# AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

# Διάλεξη 7

# Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Οκτωβρίου 2019

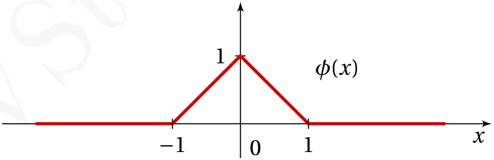
**Άσκηση 1.** Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t + uu_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

- (α΄) Να σχεδιαστεί το διάγραμα των χαρακτηριστικών.
- (β΄) Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης του κύματος.
- (γ΄) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος για όλα τα $t \ge 0$.

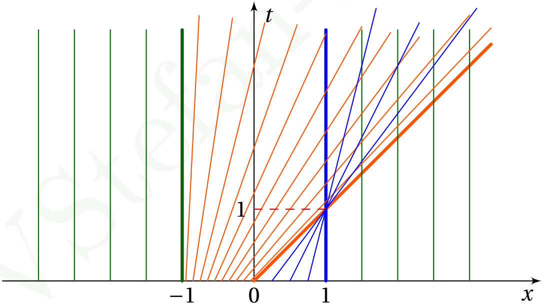


## Λύση

**(α΄)** Οι χαρακτηριστικές ευθείες δίνονται από τη σχέση

$$x = \phi(\xi)\,t + \xi = \begin{cases} \xi, & \xi < -1 \\ (1+\xi)\,t + \xi, & -1 \le \xi \le 0 \\ (1-\xi)\,t + \xi, & 0 \le \xi \le 1 \\ \xi, & \xi > 1 \end{cases} \qquad (1)$$

και αποτυπώνονται στο σχήμα




**Σχήμα:** Οι πορτοκαλί ευθείες περιέχουν το σημείο $(-1,-1)$ και οι μπλέ το $(1,1)$.

**(β΄)** Οι χαρακτηριστικές $x = t$ (της οικογένειας $x = (1+\xi)t + \xi$ για $\xi = 0$), $x = (1-\xi)t+\xi$, για κάθε $\xi \in [0,1]$, και $x = 1$ (της οικογένειας $x = \xi$ για $\xi = 1$), τέμνονται στο σημείο $(1,1)$ ενώ για $t < 1$ κανένα ζευγάρι χαρακτηριστικών δεν τέμνεται. Άρα το $t = 1$ είναι ο χρόνος θραύσης. Το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύεται και από το σχήμα.

**(γ΄)** Για $t < 1$ η λύση είναι σταθερή επάνω σε κάθε χαρακτηριστική, ισοδύναμα $u(x,t) = \phi(\xi)$, έτσι λύνοντας αρχικά την (1) ως προς $\xi$ βρίσκουμε

$$\xi = \begin{cases} x, & x < -1 \\ (x-t)/(1+t), & -1 \le x \le t \\ (x-t)/(1-t), & t \le x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

και στη συνέχεια, για $t < 1$,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ (1+x)/(1+t), & -1 \le x \le t \\ (1-x)/(1-t), & t \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} .$$

Για $t > 1$, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα, τρεις οικογένειες χαρακτηριστικών ευθειών τέμνονται στο εσωτερικό της γωνίας $x = 1$, $x = t$ με $t \geq 1$, κατά συνέπεια για $t > 1$ έχουμε κρουστικό κύμα. Συνεπώς αναζητούμε καμπύλη $x = x(t)$ από το σημείο $(1, 1)$ κατά μήκος της οποίας διαδίδεται η ασυνέχεια του κύματος με ταχύτητα

$$\dot{x} = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{1}{2}\frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{u^+ - u^-} = \frac{u^+ + u^-}{2},$$

όπου

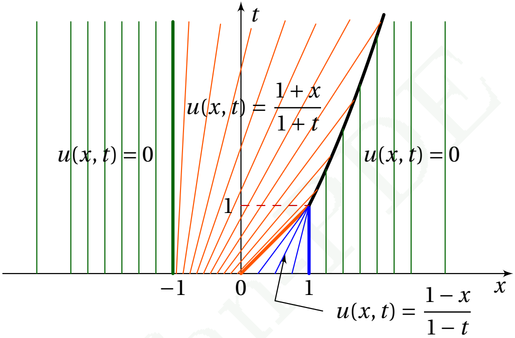
$$u^- = \frac{1+x}{1+t} \quad \& \quad u^+ = 0$$

(γιατί;). Παρατηρούμε ότι η συνθήκη της εντροπίας $u^- > \dot{x} > u^+$ ικανοποιείται, και η ασυνέχεια του κρουστικού κύματος διαδίδεται κατά μήκος της καμπύλης

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{1+x}{1+t}, \qquad x(1) = 1$$

$$\int_1 \frac{2x'\,\mathrm{d}t}{x+1} = \int_1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \Rightarrow \ln(1+x)^2 - \ln 4 = \ln(1+t) - \ln 2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{2(1+t)} - 1.$$




Έτσι η λύση για $t \geq 0$ είναι

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \quad t \geq 0 \\ \dfrac{1+x}{1+t}, & 0 \leq t \leq 1, \quad -1 < x < t \quad \text{ή} \quad t > 1, \quad -1 < x < \sqrt{2(1+t)} - 1 \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & 0 \leq t < 1, \quad t \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1, \quad 0 \leq t < (x+1)^2/2 - 1 \end{cases}$$

**΄Ασκηση 2.** Θεωρούμε την εξίσωση

$$u_t + a(u)\,u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Εάν η $f$ είναι μία ομαλή συνάρτηση δείξτε ότι για να είναι η $u = f(x/t)$ μία μη σταθερή λύση της εξίσωσης θα πρέπει η $f$ να είναι η αντίστροφη της $a$.

**Λύση**

Αν $u = f(x/t)$ τότε,

$$u_x = f'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t}, \qquad u_t = f'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{-x}{t^2},$$

οπότε αν η $u$ είναι λύση της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = u_t + a(u)\,u_t &= -f'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{x}{t^2} + a\Big(f\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big)f'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t} \\ &= f'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t}\Big[a\Big(f\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big) - \frac{x}{t}\Big] \end{aligned}$$

Επειδή η $f(x/t)$ δεν είναι σταθερή θα πρέπει εκεί όπου $f'(x/t) \neq 0$ η σύνθεση της $a$ με την $f$ να είναι η ταυτοτική συνάρτηση, κατά συνέπεια η $f$ θα πρέπει να είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $a$, εκεί όπου αυτή ορίζεται.

**Άσκηση 3.** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t + e^u u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

σε ολόκληρο το θετικό ημιεπίπεδο $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

**Λύση**

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x(t), t)$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

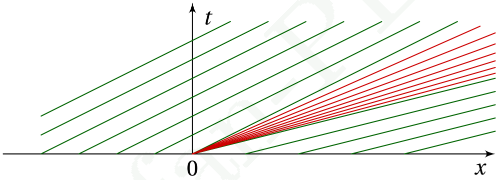
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

με αρχικά δεδομένα για $t = 0$

$$x(0) = \xi, \qquad u(0) = \phi(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Η $u$ είναι σταθερή πάνω στις χαρακτηριστικές κατά συνέπεια $u = \phi(\xi)$, οπότε λύνοντας την $x$-εξίσωση βρίσκουμε

$$x = e^{\phi(\xi)}\,t + \xi = \begin{cases} e\,t + \xi, & \xi < 0 \\ e^2\,t + \xi, & \xi > 0 \end{cases}.$$




**Σχήμα:** Οι χαρακτηριστικές ευθείες και η ``βεντάλια'' των ευθειών $x = \lambda t$, $e \le \lambda \le e^2$ που γεμίζει το ημιεπίπεδο.

Επειδή $u = \phi(\xi)$ και $\xi = x - e^{\phi(\xi)}\,t$ έπεται ότι $u = 1$ αν $\xi = x - e\,t < 0$ και $u = 2$ αν $\xi = x - e^2\,t > 0$, δηλαδή

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < e\,t \\ 2, & x > e^2\,t \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση της $u$ δεν καλύπτει την περιοχή $et < x < e^2 t$ του ημιεπιπέδου $t > 0$. Από την προηγούμενη άσκηση έπεται ότι η

$$\exp^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \ln\frac{x}{t}$$

είναι λύση. Πράγματι

$$\left(\ln\frac{x}{t}\right)_t + e^{\ln(x/t)}\left(\ln\frac{x}{t}\right)_x = \frac{-x/t^2}{x/t} + \frac{x}{t}\frac{1/t}{x/t} = 0.$$

Αν $x = et$, τότε $\ln(x/t) = \ln e = 1$, και αν $x = e^2 t$, τότε $\ln(x/t) = \ln e^2 = 2$, επομένως το αραιωτικό κύμα

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < et \\ \ln\left(\frac{x}{t}\right), & et \le x \le e^2 t \\ 2, & x > e^2 t \end{cases}$$

είναι μία συνεχής (ασθενής) λύση της εξίσωσης στο ημιεπίπεδο $t > 0$.