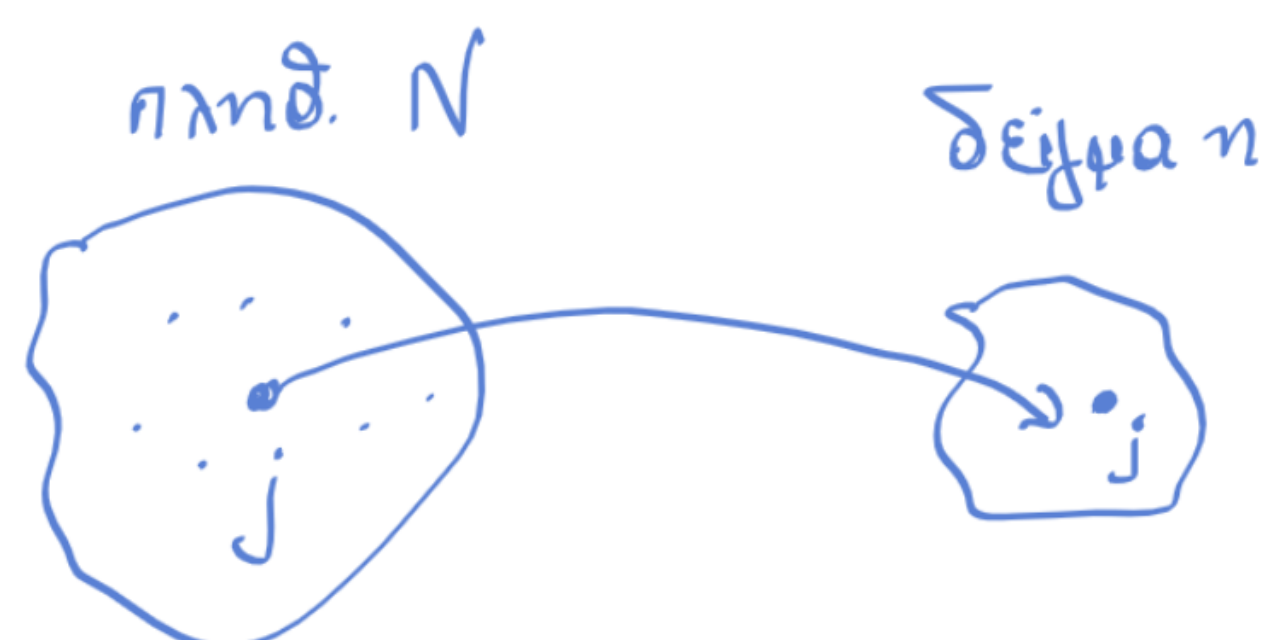


Απλή τυχαία δειγματοληψία

Πρόταση 1 - απόδειξη

$$P(n \text{ } j \text{ μονάδα του πληθ. να συμπεριληφθεί στο δείγμα}) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N} = f$$



αν συμπεριληφθεί η j μονάδα του πληθυσμού στο δείγμα τότε οι υπόλοιπες $n-1$ μονάδες που θα συμπληρώσουν το δείγμα θα επιλεγούν από τις υπόλοιπες $N-1$ μονάδες του πληθυσμού με $\binom{N-1}{n-1}$ τρόπους

Πρόταση 2 - απόδειξη

$$\begin{aligned} \text{Επειδή η } \delta_j \text{ είναι Bernoulli με πιθανότητα "επιτυχίας" } p &= P(\delta_j = 1) \\ &= P(n \text{ } j \text{ μον. του πληθ. να συμπ. στο δείγμα}) \\ &= f \quad \text{από Πρόταση 1} \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς, } E\delta_j = p = f, \quad \text{Var}\delta_j = p(1-p) = f(1-f)$$

$$\text{Τώρα, για } j_1 \neq j_2, \quad \text{Cov}(\delta_{j_1}, \delta_{j_2}) = E(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2}) - E\delta_{j_1} \cdot E\delta_{j_2} = E(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2}) - f^2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως, στην ουσία } \delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2} = \begin{cases} 1, & \text{αν οι μον. } j_1 \text{ και } j_2 \text{ του πληθ. συμπερ. στο δείγμα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } E(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2}) &= 1 \cdot P(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2} = 1) + 0 \cdot P(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2} = 0) = P(\delta_{j_1} \cdot \delta_{j_2} = 1) \\ &= P(\text{οι μον. } j_1 \text{ και } j_2 \text{ του πληθ. συμπερ. στο δείγμα}) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } (1) \xrightarrow{(2)} \text{Cov}(\delta_{j_1}, \delta_{j_2}) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - f^2 = f \left(\frac{n-1}{N-1} - f \right) = -f \frac{N-n}{N(N-1)}$$

$$\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N} = \frac{N(n-1) - n(N-1)}{N(N-1)} = \frac{Nn - N - nN + n}{N(N-1)} = \frac{-N + n}{N(N-1)} = -\frac{N-n}{N(N-1)}, \quad \forall j_1 \neq j_2$$

Πρόταση 3 - απόδειξη

$$\begin{aligned} 1. \quad E\bar{X} &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{j=1}^N \delta_j U_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N U_j E\delta_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N U_j f \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j = \mu, \quad \text{άρα } \bar{X} \text{ ΑΕ του } \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{Var } \bar{X} &= \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^N \delta_j \cdot U_j \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{j=1}^N U_j^2 \text{Var} \delta_j + \sum_{j_1 \neq j_2} U_{j_1} U_{j_2} \text{Cov}(\delta_{j_1}, \delta_{j_2}) \right\} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left\{ f(1-f) \underbrace{\sum_{j=1}^N U_j^2}_{(1)} - f \frac{N-n}{N(N-1)} \underbrace{\sum_{j_1 \neq j_2} U_{j_1} U_{j_2}}_{(2)} \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ομως, } \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (U_j - \mu)^2 \Rightarrow N\sigma^2 = \sum_{j=1}^N (U_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^N U_j^2 - N\mu^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^N U_j^2 = N\sigma^2 + N\mu^2 \quad (2)$$

$$\left(\sum_{j=1}^N U_j \right)^2 = \sum_{j=1}^N U_j^2 + \sum_{j_1 \neq j_2} U_{j_1} U_{j_2} \xRightarrow{(2)} (N\mu)^2 = N\sigma^2 + N\mu^2 + \sum_{j_1 \neq j_2} U_{j_1} U_{j_2}$$

$\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j$

$$\Rightarrow \sum_{j_1 \neq j_2} U_{j_1} U_{j_2} = N(N-1)\mu^2 - N\sigma^2 \quad (3)$$

$$\text{Άρα, } (1) \xRightarrow{(2)} \text{Var } \bar{X} = \frac{1}{n^2} \left\{ f(1-f) N(\sigma^2 + \mu^2) - f \frac{N-n}{N(N-1)} [N(N-1)\mu^2 - N\sigma^2] \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{N-n}{N} (\sigma^2 + \mu^2) - \frac{N-n}{N} \mu^2 + \frac{N-n}{N(N-1)} \sigma^2 \right\} = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} = (1-f) \frac{\sigma_0^2}{n}$$

Πρόταση 4 - απόδειξη

$$1. \quad ES^2 = E \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} E \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n-1} E \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} E\bar{X}^2 \quad (1)$$

$$\text{Ομως, } E \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) = E \left(\sum_{j=1}^N \delta_j U_j^2 \right) = \sum_{j=1}^N U_j^2 E\delta_j = f \underbrace{\sum_{j=1}^N U_j^2}_{\text{δες (2) από Πρόταση 3 - απόδειξη}} = f(N\sigma^2 + N\mu^2) = n(\sigma^2 + \mu^2) \quad (2)$$

$$E\bar{X}^2 = \text{Var } \bar{X} + (E\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{Πρότ. 3}} = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \quad (3)$$

$$\text{Άρα, } (1) \xRightarrow{(2)} ES^2 = \frac{n}{n-1} (\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$2. \quad E \left(\frac{N-1}{N} S^2 \right) = \frac{N-1}{N} ES^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_0^2 = \sigma^2$$

Πρόταση 5 - απόδειξη

$$1. E \hat{\text{Var}} \bar{X} = E \left((1-f) \frac{S^2}{n} \right) = (1-f) \frac{E S^2}{n} = (1-f) \frac{\sigma_0^2}{n} = \text{Var} \bar{X}$$

2. άμεση

3. εφαρμογή γενικής μορφής ΑΔΕ με σ.ε. 1-α.

Πρόταση 6 - απόδειξη

1-6. άμεση

Πρόταση 7 - απόδειξη

$$1. E \hat{p} = E \bar{X} \stackrel{\text{ΑΤΔ}}{=} \mu = p$$

$$2. \text{Var} \hat{p} = \text{Var} \bar{X} = \begin{cases} \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} \\ (1-f) \frac{\sigma_0^2}{n} \end{cases} \stackrel{\sigma^2 = p(1-p)}{=} \frac{N-n}{N-1} \frac{p(1-p)}{n} = (1-f) \frac{1}{n} \underbrace{\frac{N}{N-1}}_{\sigma_0^2} p(1-p)$$

3. άμεση

$$4. \text{Ισχύει } \hat{\text{Var}} \bar{X} = (1-f) \frac{S^2}{n} \text{ ΑΕ της } \text{Var} \bar{X}$$

$$\begin{aligned} \text{Εδώ } \bar{X} = \hat{p} \text{ και } S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right) \stackrel{\text{Εδώ } \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ αφού } X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}}{=} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \bar{X}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} (n \bar{X} - n \bar{X}^2) = \frac{n}{n-1} \bar{X} (1 - \bar{X}) = \frac{n}{n-1} \hat{p} (1 - \hat{p}) \quad (S^2 \text{ ΑΕ του } \sigma_0^2 = \frac{N}{N-1} p(1-p)) \end{aligned}$$

$$\text{οπότε } \hat{\text{Var}} \hat{p} = (1-f) \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1} \text{ ΑΕ της } \text{Var} \hat{p}$$

Σχόλιο. Επειδή $\text{Var} \hat{p} = \frac{N-n}{N-1} \frac{p(1-p)}{n}$ μπορούμε να πάρουμε ως εκτίμησή της $\text{Var} \hat{p}$

τον $\hat{\text{Var}} \hat{p} = \frac{N-n}{N-1} \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ αλλά αυτός δεν είναι ΑΕ όπως ο $\hat{\text{Var}} \hat{p} = (1-f) \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$.

5-6. άμεση