
Ανασκόπηση μερικών βασικών μεθόδων της Στατιστικής Συμπερασματολογίας

Στη συνέχεια γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση αποτελεσμάτων σχετικά με διαστήματα εμπιστοσύνης και ελέγχους υποθέσεων με εφαρμογή σε κανονικούς πληθυσμούς.

1 Διαστήματα εμπιστοσύνης: εφαρμογές σε κανονικούς πληθυσμούς

Σημειώνεται ότι εάν $L(\underline{X})$, $U(\underline{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $L(\underline{X}) < U(\underline{X})$, τότε το τυχαίο διάστημα $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ λέγεται διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ εάν

$$P(L(\underline{X}) \leq g(\theta) \leq U(\underline{X})) = 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Ερμηνεία: Αν $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$ είναι ένα Δ.Ε. με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%, αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε 100 διαφορετικά δείγματα, $\underline{X} = \underline{x}$, τότε τα 95 από αυτά θα δώσουν διαστήματα της μορφής $[L(\underline{x}), U(\underline{x})]$ τα οποία θα περιέχουν την πραγματική τιμή της $g(\theta)$.

Τα παρακάτω ΔΕ που παρουσιάζονται έχουν συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

1.1 Ένας κανονικός πληθυσμός

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Για τη συνέχεια

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{και} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Δ.Ε. για το μ (σ^2 γνωστό)

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Δ.Ε. για το μ (σ^2 άγνωστο)

$$\left[\bar{X} - t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Δ.Ε. για το σ^2 (μ γνωστό)

$$\left[\frac{1}{\chi_{n, \alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \frac{1}{\chi_{n, 1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right]$$

Δ.Ε. για το σ^2 (μ άγνωστο)

$$\left[\frac{1}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \frac{1}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]$$

Παρατήρηση. Τα παραπάνω ΔΕ είναι ίσων ουρών, ενώ τα δύο πρώτα είναι ταυτόχρονα και ελαχίστου μήκους.

1.2 Δύο ανεξάρτητοι κανονικοί πληθυσμοί

Έστω $X_1, \dots, X_{n_1}$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Για τη συνέχεια

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ (σ_1^2, σ_2^2 γνωστά)

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, σ^2 άγνωστο)

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right],$$

$$\text{όπου } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Δ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 (μ_1, μ_2 γνωστά)

$$\left[\frac{1}{F_{n_1, n_2, \alpha/2}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}, \frac{1}{F_{n_1, n_2, 1-\alpha/2}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \right]$$

$$\text{όπου } \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 \text{ και } \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2.$$

Δ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 (μ_1, μ_2 άγνωστα)

$$\left[\frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right]$$

2 Έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων

Ένα πρόβλημα ελέγχου στατιστικών υποθέσεων έχει την εξής μορφή

$$H_0 : \text{«μηδενική υπόθεση»} \quad \text{κατά} \quad H_1 : \text{«εναλλακτική υπόθεση»}$$

Η απόφαση για την απόρριψη ή αποδοχή της H_0 στηρίζεται σε κάποιο «λογικό κανόνα» ο οποίος λέγεται στατιστικό τεστ ή έλεγχος της H_0 κατά της H_1 .

Κρίσιμη περιοχή του ελέγχου : το σύνολο των δυνατών τιμών (με βάση τον «λογικό κανόνα») για τις οποίες απορρίπτεται η H_0 .

Σφάλμα τύπου I : απόρριψη της H_0 ενώ η H_0 είναι αληθής.

Σφάλμα τύπου II : αποδοχή της H_0 ενώ η H_0 είναι ψευδής (δηλ. η H_1 είναι αληθής).

επίπεδο σημαντικότητας : $\alpha = P(\text{σφάλμα τύπου I})$. Στις εφαρμογές συνήθεις τιμές του ε.σ. είναι $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$.

Ισχύς του ελέγχου όταν η H_1 είναι αληθής : $P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_1 \text{ είναι αληθής})$. Εκφράζει την ικανότητα του ελέγχου να απορρίπτει την H_0 όταν αυτή πρέπει να απορριφθεί. Μεγάλη ισχύς (κοντά στη μονάδα) σημαίνει μεγάλη τέτοια ικανότητα.

p-τιμή (p-value) : Το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο απορρίπτεται η H_0 . Αυτό σημαίνει ότι για δοθέν ε.σ. α , έχουμε ενδείξεις από τα δεδομένα μας να απορρίψουμε την H_0 αν η παρατηρούμενη p-τιμή (δηλ. αυτή που προκύπτει από τα δεδομένα) είναι μικρότερη από το α .

Στη συνέχεια δίνονται εφαρμογές σε κανονικούς πληθυσμούς.

2.1 Ένας κανονικός πληθυσμός

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Στη συνέχεια δίνονται έλεγχοι για το μ και το σ^2 , αντίστοιχα, ενώ τα μ_0 και σ_0^2 είναι δεδομένες (γνωστές) τιμές.

Για το μ

σ^2 γνωστό (z-τεστ)	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu > \mu_0$ ($\leq$)	$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha$
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu < \mu_0$ ($\geq$)	$Z < -z_\alpha$
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$ Z > z_{\alpha/2}$

σ^2 άγνωστο (t-τεστ)	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu > \mu_0$ ($\leq$)	$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} > t_{n-1, \alpha}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu < \mu_0$ ($\geq$)	$t < -t_{n-1, \alpha}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$ t > t_{n-1, \alpha/2}$

Για το σ^2

μ γνωστό	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ($\leq$)	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 > \sigma_0^2 \frac{\chi_{n, \alpha}^2}{n}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ($\geq$)	$\hat{\sigma}^2 < \sigma_0^2 \frac{\chi_{n, 1-\alpha}^2}{n}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\hat{\sigma}^2 < \sigma_0^2 \frac{\chi_{n, 1-\alpha/2}^2}{n}$ ή $\hat{\sigma}^2 > \sigma_0^2 \frac{\chi_{n, \alpha/2}^2}{n}$

μ άγνωστο	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ($\leq$)	$S^2 > \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, \alpha}^2}{n-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ($\geq$)	$S^2 < \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, 1-\alpha}^2}{n-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$S^2 < \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}{n-1}$ ή $S^2 > \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}{n-1}$

2.2 Δύο ανεξάρτητοι κανονικοί πληθυσμοί

Έστω $X_1, \dots, X_{n_1}$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ τυχαίο δείγμα από κανονική κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Στη συνέχεια δίνονται έλεγχοι για το $\mu_1 - \mu_2$ και το σ_1^2/σ_2^2 , αντίστοιχα, ενώ τα μ_0 και σ_0^2 είναι δεδομένες (γνωστές) τιμές. Στην πράξη συνήθως $\mu_0 = 0$ (οπότε $H_0 : \mu_1 = \mu_2$) και $\sigma_0^2 = 1$ (οπότε $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$).

Για το $\mu_1 - \mu_2$

σ_1^2, σ_2^2 γνωστά	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\leq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\geq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$ Z > z_{\alpha/2}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2, \sigma^2$ άγνωστο	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\leq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2, \alpha}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\geq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$t < -t_{n_1+n_2-2, \alpha}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$ t > t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$

Όταν σ_1^2, σ_2^2 είναι άγνωστα και άνισα μεταξύ τους, το πρόβλημα κατασκευής ελέγχου για το $\mu_1 - \mu_2$ παρουσιάζει τεχνικές δυσκολίες και αναφέρεται ως πρόβλημα Behrens-Fisher. Μία προσεγγιστική λύση δίνεται με το **Welch's t-test**. Για

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\leq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{\nu, \alpha}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \stackrel{=}{(\geq)} \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$t < -t_{\nu, \alpha}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ κατά $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$ t > t_{\nu, \alpha/2}$

Για το σ_1^2/σ_2^2

μ_1, μ_2 άγνωστα	Κρίσιμη περιοχή (απόρριψη της H_0)
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \stackrel{=}{(\leq)} \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \sigma_0^2$	$\mathcal{F} = \frac{S_1^2}{S_2^2} > \sigma_0^2 \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \stackrel{=}{(\geq)} \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \sigma_0^2$	$\mathcal{F} < \sigma_0^2 \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \sigma_0^2$ κατά $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$	$\mathcal{F} < \sigma_0^2 \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}$ ή $\mathcal{F} > \sigma_0^2 \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$

3 Σύνδεση διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχων υποθέσεων

Εάν I είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης για μία παράμετρο θ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$, τότε ένας «λογικός» έλεγχος της $H_0 : \theta = \theta_0$ κατά της $H_1 : \theta \neq \theta_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας α μπορεί να γίνει απορρίπτοντας την H_0 εάν $\theta_0 \notin I$ (ή ισοδύναμα, η $H_0 : \theta = \theta_0$ γίνεται δεκτή εάν $\theta_0 \in I$).

Για παράδειγμα, έστω το Δ.Ε. για το μ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Τότε για τον έλεγχο της $H_0 : \mu = \mu_0$ κατά της $H_1 : \mu \neq \mu_0$ είναι λογικό να απορρίψουμε την H_0 (υπέρ της H_1) εάν η τιμή μ_0 δεν ανήκει στο παραπάνω Δ.Ε., δηλαδή εάν $|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)|/\sigma > z_{\alpha/2}$.