.

Θεώρημα

Με μια γραμμική αλλαγή των μεταβλητών $(x,y) \to (\xi,\eta)$ *και* $U(\xi,\eta) = u(x,y)$*, η εξίσωση στην (1) με* $f = 0$ *μπορεί να αναχθεί σε έναν από τους τρεις τύπους*

1. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ: *Αν* $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$
$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$
2. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ: *Αν* $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$
$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$
3. ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ: *Αν* $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$
$$U_{\xi\xi} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} = 0.$$

Απόδειξη. Η εξίσωση είναι 2ης τάξης συνεπώς είναι $a_{11} \neq 0$, ή $a_{22} \neq 0$, ή $a_{12} \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $a_{11} = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au = 0.$$

Επειδή ο τύπος της εξίσωσης καθορίζεται από τις δεύτερης τάξης παραγώγους μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $a_1 = a_2 = a = 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{12}^2 u_{yy} &= (u_x + a_{12}u_y)_x + a_{12}(u_x + a_{12}u_y)_y \\ &= (\partial_x + a_{12}\partial_y)(\partial_x + a_{12}\partial_y)u \\ &= (\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u \end{aligned}$$

η εξίσωση γράφεται ως

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u = 0. \tag{3}$$

1. Έστω $a_{12}^2 < a_{22}$, θέτουμε $b = (a_{22} - a_{12}^2)^{1/2} > 0$ και ορίζουμε

   $$\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y \quad \& \quad \partial_\eta = b\partial_y \quad \Rightarrow \quad x = \xi \quad \& \quad y = a_{12}\xi + b\eta$$

   οπότε η (3) γίνεται $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$.
2. Έστω $a_{12}^2 > a_{22}$, θέτουμε $b = (a_{12}^2 - a_{22})^{1/2} > 0$ και ορίζουμε

   $$\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y \quad \& \quad \partial_\eta = b\partial_y \quad \Rightarrow \quad x = \xi \quad \& \quad y = a_{12}\xi + b\eta$$

   οπότε η (3) γίνεται $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$.

3. Έστω $a_{12}^2 = a_{22}$, τότε η (3) γίνεται $(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u = 0$. Ορίζοντας, όπως πριν

$$\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y \quad \text{μπορούμε να πάρουμε} \quad x = \xi \quad \& \quad y = a_{12}\xi + \eta$$

οπότε η (3) γίνεται $U_{\xi\xi} = 0$.

Στην περίπτωση τώρα όπου $a_{11} = a_{22} = 0$, η εξίσωση είναι $u_{xy} = 0$ η οποία είναι υπερβολικού τύπου. Πράγματι γράφοντας

$$\partial_x\partial_y = (\partial_\xi + \partial_\eta)(\partial_\xi - \partial_\eta) = \partial_\xi^2 - \partial_\eta^2$$

η αλλαγή μεταβλητών

$$x = \xi + \eta \qquad y = \xi - \eta$$

μετατρέπει την εξίσωση στην $U_{\eta\eta} - U_{\xi\xi} = 0$. □

Παράδειγμα (Δ7-1)

Να προσδιοριστεί ο τύπος καθεμιάς από τις εξισώσεις

1. $u_{xx} - \lambda u_{xy} = 0$, όπου λ είναι μια πραγματική παράμετρος.
2. $4u_x x - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u = 0$.
3. $4u_x x + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u = 0$.

Θεωρούμε την διακρίνουσα (σε αντιστοιχία με το τριώνυμο)

$$\mathscr{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

σημειώνοντας ότι ο συντελεστής της μικτής παραγώγου u_{xy} είναι $2a_{12}$. Έτσι

1. $\mathscr{D} = (-\lambda/2)^2 \geq 0$, οπότε για $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου, ενώ για $\lambda = 0$ είναι παραβολικού τύπου.
2. $\mathscr{D} = 6^2 - (4)(9) = 0$, κατά συνέπεια η εξίσωση είναι παραβολικού τύπου.
3. $\mathscr{D} = 3^2 - (4)(9) < 0$, κατά συνέπεια η εξίσωση είναι ελλειπτικού τύπου.

Παρατήρηση

Αν οι συντελεστές της εξίσωσης είναι συναρτήσεις, τότε και πάλι το πρόσημο της διακρίνουσας καθορίζει τον τύπο της εξίσωσης, αλλά όπως στο Παράδειγμα Δ7-1 η εξίσωση μπορεί να αλλάζει τύπο σε διάφορες περιοχές του επιπέδου. Τυπικό παράδειγμα είναι η εξίσωση του Tricomi

$$u_{yy} - y u_{xx} = 0 \qquad \text{με} \quad \mathscr{D} = y,$$

οπότε είναι ελλειπτική για $y < 0$, υπερβολική αν $y > 0$ και παραβολική αν $y = 0$.

2.2. Η κυματική εξίσωση στην ευθεία

Θεωρούμε την εξίσωση του κύματος σ΄ ολόκληρη την ευθεία

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{4}$$

όπου $c > 0$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. ΄Οπως στην απόδειξη του θεωρήματος γράφοντας την εξίσωση ως

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0$$

και ορίζοντας τις μεταβλητές

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

η κυματική εξίσωση μέσω των

$$\partial_\xi = x_\xi\partial_x + t_\xi\partial_t = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2c}\partial_t = \frac{1}{2c}(\partial_t + c\partial_x)$$
$$\partial_\eta = x_\eta\partial_x + t_\eta\partial_t = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2c}\partial_t = -\frac{1}{2c}(\partial_t - c\partial_x)$$

γίνεται

$$(-2c\partial_\eta)(2c\partial_\xi)U = 0 \qquad \text{ή} \qquad U_{\xi\eta} = 0.$$

Επιλύοντας βρίσκουμε

$$U_\xi = h(\xi) \Rightarrow U = \int h(\xi)\,\mathrm{d}\xi + g(h) = f(\xi) + g(\eta)$$

όπου f και g είναι ομαλές συναρτήσεις. Έτσι στις αρχικές μεταβλητές η λύση της (4) είναι

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)} \tag{5}$$

η οποία παριστάνει δύο κύματα, το ένα κινείται προς την θετική κατεύθυνση και το άλλο προς την αρνητική κατεύθυνση με ταχύτητα c.

2.2.1. Το πρόβλημα αρχικών τιμών στην ευθεία. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του κύματος στην ευθεία

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && -\infty < x < +\infty \end{aligned} \tag{6}$$

όπου ϕ, ψ είναι ομαλές συναρτήσεις και $c > 0$. Η λύση της εξισώσης δίνεται από την (5), επομένως θα πρέπει να ισχύει αφενός

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x) \tag{7}$$

και αφετέρου

$$u_t(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct) \Rightarrow u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) = \psi(x)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ισότητα βρίσκουμε

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s + b \tag{8}$$

Λύνοντας το σύστημα (7) – (8) βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{b}{2}$$

ενώ από την (5) παίρνουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\phi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

έτσι τελικά η

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s.} \tag{9}$$

είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση του κύματος.

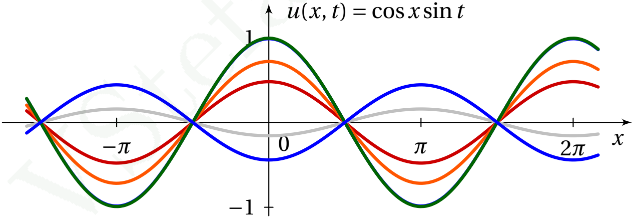
Παράδειγμα

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \cos x, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Από την (9) βρίσκουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos \mathrm{d}s = \frac{1}{2c}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)) = \frac{1}{c}\cos x \sin ct.$$



Σχήμα: Στο σχήμα αποτυπώνονται πέντε διαφορετικά στιγμιότυπα της λύσης, για $c = 1$.

Σημείωση

Η λύση (9) του προβλήματος αρχικών τιμών (6) για την εξίσωση του κύματος αποδείχθηκε από τον d' Alembert το 1746 και αναφέρεται ως τύπος του d' Alembert.

Παρατήρηση (Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα)

Από την (9) έπεται ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών ικανοποιεί τη σχέση

$$|u(x,t)| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |\phi(s)| + t \sup_{s\in\mathbb{R}} |\psi(s)|.$$

Άμεση συνέπεια αυτής της σχέσης είναι ότι αν u και $\tilde{u}$ είναι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών με αντίστοιχα αρχικά δεδομένα ϕ, ψ και $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$, τότε

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |\phi(s) - \tilde{\phi}(s)| + t \sup_{s\in\mathbb{R}} |\psi(s) - \tilde{\psi}(s)|. \tag{10}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη **συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα**.