

Ασκήσεις I (ΑΤΔ)

1. Απλό τυχαίο δείγμα 10 οικογενειών επελέγη από ένα πληθυσμό 100 οικογενειών. Ο αριθμός των μελών των οικογενειών του δείγματος ήταν 2, 5, 1, 4, 4, 3, 2, 5, 2, 3.

α. Να εκτιμηθεί ο μέσος αριθμός των μελών ανά οικογένεια καθώς και το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή.

β. Να εκτιμηθεί ο ολικός αριθμός ατόμων του πληθυσμού καθώς και το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή.

2. Ερευνητές ενδιαφέρονται να εκτιμήσουν τον πληθυσμό των caribou (είδος ελαφιού) σε μια περιοχή της Αλάσκας. Η περιοχή έχει πλάτος 286 μίλια και χωρίζεται για το σκοπό της δειγματοληψίας σε 286 λωρίδες πλάτους ενός μιλίου η κάθε μία. Η καταμέτρηση των caribou γίνεται από αέρος με αεροπλάνο, το οποίο πετά κατά μήκος του μέσου της λωρίδας και καταγράφει τον αριθμό των caribou στη συγκεκριμένη λωρίδα. Απλό τυχαίο δείγμα 15 λωρίδων επελέγη και οι αριθμοί των caribou που προέκυψαν ήταν 1, 50, 21, 98, 2, 36, 4, 29, 7, 15, 86, 10, 21, 5, 4.

α. Να εκτιμηθεί ο μέσος αριθμός των caribou ανά λωρίδα και να δοθεί η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος του εκτιμητή.

β. Να εκτιμηθεί το πλήθος των caribou στην περιοχή και να δοθεί 90% ΑΔΕ.

γ. Αγνοώντας το πεπερασμένο μέγεθος του πληθυσμού (των λωρίδων) και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση της διασποράς από το δείγμα των 15 λωρίδων, να βρεθεί το (ελάχιστο) μέγεθος δείγματος που απαιτείται ώστε με πιθανότητα 90% ο πληθυσμός των caribou της περιοχής να εκτιμηθεί με σφάλμα το πολύ 2000 ζώα.

δ. Να απαντηθεί το (γ) λαμβάνοντας υπόψη το πεπερασμένο μέγεθος του πληθυσμού.

3. Σε περιοχή που αποτελείται από 4000 οικογένειες θέλουμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν περισσότερα από δύο παιδιά με τυπικό σφάλμα που να μην υπερβαίνει το 1% και το ποσοστό των οικογενειών στις οποίες εργάζεται η σύζυγος με τυπικό σφάλμα που να μην υπερβαίνει το 2%. Εάν το πρώτο ποσοστό είναι μεταξύ 5% και 10% και το δεύτερο είναι μεταξύ 45% και 65%, ποιο είναι το ελάχιστο μέγεθος δείγματος που απαιτείται ώστε να επιτευχθούν και οι δύο αυτοί στόχοι;

4. Βοτανολόγος επιθυμεί να εκτιμήσει τον αριθμό δένδρων ορισμένου είδους που ζουν σε μια περιοχή. Για το σκοπό της έρευνας η περιοχή χωρίζεται σε 1000 υποπεριοχές. Από προηγούμενη έρευνα έχει εκτιμηθεί ότι η διασπορά του αριθμού των δένδρων ανά υποπεριοχή είναι περίπου $\sigma^2 \approx 45$. Χρησιμοποιώντας ΑΤΔ, τι μεγέθη δείγματος θα πρέπει να επιλεγούν ώστε με πιθανότητα 95% το σφάλμα στην εκτίμηση να είναι

α. το πολύ 500 δένδρα,

β. το πολύ 1000 δένδρα,

γ. το πολύ 2000 δένδρα ;

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα μεγέθη δείγματος αγνοώντας τον διορθωτικό παράγοντα. Τι συμπεραίνετε για τη σημασία του διορθωτικού παράγοντα ;

5 (Εκτίμηση ολικού αριθμού μονάδων πληθυσμού που έχουν κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα). Σε πληθυσμό μεγέθους N , έστω p το ποσοστό των μονάδων του που έχουν κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα και π ο ολικός αριθμός των μονάδων του πληθυσμού με αυτήν την ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\pi = Np$ και τη μεθοδολογία εκτίμησης του p σε ΑΤΔ,

α. να δοθεί ο εκτιμητής του π και να καταγραφούν οι ιδιότητές του (αμεροληψία, διασπορά, τυπικό σφάλμα κλπ.),

β. να βρεθεί το μέγεθος δείγματος που απαιτείται για να εκτιμηθεί το π με σφάλμα το πολύ b και εμπιστοσύνη $1 - \alpha$.

6. Σε ένα έλεγχο κυκλοφορίας όπου μετρούνται οι ταχύτητες οχημάτων, επιθυμούμε να εκτιμήσουμε τη μέση ταχύτητα με επιτρεπτό λάθος $\pm 1 km/h$ και με εμπιστοσύνη 99%. Από μια προκαταρκτική μελέτη βρίσκουμε ότι η τυπική απόκλιση της ταχύτητας είναι $3,58 km/h$. Ο ολικός αριθμός των οχημάτων είναι 1500.

α. Πόσες μετρήσεις χρειαζόμαστε ;

β. Εάν υποθέσουμε ότι έχουν ήδη ληφθεί 150 μετρήσεις, ποια είναι η εμπιστοσύνη με την οποία περιμένουμε το σφάλμα για την εκτίμηση της μέσης τιμής να είναι το πολύ $\pm 1 km/h$;

γ. Να απαντηθούν τα (α) και (β) εάν ο ολικός αριθμός των οχημάτων θεωρηθεί 'μεγάλος';