

Εισαγωγή στην Άλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Εξέταση 7-6-2018

Θέμα 1ο.

Έστω \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών και $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

A. Δείξτε ότι $a + b\sqrt{2} = 0, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = b = 0$.

B. Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι αριθμησιμο σύνολο

Γ. Αν $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}$ δείξτε ότι

(α) $x, y \in G \Rightarrow xy \in G$

(β) Το G εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ομάδα.

Θέμα 2ο.

Να βρεθεί η τάξη των στοιχείων

A. $[2], [3]$ στην προσθετική ομάδα $(\mathbb{Z}_8, +)$,

B. $[2]$ στην πολλαπλασιαστική ομάδα (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) , όπου $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 - \{[0]\}$.

Θέμα 3ο.

A. Δείξτε ότι το 8 διαιρεί τον ακέραιο $2 \cdot 11^n - 2 \cdot 3^n + 16$ για κάθε φυσικό αριθμό n .

B. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $66x + 27y = 6$

Θέμα 4ο.

A. Να γραφεί στην μορφή $a + ib$ ο μιγαδικός $z = (-1 + \sqrt{3}i)^{110}$

B. Ποιός ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{Arg}(2z - i) = \frac{\pi}{4}.$$

Θέμα 5ο.

Έστω X, Y μη κενά σύνολα και $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι επί του Y αν και μόνο αν για κάθε $B \subseteq Y, B \neq Y$ ισχύει $f^{-1}(B) \neq X$.

Όλα τα θέματα και όλα τα υποερωτήματα είναι ισοδύναμα.

=====

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία