

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Περιγραφή:

N διακεκριμένες μονάδες του πληθυσμού, επιλέγουμε ως δείγμα n μονάδες με επανάθεση και μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, υπάρχουν N^n διαφορετικά δείγματα

Ορισμός:

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση (ΤΔΕ) είναι η δειγματοληπτική μέθοδος στην οποία καθένα από τα N^n δείγματα έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής, δηλαδή $1/N^n$.

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Πρόταση 1

Σε ΤΔΕ η πιθανότητα η j μονάδα του πληθυσμού να συμπεριληφθεί στο δείγμα είναι $1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \forall j = 1, \dots, N$

Απόδειξη.

Πρόταση 2

Σε ΤΔΕ

1. Οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες
2. $EX_i = \mu$ και $\text{Var} X_i = \sigma^2$

Απόδειξη.

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Εκτίμηση μέσης τιμής: $\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j$

Ως εκτιμητής του μ θα χρησιμοποιηθεί ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$.

Πρόταση 3

Σε ΤΔΕ

1. Ο $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ είναι ΑΕ του μ
2. $\text{Var} \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ και $\text{ΤΣ}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
3. Ο $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ είναι ΑΕ του σ^2
4. $\hat{\text{Var}}(\bar{X}) = \frac{S^2}{n}$ είναι ΑΕ της $\text{Var} \bar{X}$
5. Ο $\hat{\text{ΤΣ}}(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}}$ είναι εκτιμητής του $\text{ΤΣ}(\bar{X})$
6. ΑΔΕ με σ.ε. $1 - \alpha$ για το μ είναι $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$

Απόδειξη.

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Πρόταση 4 (Σύγκριση ΑΤΔ και ΤΔΕ για την εκτίμηση μέσης τιμής)

Σε ΤΔΕ

1. $MT\bar{\Sigma}_{AT\Delta}(\bar{X}) \leq MT\bar{\Sigma}_{T\Delta E}(\bar{X})$, η ανισότητα ισχύει αυστηρά για $n \geq 2$, δηλαδή η ΑΤΔ είναι πιο ακριβής ΔΜ από την ΤΔΕ για την εκτίμηση της μέσης τιμής
2. Για «μεγάλο» N , $MT\bar{\Sigma}_{AT\Delta}(\bar{X}) \approx MT\bar{\Sigma}_{T\Delta E}(\bar{X})$, δηλαδή και οι δύο ΔΜ παρέχουν την ίδια ακρίβεια για την εκτίμηση της μέσης τιμής

Απόδειξη.

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Εκτίμηση ολικής τιμής: $\tau = \sum_{j=1}^N U_j = N\mu$

Ως εκτιμητής του τ θα χρησιμοποιηθεί ο $\hat{\tau} = N\bar{X}$.

Πρόταση 5

Σε ΤΔΕ

1. Ο $\hat{\tau} = N\bar{X}$ είναι ΑΕ του τ
2. $\text{Var}\hat{\tau} = N^2\text{Var}\bar{X} = N^2\frac{\sigma^2}{n}$ και $\text{TS}(\hat{\tau}) = N\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
3. $\hat{\text{Var}}(\hat{\tau}) = N^2\frac{S^2}{n}$ είναι ΑΕ της $\text{Var}\hat{\tau}$
4. Ο $\hat{\text{TS}}(\hat{\tau}) = N\frac{S}{\sqrt{n}}$ είναι εκτιμητής του $\text{TS}(\hat{\tau})$
5. ΑΔΕ με σ.ε. $1 - \alpha$ για το τ είναι $N\bar{X} \pm z_{\alpha/2}N\frac{S}{\sqrt{n}}$

Απόδειξη.

Τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση

Εκτίμηση ποσοστού: p ειδική περίπτωση μέσης τιμής μ

Ως εκτιμητής του p θα χρησιμοποιηθεί ο $\hat{p} = \bar{X}$.

Πρόταση 6

Σε ΤΔΕ

1. Ο $\hat{p}$ είναι ΑΕ του p
2. $\text{Var}\hat{p} = \frac{p(1-p)}{n}$ και $\text{TS}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
3. Ο $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} \hat{p}(1 - \hat{p})$ είναι ΑΕ του $\sigma^2 = p(1 - p)$
4. $\hat{\text{Var}}(\hat{p}) = \frac{S^2}{n} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$ είναι ΑΕ της $\text{Var}\hat{p}$
5. Ο $\hat{\text{TS}}(\hat{p}) = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}$ είναι εκτιμητής του $\text{TS}(\hat{p})$
6. ΑΔΕ με σ.ε. $1 - \alpha$ για το p είναι $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}$

Απόδειξη.