# AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

## Διάλεξη 5

## Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

14 Οκτωβρίου 2019

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της μη συνέχειας επιλέγοντας σαν μοντέλο την εξίσωση του Burgers

$$u_t + uu_x = 0. \tag{1}$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα για την (1) είναι το

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{2}$$

κατά συνέπεια σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t), t)$ η λύση $u(x(t), t)$ είναι σταθερή, επομένως

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x(t), t) = \text{σταθ.} \tag{3}$$

Κατά συνέπεια

(α') Κάθε χαρακτηριστική καμπύλη είναι ευθεία. Έτσι σε κάθε λύση $u(x, t)$ αντιστοιχεί μία οικογένεια χαρακτηριστικών ευθειών, εν γένει με διαφορετικές κλίσεις.

(β') Η λύση $u(x, t)$ είναι σταθερή πάνω σε κάθε τέτοια ευθεία.

(γ') Η κλίση κάθε τέτοιας ευθείας είναι ίση με την τιμή της $u(x, t)$ πάνω στην ευθεία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ζητάμε τη λύση της (1) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u(x,0)=\phi(x). \tag{4}$$

Από τα (β΄) και (γ΄) έπεται ότι η χαρακτηριστική ευθεία η οποία περνά από το σημείο $(x_1,0)$ έχει κλίση $\phi(x_1)$. Όμοια η χαρακτηριστική ευθεία η οποία περνά από το $(x_2,0)$ έχει κλίση $\phi(x_2)$. Έτσι αν $\phi(x_1)\neq\phi(x_2)$, οι δύο χαρακτηριστικές τέμνονται. Έστω ότι τέμνονται στο $(x_0,t_0)$ με $t_0>0$. Τότε θα πρέπει να είναι $u(x_0,t_0)=\phi(x_1)=\phi(x_2)$, το οποίο είναι αδύνατο.

Ας δούμε τώρα τι μπορούμε να κάνουμε σε ανάλογες περιπτώσεις.

- (α΄) Εάν η $\phi$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $x$, τότε οι χαρακτηριστικές ευθείες δεν τέμνονται για $t\geq 0$ με αποτέλεσμα να μην αντιμετωπίζουμε πρόβλημα πως να ορίσουμε τη λύση στα σημεία τομής.
- (β΄) Στην περίπτωση που οι χαρακτηριστικές τέμνονται μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της λύσης ώστε να επιτρέπονται ασυνέχειες. Έτσι εάν $t_0>0$ είναι η πρώτη χρονική στιγμή όπου τέμνονται χαρακτηριστικές η λύση $u(x,t)$ είναι συνεχής για $t<t_0$ ενώ στο $t=t_0$ συμβαίνει θραύση της λύσης.

Καταλήγοντας σημειώνουμε ότι εάν η χαρακτηριστική περνά από τα σημεία $(x,t)$ και $(\xi,0)$ τότε

$$\frac{x-\xi}{t-0}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,t)=u(\xi,0)=\phi(\xi),$$

οπότε η εξίσωση της χαρακτηριστικής είναι

$$x-\xi=t\phi(\xi). \tag{5}$$

Έτσι η εξίσωση (5) εκφράζει πεπλεγμένα το $\xi$ σαν συνάρτηση του $(x,t)$, η δε λύση $u$ δίνεται από τη σχέση

$$u(x,t)=u(\xi,0)=\phi(\xi)=\phi(\xi(x,t)). \tag{6}$$

Τα ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για την πιο γενική εξίσωση

$$u_t+a(u)u_x=0. \tag{7}$$

όπου $a$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση.

**Παράδειγμα (Δ5-1)**

Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

για όλους τους χρόνους $t \ge 0$.

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

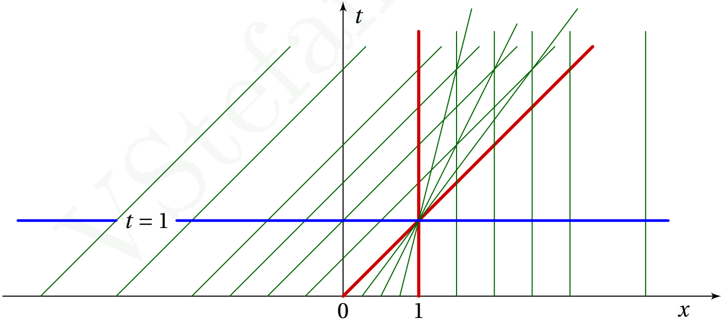
με αρχικά δεδομένα για $t = 0$

$$x(0) = \xi, \qquad u(0) = \phi(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Επάνω σε κάθε χαρακτηριστική είναι $u(x,t) = u(\xi,0) = \phi(\xi)$, και

$$x = \phi(\xi)t + \xi = \begin{cases} t+\xi, & \xi < 0 \\ (1-\xi)t+\xi, & 0 \le \xi \le 1 \\ \xi, & \xi > 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Οι χαρακτηριστικές $x = (1-\xi)t + \xi$ περνούν από το σημείο $(1,1)$, το οποίο επιπλέον είναι το σημείο τομής των χαρακτηριστικών $x = t$ (της οικογένειας $x = t + \xi$ για $\xi = 0$) και $x = 1$ (της οικογένειας $x = \xi$ για $\xi = 1$). Για $t < 1$ κανένα ζευγάρι χαρακτηριστικών δεν τέμνεται. Άρα το $t = 1$ είναι ο χρόνος θραύσης.

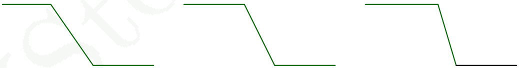


Για $t < 1$ λύνοντας την (8) ως προς $\xi$ έχουμε

$$\xi = \begin{cases} x - t, & x < t \\ \dfrac{x - t}{1 - t}, & t \le x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

Έτσι από την $u = \phi(\xi)$ και τον ορισμό της $\phi$, για $t < 1$, έπεται ότι

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ \dfrac{1 - x}{1 - t}, & t \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$



$u(x, 0.3)$ $u(x, 0.5)$ $u(x, 0.7)$

Στο σχήμα βλέπουμε το γράφημα της $u$ για τρεις διαφορετικές τιμές του $t$. Θα επιστρέψουμε στο παράδειγμα αργότερα για την πλήρη λύση του.

Είδαμε ότι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned} &u_t + a(u)u_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{9}$$

μπορεί να αναπτύσει ασυνέχειες στο θετικό ημιεπίπεδο $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Μια τέτοια ``λύση'' δεν μπορεί να είναι διαφορίσιμη, κατά συνέπεια δεν μπορεί να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με την κλασσική έννοια, δηλαδή σημειακά. Στη συνέχεια θα ορίσουμε λύση του (9) με μία ασθενέστερη έννοια. Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι η $u$ είναι διαφορίσιμη. Εάν $A'(u) = a(u)$, τότε $a(u)u_x = (A(u))_x$ και το πρόβλημα (9) γράφεται

$$\begin{aligned} &u_t + (A(u))_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{10}$$

Έστω $\psi$ να είναι μία $C^1$ συνάρτηση η οποία μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Μία τέτοια συνάρτηση θα τη λέμε **συνάρτηση δοκιμής**.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση στην (10) με μία συνάρτηση δοκιμής $\psi$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + A(u)_x)\,\psi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^\infty u\psi\Big|_{t=0}^\infty \mathrm{d}x - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\psi_t \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty A(u)\psi_x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{11}$$

Υλοποιώντας την αρχική συνθήκη του προβλήματος (10) η σχέση (11) γίνεται

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty \phi(x)\psi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

Ενώ η σχέση (12) προέκυψε με την υπόθεση ότι η λύση $u$ είναι διαφορίσιμη, παρατηρούμε ότι έχει έννοια έστω και αν η $u$ είναι απλά μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

### Ορισμός

Μία συνάρτηση ορισμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε ορθογώνιο $[a, b] \times [0, T]$ θα λέγεται **ολοκληρωτική λύση** ή **ασθενής λύση** του (9) ή (10) εάν ικανοποιεί την (12) για κάθε συνάρτηση δοκιμής.

Ας δούμε τώρα τι πληροφορία για τη λύση $u$ του (9) μπορούμε να πάρουμε από την (12). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $u$ έχει ασυνέχεια κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t) = (x(t), t)$ ενώ είναι ομαλή εκατέρωθεν αυτής, κατά συνέπεια

$$u_t + (A(u))_x = 0$$

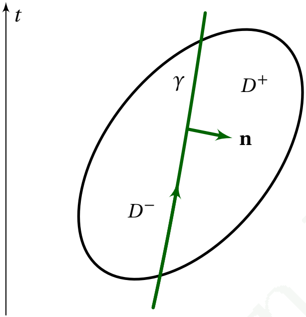
εκτός της $\gamma$. Εάν $\psi$ είναι μία συνάρτηση δοκιμής η οποία μηδενίζεται εκτός μίας περιοχής $G$ της καμπύλης $\gamma$ στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ από την (12) προκύπτει

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint_D \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{13}$$

όπου $D$ ένα χωρίο με ομαλό σύνορο το οποίο περιέχει το $G$. Η $\gamma$ χωρίζει το $D$ σε δύο τμήματα, βλέπε στο Σχήμα. Έστω $D^-$ εκείνο το τμήμα του οποίου το θετικά προσανατολισμένο σύνορο $\partial D$ έχει τον προσανατολισμό της $\gamma$ και έστω $D^+$ το άλλο τμήμα. Τότε η (13) γίνεται

$$\iint_{D^-} \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \iint_{D^+} \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0. \tag{14}$$

Για τον υπολογισμό του καθενός ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της Απόκλισης.




$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), 1)$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(1, -\dot{x}(t))}{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}$$

Για την

$$\mathbf{F} = (A(u), u)\psi = (A(u)\psi, u\psi)$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= ((A(u)\psi)_x + (u\psi)_t \\ &= ((A(u))_x + u_t)\psi + u\psi_t + A(u)\psi_x \\ &= A(u)\psi_x + u\psi_t \end{aligned}$$

εκτός της καμπύλης $\gamma$, αφού η $u$ ικανοποιεί την εξίσωση.

Επειδή η $u$ παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος, τότε για $x = x(t)$ υπάρχουν τα όρια

$$u^-(t) := u(x-, t), \qquad u^+(t) := u(x+, t).$$

Από το Θεώρημα της απόκλισης

$$\iint_{D^-} \operatorname{div} \mathbf{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\partial D^-} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

όπου $\mathbf{n} = (n_x, n_t)$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $D^-$, υπολογίζουμε

$$\iint_{D^-} \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \left(A(u^-)n_x\psi + u^- n_t\psi\right) \mathrm{d}s$$

αφού η $\psi$ μηδενίζεται στο σύνορο του $D$, κατά συνέπεια αφού $\mathbf{n} = (1, -\dot{x})/\|\dot{\gamma}\|$ και $\mathrm{d}s = \|\dot{\gamma}\|\mathrm{d}t$, τελικά βρίσκουμε

$$\iint_{D^-} \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_a^b (A(u^-) - u^-\dot{x})\,\psi\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Όμοια, ένεκα προσανατολισμού βρίσκουμε

$$\iint_{D^+} \left(u\psi_t + A(u)\psi_x\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \left(A(u^+) - u^+\dot{x}\right)\psi\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, (15) και (16), και υπό το πρίσμα της (14) παίρνουμε

$$\int_a^b \left[A(u^-) - A(u^+) - (u^- - u^+)\dot{x}\right]\psi\, dt = 0. \tag{17}$$

Η σχέση (17) ισχύει για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\psi$, κατά συνέπεια θα πρέπει να ισχύει

$$A(u^-) - A(u^+) - (u^- - u^+)\dot{x} = 0$$

κατά μήκος της $\gamma$ (γιατί;), επομένως

$$\frac{A(u^-) - A(u^+)}{u^- - u^+} = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{18}$$

Η σχέση (18) λέγεται συνθήκη άλματος, ή συνθήκη Runkine-Hugoniot και δίνει την κλίση της καμπύλης ασυνέχειας.

**Παράδειγμα (Δ5-1, συνέχεια)**

Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, &&x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), &&x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

όπου $\phi(x) = \cdots$ για όλους τους χρόνους $t \geq 0$.

Η εξίσωση γράφεται

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$$

κατά συνέπεια $A(u) = u^2/2$ και ο χρόνος θραύσης του κύματος είναι $t = 1$. Η συνθήκη άλματος δίνει

$$x' = \frac{0 - 1^2/2}{0 - 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \qquad t \geq 1.$$

Έτσι η ασθενής λύση για όλα τα $t \geq 0$, που ικανοποιεί την συνθήκη άλματος, είναι

$$0 \leq t < 1: \; u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad t \geq 1: \; u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \dfrac{t+1}{2} \\ 0, & x > \dfrac{t+1}{2} \end{cases}$$

Σε σχήμα