ΦΥΣΙΚΗ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ε.Ε. 2023-2024

Διδάσκοντες: Σ. ΚΟΣΙΩΝΗΣ, Ε. ΠΑΣΠΑΛΑΚΗΣ, και Ι. ΘΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

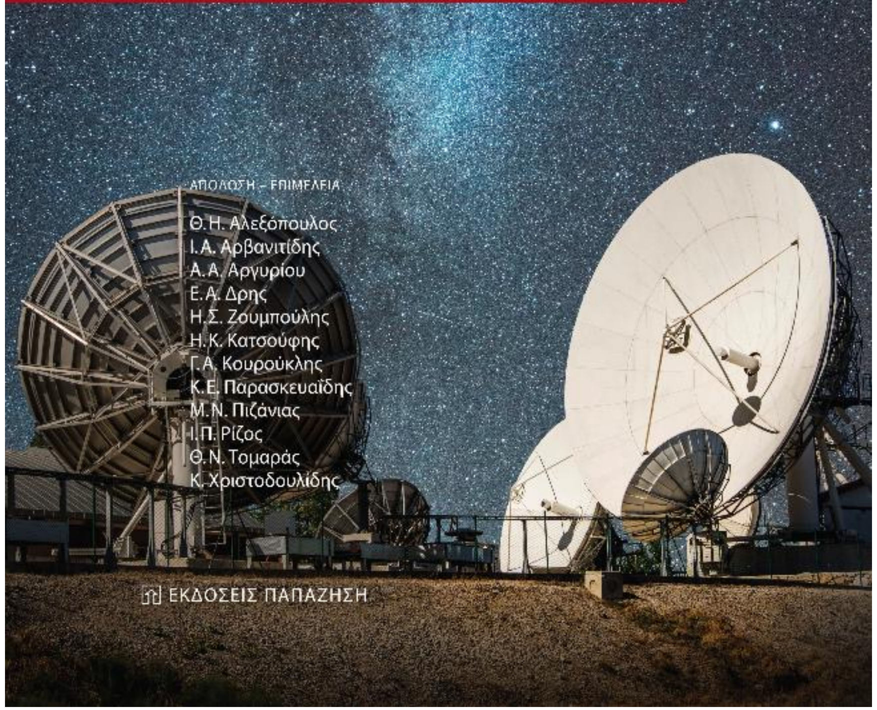
4η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΜΕ QR CODE ΒΙΝΤΕΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

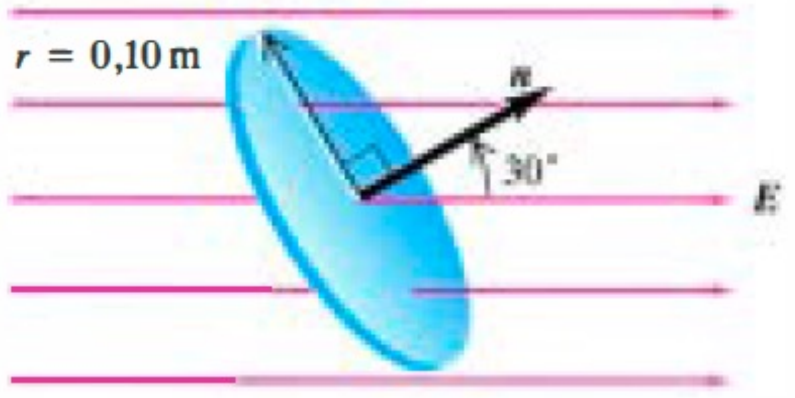


ΑΠΟΔΟΣΗ – ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Θ. Η. Αλεξόπουλος
Ι. Α. Αρβανιτίδης
Α. Α. Αργυρίου
Ε. Α. Δρης
Η. Σ. Ζουμπούλης
Η. Κ. Κατσούφης
Γ. Α. Κουρούκλης
Κ. Ε. Παρασκευαΐδης
Μ. Ν. Πιζάνιας
Ι. Π. Ρίζος
Θ. Ν. Τομαράς
Κ. Χριστοδουλίδης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ

Ηλεκτρική ροή δια μέσου ενός δίσκου Ένας δίσκος με ακτίνα 0,10 m προσανατολίζεται έτσι ώστε το μοναδιαίο του διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ να σχηματίζει γωνία 30° ως προς ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ μέτρου $2{,}0 \times 10^3$ N/C (Σχ. 23–3). a) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου του δίσκου; b) Πόση είναι η ολική ροή δια μέσου του δίσκου αν στραφεί έτσι ώστε το επίπεδό του να είναι παράλληλο προς το $\boldsymbol{E}$; c) Πόση είναι η ολική ροή δια μέσου του δίσκου αν η κάθετη σε αυτόν είναι παράλληλη προς το $\boldsymbol{E}$;



23–3 Η ηλεκτρική ροή Φ_E δια μέσου ενός δίσκου εξαρτάται από την γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κάθετης σε αυτό $\boldsymbol{n}$ και του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$.

ΛΥΣΗ a) Το εμβαδόν είναι $A = \pi(0{,}1\ \text{m})^2 = 0{,}0314\ \text{m}^2$.

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\ \text{N/C})(0{,}0314\ \text{m}^2)(\cos 30^\circ)$$
$$= 54\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

b) Η κάθετη στο δίσκο είναι τώρα κάθετη στο $\boldsymbol{E}$, έτσι $\phi = 90^\circ$, $\cos\phi = 0$ και $\Phi_E = 0$.

c) Η κάθετη στον δίσκο είναι παράλληλη στο $\boldsymbol{E}$, έτσι $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\ \text{N/C})(0{,}0314\ \text{m}^2)(1)$$
$$= 63\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

Ηλεκτρική ροή διαμέσου ενός κύβου

Φανταστική κυβική επιφάνεια ακμής L βρίσκεται σε περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή διαμέσου κάθε έδρας του κύβου και την ολική ροή διαμέσου του κύβου, όταν ο κύβος (a) προσανατολιστεί έτσι ώστε δύο πλευρές να είναι κάθετες στο πεδίο $\boldsymbol{E}$, όπως φαίνεται στο **Σχ. 22.8a**· (b) στραφεί κατά γωνία θ ως προς κατακόρυφο άξονα (Σχ. 22.8b).

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το Σχ. 22.8a δείχνει τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ μέχρι $\hat{\boldsymbol{n}}_6$ για κάθε έδρα· κάθε μοναδιαίο διάνυσμα κατευθύνεται από την κλειστή επιφάνεια του κύβου προς τα έξω. Η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{E}$ και $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ είναι 180°, η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{E}$ και $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ είναι 0°, και η γωνία μεταξύ του $\boldsymbol{E}$ και καθενός από τα άλλα τέσσερα μοναδιαία διανύσματα είναι 90°. Κάθε έδρα έχει εμβαδόν L^2 και επομένως οι ροές διαμέσου κάθε επιφάνειας είναι

$$\Phi_{E1} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2 \cos 180° = -EL^2$$

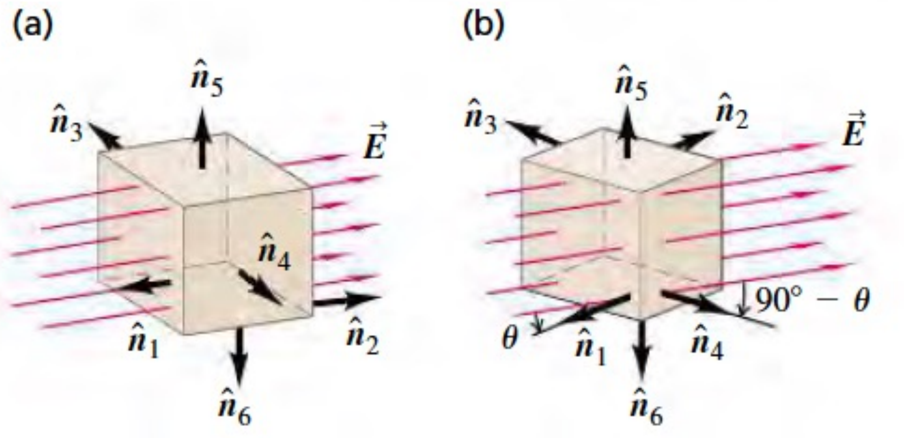
$$\Phi_{E2} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 A = EL^2 \cos 0° = +EL^2$$

$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0$$

Η ροή είναι αρνητική στην έδρα 1, στην οποία το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται προς το εσωτερικό του κύβου, και θετική στην έδρα 2, στην οποία το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό του κύβου. Η *ολική* ροή διαμέσου του κύβου είναι

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$
$$= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

22.8 Ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ διαμέσου κιβωτίου σχήματος κύβου ακμής L σε δύο προσανατολισμούς.



(b) Το πεδίο $\boldsymbol{E}$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 1 και 3, επομένως οι ροές διαμέσου των εδρών 1 και 3 είναι αρνητικές· το $\boldsymbol{E}$ σχηματίζει οξεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 2 και 4, επομένως οι ροές διαμέσου των εδρών 2 και 4 είναι θετικές. Υπολογίζουμε κάθε ροή ξεχωριστά

$$\Phi_{E1} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2 \cos(180° - \theta) = -EL^2 \cos\theta$$

$$\Phi_{E2} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 A = +EL^2 \cos\theta$$

$$\Phi_{E3} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_3 A = EL^2 \cos(90° + \theta) = -EL^2 \sin\theta$$

$$\Phi_{E4} = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_4 A = EL^2 \cos(90° - \theta) = +EL^2 \sin\theta$$

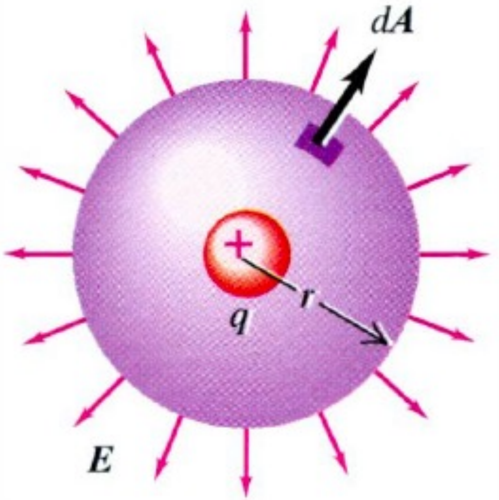
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90° = 0$$

Η ολική ροή $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου είναι και πάλι μηδέν.

https://videos.papazissi.gr/EX22_2/

Ηλεκτρική ροή δια μέσου σφαίρας Ένα θετικό φορτίο ίσο προς 3,0 μC περιβάλλεται από μία σφαίρα ακτίνας 0,2 m, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με την θέση του φορτίου (Σχ. 23–4). Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή δια μέσου της σφαίρας, η οποία οφείλεται στο φορτίο.

ΛΥΣΗ Σε οποιοδήποτε σημείο πάνω στη σφαίρα το μέτρο του $\boldsymbol{E}$ είναι



23–4 Ηλεκτρική ροή δια μέσου σφαίρας με κέντρο το φορτίο.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{3{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(0{,}20\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 6{,}75 \times 10^5\ \mathrm{N/C}.$$

Για λόγους συμμετρίας το πεδίο είναι κάθετο στην σφαιρική επιφάνεια σε κάθε σημείο. Θεωρούμε ως θετική φορά για το $\boldsymbol{n}$ και το $E_\perp$ τη φορά προς τα έξω , έτσι $E_\perp = E$ και η ροή δια μέσου μιας στοιχειώδουςεπιφάνειας dA είναι $E\,dA$. Στην Εξ. (22.5), το E είναι το ίδιο σε κάθε σημείο και μπορεί να θεωρηθεί σταθερό στην ολοκλήρωση. Ό,τι απομένει είναι το ολοκλήρωμα $\int dA$, το οποίο είναι ίσο προς το ολικό εμβαδόν $4\pi r^2$ της σφαιρικής επιφάνειας. Επομένως η ολική ροή προς τα έξω δια μέσου της σφαίρας είναι

$$\Phi_E = EA = (6{,}75 \times 10^5\ \mathrm{N/C})(4\pi)(0{,}20\ \mathrm{m})^2$$
$$= 3{,}4 \times 10^5\ \mathrm{N \cdot m^2/C}.$$

Να σημειωθεί, οτι η ακτίνα της σφαίρας δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό αυτό. θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα με σφαίρα ακτίνας 2,0 m ή 200 m. Υπάρχει ικανοποιητική εξήγηση γι’ αυτό, όπωςθα δούμε σύντομα.

Γενική μορφή του νόμου του Gauss

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια περικλείει όχι μόνο ένα σημειακό φορτίο, αλλά περισσότερα φορτία q_1, q_2, q_3... Το ολικό (συνιστάμενο) ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε κάθε σημείο είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων $\boldsymbol{E}$ των μεμονωμένων φορτίων. Ονομάζουμε $Q_{εγκ}$ το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια: $Q_{εγκ} = q_1 + q_2 + q_3 + ...$ Επίσης, ονομάζουμε $\boldsymbol{E}$ το ολικό πεδίο στη στοιχειώδη επιφάνεια $d\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{E}_\perp$ την κάθετη συνιστώσα του $\boldsymbol{E}$ στο επίπεδο του στοιχείου αυτού (δηλαδή κάθετο στο $d\boldsymbol{A}$).

Νόμος του Gauss:

$$\Phi_E = \underbrace{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}}_{} = \frac{Q_{εγκ}}{\epsilon_0} \qquad (22.8)$$

Ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια

Ηλεκτρική ροή διαμέσου της κλειστής επιφάνειας εμβαδού A = επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{E}$

Ηλεκτρική σταθερά

Η ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας είναι ίση με το ολικό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας διαιρεμένο με ϵ_0.

Διάφορες μορφές του νόμου του Gauss:

Μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$

Συνιστώσα του $\boldsymbol{E}$ κάθετη στην επιφάνεια

Ολικό φορτίο περικλειόμενο από την επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi\, \underbrace{dA}_{} = \oint E_\perp \underbrace{dA}_{} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \underbrace{d\boldsymbol{A}}_{} = \frac{Q_{εγκ}}{\epsilon_0} \qquad (22.9)$$

Ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας

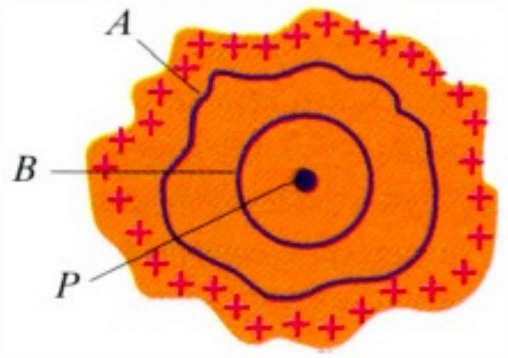
Γωνία μεταξύ $\boldsymbol{E}$ και καθέτου στην επιφάνεια

Στοιχειώδες εμβαδόν επιφάνειας

Διανυσματικό στοιχειώδες εμβαδόν

Ηλεκτρική σταθερά

Εντοπισμός περίσσειας φορτίου σε στερεό αγωγό Όταν περίσσεια φορτίου τοποθετηθεί σε έναν συμπαγή αγωγό και αποκατασταθεί ισορροπία, το φορτίο εγκαθίσταται εξ ολοκλήρου πάνω στην *επιφάνεια*, όχι στο εσωτερικό του υλικού. Ακολουθεί η απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ηλεκτροστατική κατάσταση (φορτία σε ηρεμία) το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε κάθε σημείο στο εσωτερικό ενός αγώγιμου υλικού είναι μηδέν. Αν το $\boldsymbol{E}$ *δεν* ήταν μηδέν, τα φορτία θα εκινούντο. Ας υποθέσουμε, ότι κατασκευάζουμε μία γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό του αγωγού, όπως η επιφάνεια A στο Σχ. 23–9. Επειδή $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ παντού πάνω σε αυτή την επιφάνεια, ο νόμος του Gauss απαιτεί, το ολικό φορτίο στο εσωτερικό της να είναι μηδέν. Ας φανταστούμε τώρα, ότι η επιφάνεια συρρικνώνεται μέχρις ότου η περιοχή που περικλείει να γίνει τόσο μικρή, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σημείο· τότε το φορτίο στο σημείο αυτό πρέπει να είναι μηδέν. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την διαδικασία αυτή οπουδήποτε στο εσωτερικό του αγωγού, έτσι *δεν μπορεί να υπάρξει φορτίο σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε αγωγό.* Επομένως οποιαδήποτε περίσσεια φορτίου σε στατική κατάσταση σε στερεό αγωγό πρέπει να κείται στην επιφάνειά του, όπως φαίνεται στο Σχ. 23–9.



23–9 Υπό ηλεκτροστατικές συνθήκες, οποιαδήποτε περίσσεια φορτίου κείται εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια του στερεού αγωγού.

Πεδίο μιας φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας Τοποθετούμε φορτίο q σε μία συμπαγή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο έξω από τη σφαίρα.

ΛΥΣΗ γνωρίζουμε ότι όλα τα φορτία βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της σφαιρικής συμμετρίας για να δείξουμε ότι το φορτίο πρέπει να είναι κατανεμημένο *ομοιόμορφα* πάνω σε όλη την επιφάνεια και ότι η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο P έξω από τη σφαίρα πρέπει να συμπίπτει με την *ακτινική* ευθεία μεταξύ του κέντρου και του σημείου P.

Ο ρόλος της συμμετρίας χρειάζεται προσεκτικότερη συζήτηση. Όταν λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, εννοούμε ότι μπορούμε να το περιστρέψουμε κατά οποιαδήποτε γωνία γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο. Το σύστημα μετά την περιστροφή δεν εμφανίζεται διαφορετικό από το σύστημα πριν από την περιστροφή. Δεν υπάρχει τίποτε στο σύστημα που να ξεχωρίζει μία διεύθυνση ή προσανατολισμό στον χώρο από κάποιον άλλο. Το φορτίο είναι ελεύθερο να κινείται πάνω στον αγωγό και δεν υπάρχει τίποτε στον αγωγό, το οποίο θα ανάγκαζε περισσότερο φορτίο να συγκεντρωθεί επιλεκτικά σε κάποιες περιοχές από ό,τι σε άλλες. Αν δεν ήταν ομοιόμορφο, τότε κατά την περιστροφή του συστήματος, η σφαίρα θα φαινόταν η ίδια αλλά η κατανομή του φορτίου θα φαινόταν διαφορετική. Δεν υπάρχει ιδιότητα της σφαίρας, που να μπορεί να οδηγήσει σε κάτι τέτοιο. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η κατανομή του επιφανειακού φορτίου πρέπει να είναι ομοιόμορφη.

Ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι το πεδίο πρέπει να είναι ακτινικό. Αν και πάλι περιστρέψουμε το σύστημα, η διάταξη του πεδίου του συστήματος που περιστράφηκε πρέπει να ταυτίζεται με αυτήν του αρχικού συστήματος. Αν το πεδίο είχε μία συνιστώσα σε κάποιο σημείο, που ήταν κάθετη στην ακτινική διεύθυνση, αυτή η συνιστώσα θα έπρεπε να είναι διαφορετική τουλάχιστον μετά από κάποιες περιστροφές. Έτσι δεν μπορεί να υπάρξει τέτοια συνιστώσα και το πεδίο πρέπει να είναι *ακτινικό*. Για τον ίδιο λόγο το μέτρο E του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο. Επομένως το μέτρο E είναι το ίδιο για όλα τα σημεία πάνω σε μία σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα r, ομόκεντρη με τον αγωγό.

Θεωρούμε σαν γκαουσιανή επιφάνεια μία φανταστική σφαίρα με ακτίνα r μεγαλύτερη από την ακτίνα R της αγώγιμης σφαίρας. Το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας είναι $4\pi r^2$. Το E είναι ομογενές πάνω στη σφαίρα και είναι κάθετο σε αυτή σε κάθε σημείο. Το ολοκλήρωμα στον νόμο του Gauss δίνει $E(4\pi r^2)$ οπότε η Εξ. (22.8) δίνει

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,.$$

Αυτή η έκφραση του πεδίου σε κάθε σημείο *έξω* από την σφαίρα είναι η ίδια με αυτή για σημειακό φορτίο. Αυτό δείχνει ότι το πεδίο που προκαλείται από την φορτισμένη σφαίρα είναι το ίδιο με αυτό που θα εδημιουργείτο αν το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της. Ακριβώς έξω από τη σφαίρα, όπου $r = R$,

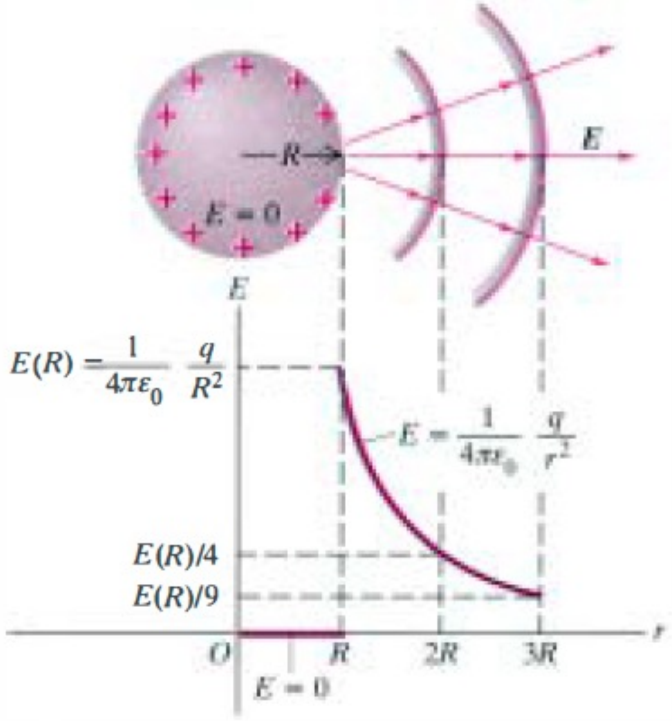
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

Στο εσωτερικό της σφαίρας, όπως και σε οποιοδήποτε στερεό αγωγό όταν τα φορτία είναι σε ηρεμία, το πεδίο είναι μηδέν. Έτσι όταν r είναι μικρότερο από R, $E = 0$. Το Σχ. 23–10 δείχνει το E σαν συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας. Να σημειωθεί επίσης, ότι στο όριο καθώς $R \to 0$ η σφαίρα γίνεται σημειακό φορτίο. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στον νόμο του Coulomb από τον νόμο του Gauss.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για έναν αγώγιμο σφαιρικό φλοιό (ένα σφαιρικό αγωγό με μία ομόκεντρη σφαιρική κοιλότητα στο κέντρο) αν δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό της κοιλότητας. Θεωρούμε μία σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα r μικρότερη από την ακτίνα της κοιλότητας. Αν υπήρχε πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας, θα έπρεπε να παρουσιάζει σφαιρική (ακτινική) συμμετρία όπως πριν, έτσι $E = Q_{encl}/4\pi\epsilon_0 r^{2}$. Αλλά αυτή τη φορά $Q_{encl} = 0$, έτσι E πρέπει να είναι επίσης μηδέν.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ίδια τεχνική για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ μιας φορτισμένης σφαίρας και μιας ομόκεντρης κοίλης σφαιρικής σφαίρας, που την περιβάλλει;

Επειδή οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν επίσης την εξάρτηση $1/r^2$, υπάρχει ένας νόμος του Gauss για την βαρύτητα. Επιχειρήματα όμοια με αυτά στη συζήτηση αυτή μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν, ότι η *βαρυτική* αλληλεπίδραση οποιασδήποτε σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μάζας, σε οποιοδήποτε σημείο έξω από την κατανομή, είναι η ίδια ως αν ολόκληρη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο. Αυτός είναι ο λόγος, για τον οποίο μπορούμε να αντιμετωπίζουμε σώματα με σφαιρική συμμετρία σαν σημεία, όταν υπολογίζουμε βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.



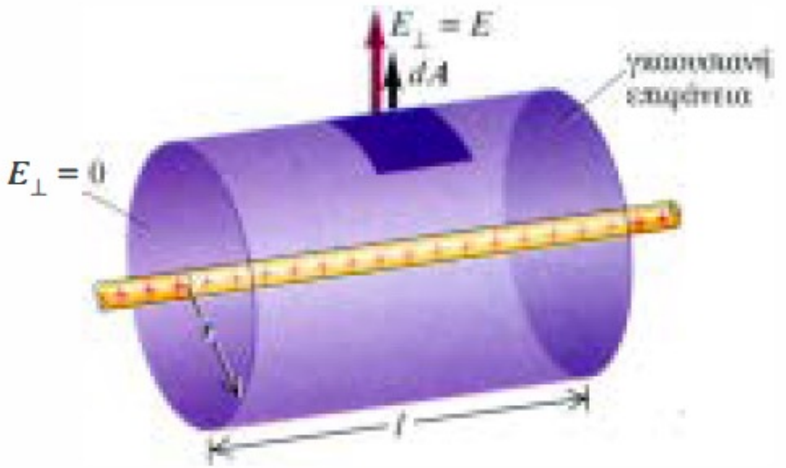
23–10 Υπό ηλεκτροστατικές συνθήκες το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό μιας συμπαγούς αγώγιμης σφαίρας είναι μηδέν. Έξω από τη σφαίρα, το ηλεκτρικό πεδίο εξασθενεί όπως το $1/r^2$, ως αν η περίσσεια φορτίου ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο.

Πεδίο γραμμικού φορτίου Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος ενός σύρματος πολύ μεγάλου μήκους. Το φορτίο *ανά μονάδα μήκους* είναι λ. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο;

ΛΥΣΗ Ποια είναι η συμμετρία; Μπορούμε να περιστρέψουμε το σύστημα κατά οποιαδήποτε γωνία γύρω από τον άξονά του και μπορούμε επίσης να το μετατοπίσουμε κατά οποιαδήποτε απόσταση κατά μήκος του άξονα. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα που προκύπτει δεν διαφοροποιείται από το αρχικό.

συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο δεν αλλάζει όταν εφαρμοστεί οποιαδήποτε από τις παραπάνω διαδικασίες. Το πεδίο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλη προς το σύρμα. Αν είχε, θα έπρεπε να υπάρχει κάτι που να διακρίνει το ένα άκρο του σύρματος από το άλλο· και δεν υπάρχει. Επιπλέον το πεδίο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη σε κύκλο του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στο σύρμα με το κέντρο του στο σύρμα. Αν υπήρχε, θα έπρεπε να εξηγηθεί γιατί η συνιστώσα κατευθύνεται κατά την μία φορά γύρω από το σύρμα και όχι κατά την άλλη. Τί απομένει; Μόνο η συνιστώσα που κατευθύνεται ακτινικά. Έτσι αν το σύρμα είναι πολύ μακρύ και δεν είμαστε κοντά σε οποιοδήποτε από τα άκρα του, τότε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου έξω από το σύρμα είναι *ακτινικές* και βρίσκονται πάνω σε επίπεδα κάθετα προς το σύρμα. Το *μέτρο* του πεδίου πρέπει να εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση από το σύρμα.

Αυτές οι ιδιότητες συμμετρίας του πεδίου υποδεικνύουν να χρησιμοποιήσουμε σαν μία γκαουσιανή επιφάνεια έναν *κύλινδρο* με αυθαίρετη ακτίνα r και αυθαίρετο μήκος l με τις βάσεις του κάθετες στο σύρμα (Σχ. 23–11). Το ολικό φορτίο μέσα στην γκαουσιανή επιφάνεια είναι $Q_{encl} = \lambda l$. Αναλύουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ένα ολοκλήρωμα για κάθε βάση του κυλίνδρου και σε ένα για την παράπλευρη επιφάνεια. Τα $\boldsymbol{E}$ και $d\boldsymbol{A}$ στις βάσεις είναι κάθετα μεταξύ τους και έτσι δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα. Για λόγους συμμετρίας, το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια και παράλληλο προς το $d\boldsymbol{A}$ σε κάθε σημείο της, επομένως το $E = E_\perp$ είναι το ίδιο παντού στην παράπλευρη επιφάνεια. Το εμβαδό αυτής της επιφάνειας είναι $2\pi rl$. (Για να κατασκευαστεί ένας χάρτινος κύλινδρος με ακτίνα r και ύψος l απαιτείται ένα ορθογώνιο χαρτί με πλάτος $2\pi r$, ύψος l και άρα εμβαδού $2\pi rl$.) Από την Εξ. (22.8) προκύπτει



23–11 Η ομοαξονική κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον εξωτερικό χώρο ενός φορτισμένου σύρματος μεγάλου μήκους.

$$(E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

Να σημειωθεί, ότι παρόλο που *ολόκληρο* το φορτίο στο σύρμα συμβάλλει στο πεδίο $\boldsymbol{E}$, μόνο το μέρος του ολικού φορτίου που βρίσκεται μέσα στην γκαουσιανή επιφάνεια λαμβάνεται υπ' όψη κατά την εφαρμογή του νόμου του Gauss. Αυτό μπορεί να φαίνεται περίεργο· φαίνεται σαν να έχουμε κατά κάποιο τρόπο καταλήξει στη σωστή απάντηση αγνοώντας μέρος του φορτίου και ότι το πεδίο ενός σύρματος μικρού μήκους l θα ήταν το ίδιο με αυτό ενός σύρματος μεγάλου μήκους. Αλλά όμως *συμπεριλαμβάνουμε* ολόκληρο το φορτίο στο σύρμα, όταν κάνουμε χρήση της *συμμετρίας* του προβλήματος. Αν το σύρμα είναι μικρού μήκους, η συμμετρία σε σχέση με την μετατόπιση κατά μήκος του άξονα δεν υφίσταται και το πεδίο δεν έχει σταθερό μέτρο πάνω στη γκαουσιανή επιφάνεια. Ο νόμος του Gauss δεν είναι πλέον χρήσιμος και το πρόβλημα αντιμετωπίζεται καλύτερα χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb,

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια τη μέθοδο για να δείξουμε ότι το πεδίο σε σημεία έξω από έναν ομοιόμορφα φορτισμένο κύλινδρο είναι το ίδιο ως αν το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο κατά μήκος του άξονά του. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ του φορτισμένου κυλίνδρου και ενός ομοαξονικού κοίλου αγώγιμου κυλίνδρου που τον περιβάλλει.

https://videos.papazissi.gr/EX22_6/

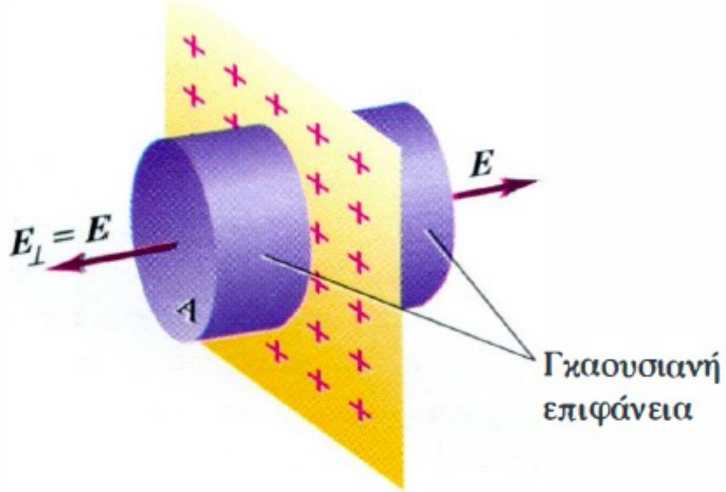
Πεδίο επίπεδου φύλλου φορτίου απείρων διαστάσεων Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα μεγάλο ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο φύλλο αν το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι σ.

ΛΥΣΗ Χρησιμοποιούμε την γκαουσιανή επιφάνεια που φαίνεται στο Σχ. 23–12, έναν κύλινδρο με τον άξονά του κάθετο στο φύλλο του φορτίου με εμβαδόν βάσης A. Η κατανομή του φορτίου δεν αλλάζει αν ολισθήσουμε τον κύλινδρο προς οποιαδήποτε διεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο. Από αυτό συμπεραίνουμε, ότι σε κάθε σημείο το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Από τη συμμετρία του προβλήματος το πεδίο έχει το ίδιο μέτρο E σε οποιαδήποτε απόσταση από την κάθε μία πλευρά της επιφάνειας και έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο με φορά προς το εξωτερικό του φύλλου του φορτίου (αν η σ είναι θετική). Επειδή το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο επίπεδο, είναι παράλληλο προς την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου και το $E_\perp$ είναι μηδέν στην επιφάνεια αυτή. Σε κάθε βάση του κυλίνδρου το $E_\perp$ είναι ίσο προς E. Το ολοκλήρωμα στον νόμο του Gauss απλοποιείται σε $2EA$. Το ολικό φορτίο μέσα στην γκαουσιανή επιφάνεια είναι σA. Ο νόμος του Gauss (Εξ. (22.8) δίνει

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{και} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Το πεδίο είναι ομογενές και κάθετο προς το επίπεδο. Το μέτρο του είναι *ανεξάρτητο* από την απόσταση από το φύλλο. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι επομένως ευθείες παράλληλες και ομοιόμορφα κατανεμημένες.

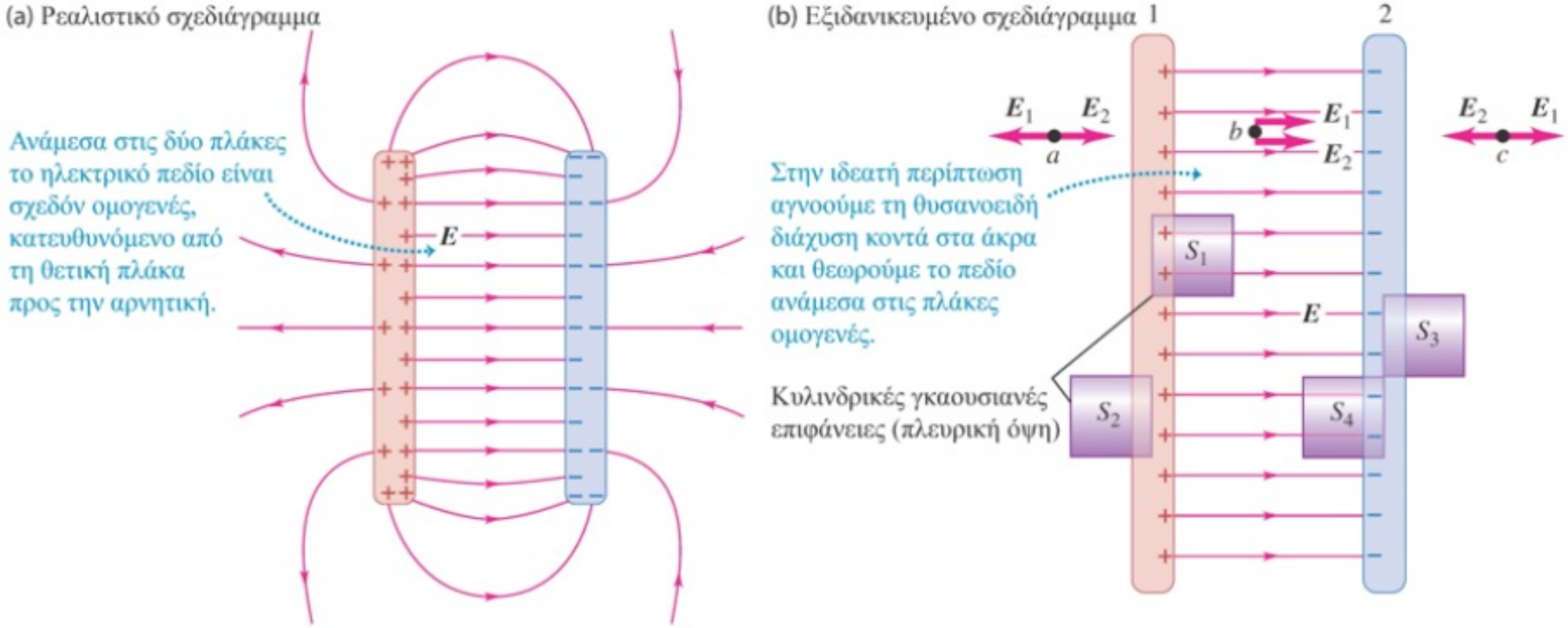
Οι υποθέσεις ότι το φύλλο είναι απείρων διαστάσεων και ότι έχει μηδενικό πάχος είναι εξιδανικεύσεις. Τίποτε στη φύση δεν είναι πραγματικά απείρων διαστάσεων ή μηδενικού πάχους. είναι μία καλή προσέγγιση για σημεία που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια (σε σύγκριση με τις διαστάσεις) και όχι κοντά στα άκρα του φύλλου. Στα σημεία αυτά το πεδίο θεωρείται σχεδόν ομογενές και κάθετο στο επίπεδο.



23–12 Γκαουσιανή επιφάνεια με σχήμα κυλίνδρου για την εύρεση του πεδίου ενός απείρων διαστάσεων επίπεδου φύλλου φορτίου.

Ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο αντίθετα φορτισμένων παράλληλων πλακών

22.21 Ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα σε αντίθετα φορτισμένες παράλληλες πλάκες.



Πεδίο μεταξύ παράλληλων αγώγιμων πλακών με αντίθετα φορτία Δύο μεγάλες παράλληλες αγώγιμες πλάκες φορτίζονται με ίσα και αντίθετα φορτία. Το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι $+\sigma$ για τη μία και $-\sigma$ για την άλλη. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ των πλακών.

ΛΥΣΗ

. Επειδή αντίθετα φορτία έλκονται, τα περισσότερα φορτία συγκεντρώνονται στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Ένα μικρό ποσό φορτίου εγκαθίσταται στις εξωτερικές επιφάνειες των πλακών και υπάρχει μιά θυσανοειδής διάχυση του πεδίου κοντά στα άκρα. Αν οι πλάκες είναι πολύ μεγάλες σε σύγκριση με την μεταξύ τους απόσταση, η διάχυση γίνεται αμελητέα εκτός παρά μόνο πολύ κοντά στα άκρα. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε, ότι το πεδίο είναι ομογενές στον χώρο μεταξύ των πλακών και ότι τα φορτία κατανέμονται ομοιόμορφα στις απέναντι επιφάνειες.

Το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο οφείλεται σε δύο φύλλα φορτίου με αντίθετα πρόσημα. Στα σημεία a και c καθεμία από τις συνιστώσες $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ έχει μέτρο $\sigma/2\epsilon_0$, αλλά έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και το συνιστάμενο πεδίο είναι μηδέν. Αυτό ισχύει επίσης και σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του υλικού κάθε πλάκας, σύμφωνα με την απαίτηση ότι με φορτία σε στατική κατάσταση δεν μπορεί να υπάρξει πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού. Σε οποιοδήποτε σημείο b μεταξύ των πλακών οι συνιστώσες έχουν την ίδια φορά. Το συνιστάμενο πεδίο είναι

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Το πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας

$$Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho V_{\varepsilon\gamma\kappa} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

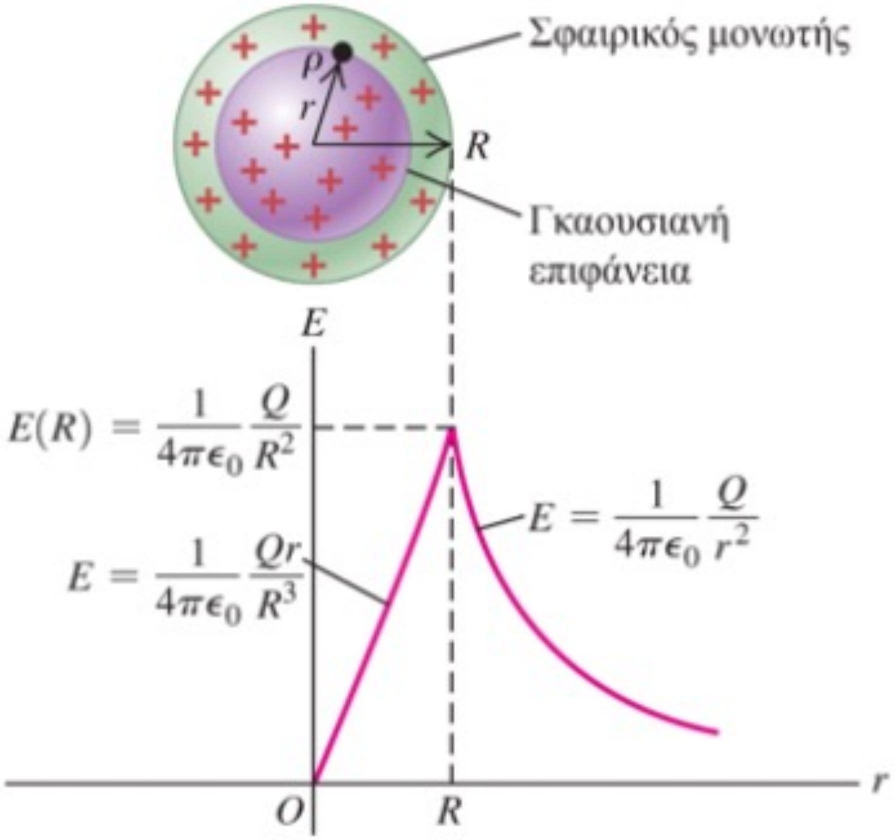
Από τον νόμο του Gauss προκύπτει

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{ή}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$ (πεδίο στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας)

https://videos.papazissi.gr/EX22_9/

22.22 Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με το πεδίο αγώγιμης σφαίρας

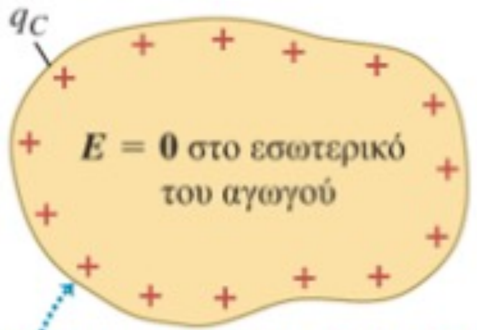


ΦΟΡΤΙΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ

Εύρεση του πεδίου στο εσωτερικό αγωγού

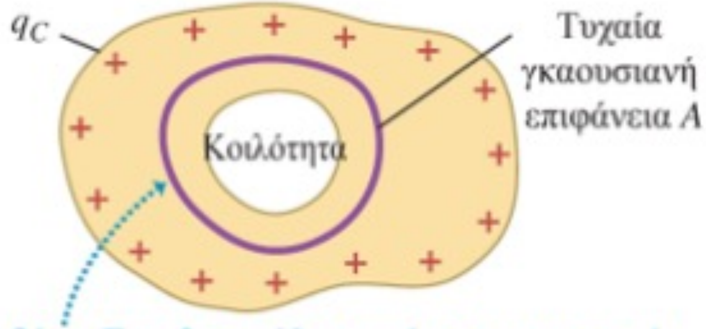
22.23 Βρίσκοντας το ηλεκτρικό πεδίο μέσα σε φορτισμένο αγωγό.

(a) Συμπαγής αγωγός φορτίου q_C



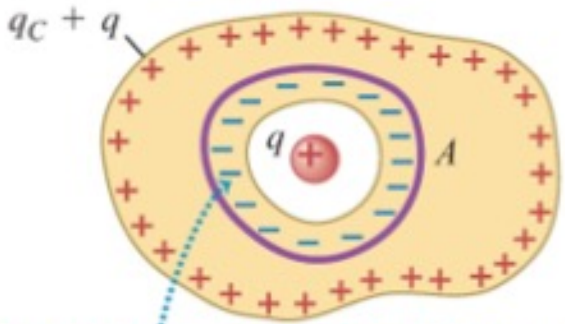
Το φορτίο q_C εντοπίζεται εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια του αγωγού. Η κατάσταση είναι ηλεκτροστατική, επομένως $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ μέσα στον αγωγό.

(b) Ο ίδιος αγωγός με εσωτερική κοιλότητα



Επειδή το $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο στην γκαουσιανή επιφάνεια πρέπει να είναι μηδέν.

(c) Απομονωμένο φορτίο q τοποθετημένο στην κοιλότητα



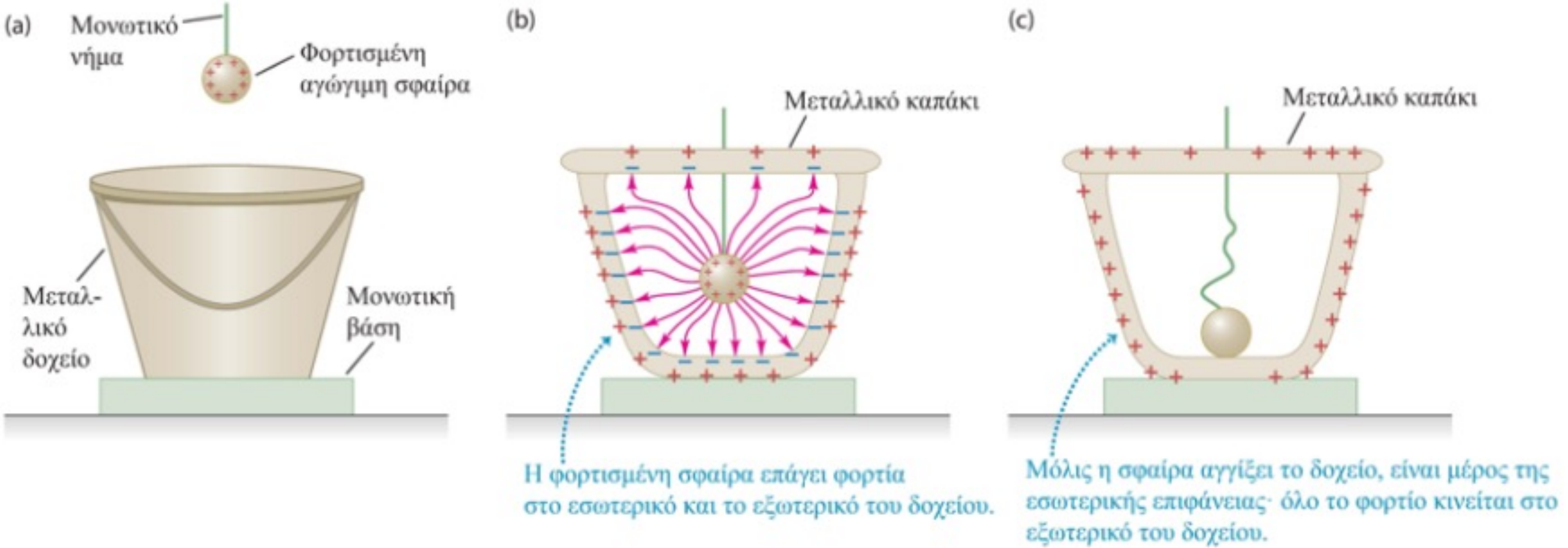
Για να είναι το $\boldsymbol{E}$ μηδέν σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας, η επιφάνεια της κοιλότητας πρέπει να έχει ολικό φορτίο $-q$.

Πρόσθετο φορτίοq θα εμφανιστεί στην εξωτερική επιφάνεια.

https://videos.papazissi.gr/EX22_11/

Πειραματικός έλεγχος του νόμου του Gauss

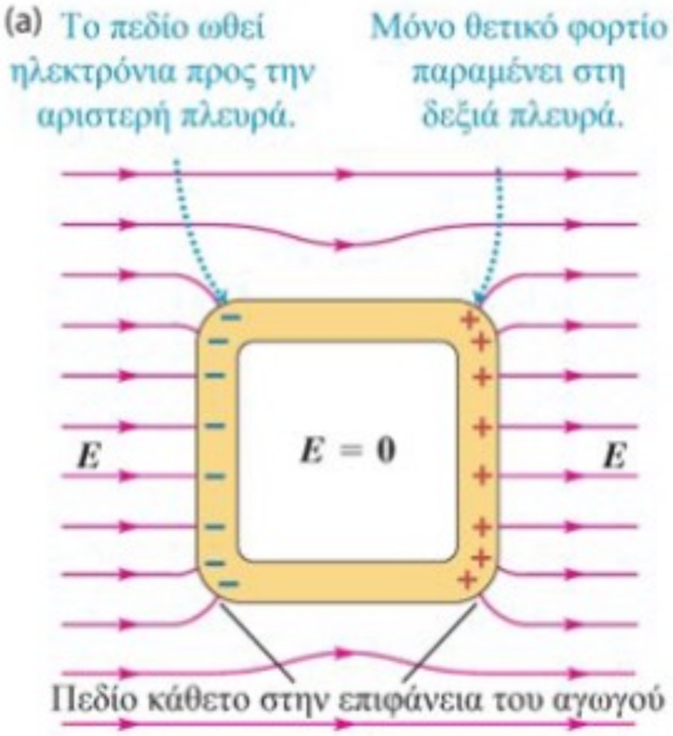
22.25 (a) Μια φορτισμένη αγώγιμη σφαίρα αναρτάται με ένα μονωτικό νήμα έξω από ένα αγώγιμο δοχείο πάνω σε μονωτικό στήριγμα. (b) Η σφαίρα οδηγείται μέσα στο δοχείο και τοποθετείται το καπάκι του δοχείου. (c) Η σφαίρα επαφίεται στην εσωτερική επιφάνεια του δοχείου.



τέλος, βγάζουμε την σφαίρα από τον κάδο· διαπιστώνουμε, ότι πράγματι έχει χάσει όλο το φορτίο της.

Κλωβός Faraday (αγώγιμο κουτί)

22.27 (a) Ένα αγώγιμο κιβώτιο (κλωβός Faraday) μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο των επαγόμενων φορτίων στο κιβώτιο σε συνδυασμό με το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δημιουργούν μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κιβωτίου. (b) Ο άνθρωπος αυτός βρίσκεται μέσα σε έναν κλωβό Faraday, και επομένως είναι προστατευμένος από την ισχυρή ηλεκτρική εκκένωση.



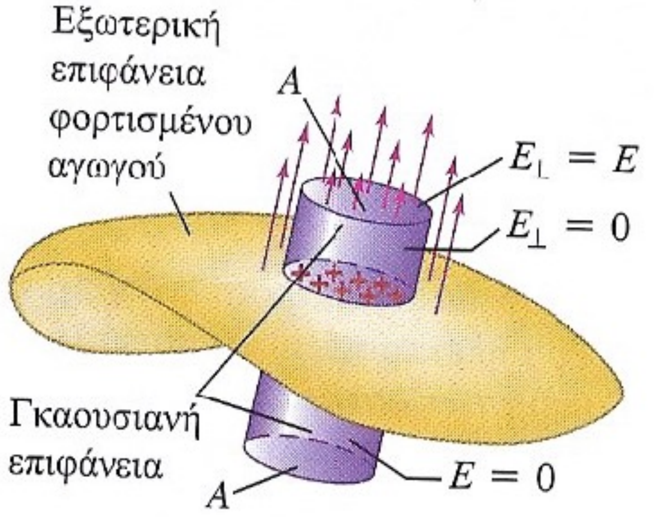
Πεδίο στην επιφάνεια αγωγού

Ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού
Το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (22.10)$$

σ: Πυκνότητα επιφανειακού φορτίου
ϵ_0: Ηλεκτρική σταθερά

22.28 Το πεδίο ακριβώς έξω από έναν φορτισμένο αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνειά του και η κάθετη συνιστώσα του $E_{\perp}$ ισούται με σ/ϵ_0.



Το ηλεκτρικό πεδίο της Γης Η Γη έχει ένα ολικό ηλεκτρικό φορτίο. Το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει κοντά στην επιφάνεια μπορεί να μετρηθεί με ευαίσθητα ηλεκτρονικά όργανα· είναι περίπου ίσο προς 150 N/C και κατευθύνεται προς το κέντρο της Γης. a) Ποια είναι η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου; b) Ποιο είναι το ολικό επιφανειακό φορτίο πάνω στη Γη;

ΛΥΣΗ a) Από την διεύθυνση του πεδίου συμπεραίνουμε, ότι η σ είναι αρνητική (που αντιστοιχεί σε μία κάθετη συνιστώσα $E_\perp$ με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της επιφάνειας).

$$\begin{aligned}\sigma = \epsilon_0 E_\perp &= (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(-150\ \mathrm{N/C})\\ &= -1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} = -1{,}33\ \mathrm{nC/m^2}\end{aligned}$$

b) Το ολικό φορτίο Q είναι ίσο προς το γινόμενο της επιφάνειας $4\pi R_E{}^2$ επί την επιφανειακή πυκνότητα σ:

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi(6{,}38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2})\\ &= -6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C}.\end{aligned}$$

https://videos.papazissi.gr/EX22_13/

Ηλεκτρικό πεδίο διαφόρων συμμετρικών κατανομών φορτίου

Κατανομή Φορτίου	Σημείο στο Ηλεκτρικό Πεδίο	Μέτρο Ηλεκτρικού Πεδίου
Σημειακό φορτίο q	Απόσταση r από το q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Φορτίο q πάνω στην επιφάνεια αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R	Έξω από τη σφαίρα $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Στο εσωτερικό της σφαίρας, $r < R$	$E = 0$
Λεπτός αγωγός (σύρμα) απείρου μήκους, φορτίο ανά μονάδα μήκους λ	Απόσταση r από τον αγωγό (σύρμα)	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
Αγώγιμος κύλινδρος απείρου μήκους και ακτίνας R, φορτίο ανά μονάδα μήκους λ	Έξω από τον κύλινδρο, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Στο εσωτερικό του κυλίνδρου, $r < R$	$E = 0$
Συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας R, φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο	Έξω από τη σφαίρα, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Στο εσωτερικό της σφαίρας, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο ανά μονάδα επιφανείας σ	Σε οποιοδήποτε σημείο	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Δύο αντίθετα φορτισμένες αγώγιμες πλάκες με επιφανειακές πυκνότητες φορτίου $+\sigma$ και $-\sigma$	Σε οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των πλακών	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Φορτισμένος αγωγός	Ακριβώς έξω από τον αγωγό	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έργο παραγόμενο από δύναμη. Από τη Μηχανική μάθαμε:

Όταν μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ ενεργεί πάνω σε ένα σωμάτιο που κινείται από ένα σημείο a προς ένα σημείο b, το έργο $W_{a\to b}$ που παράγεται από τη δύναμη δίνεται από το *επικαμπύλιο* ολοκλήρωμα:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b F\cos\phi\, dl \quad \text{(έργο παραγόμενο από δύναμη)} \qquad (23.1)$$

όπου $d\boldsymbol{l}$ είναι μια απειροστή μετατόπιση πάνω στην τροχιά του σωματίου και ϕ είναι η γωνία μεταξύ της $\boldsymbol{F}$ και του $d\boldsymbol{l}$ σε κάθε σημείο κατά μήκος της τροχιάς. Εάν η δύναμη είναι διατηρητική, δηλαδή, το έργο της δύναμης δεν εξαρτάται από τη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων, τότε το έργο το παραγόμενο από την F μπορεί να εκφραστεί πάντα συναρτήσει μιας δυναμικής ενέργειας U. Όταν το σωμάτιο κινείται από ένα σημείο όπου η δυναμική ενέργεια είναι U_a προς άλλο σημείο που είναι U_b, η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια είναι $\Delta U = U_b - U_a$ και

Έργο παραγόμενο από διατηρητική δύναμη

Δυναμική ενέργεια στην αρχική θέση

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = \underbrace{-\Delta U}_{\text{Αρνητικό της μεταβολής στη δυναμική ενέργεια}} \qquad (23.2)$$

Δυναμική ενέργεια στην τελική θέση

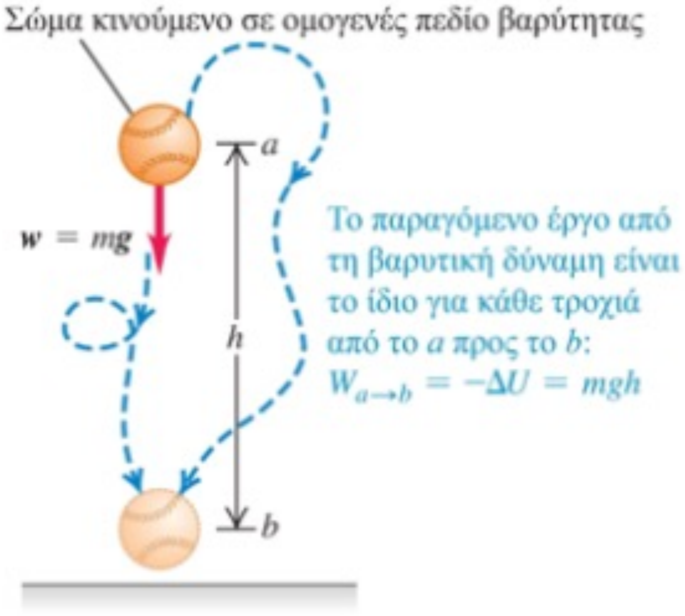
Αν η δύναμη είναι διατηρητική, τότε ισχύει η σχέση 23.3

$$K_a + U_a = K_b + U_b \qquad (23.3)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια (κινητική συν δυναμική) διατηρείται υπό αυτές τις συνθήκες.

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

23.1 Έργο παραγόμενο σε μπαλάκι του μπέιζμπολ που κινείται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

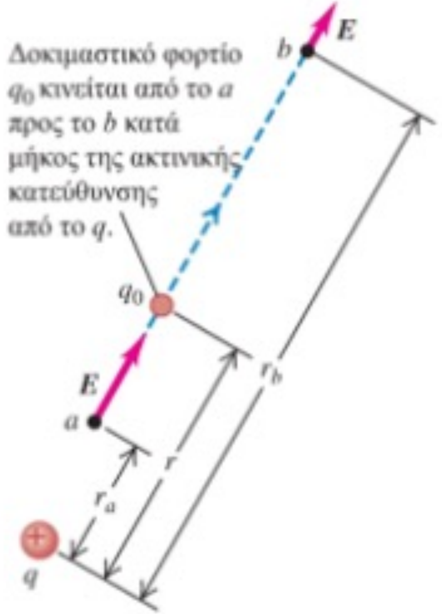


23.2 Έργο παραγόμενο σε σημειακό φορτίο που κινείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Συγκρίνετε με το Σχ. 23.1.

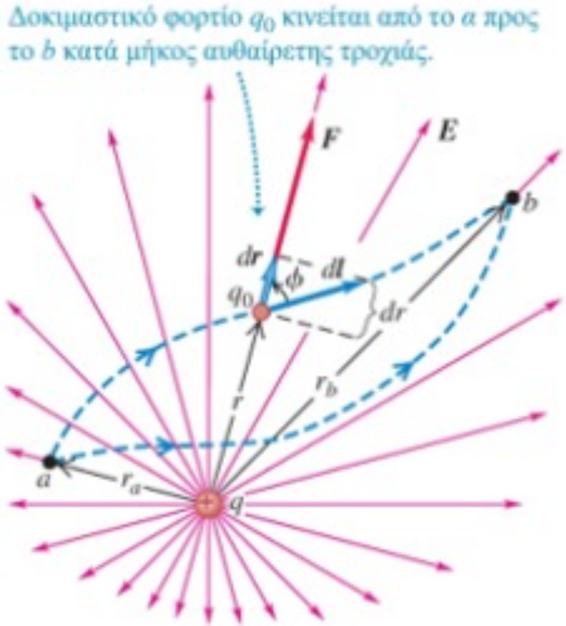
$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed \quad (23.4)$$

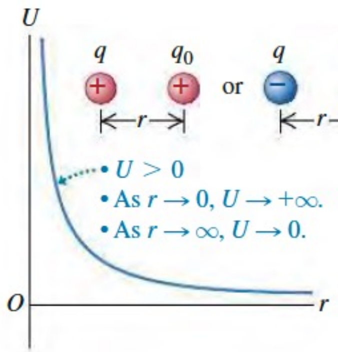
Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια δύο σημειακών φορτίων

23.5 Δοκιμαστικό φορτίο q_0 κινείται κατά μήκος ευθείας γραμμής που εκτείνεται κατά την ακτινική κατεύθυνση από το φορτίο q. Καθώς κινείται από το a προς το b, η απόσταση μεταβάλλεται από r_a σε r_b.



23.6 Το έργο που παράγεται στο q_0 από το ηλεκτρικό πεδίο του φορτίου q δεν εξαρτάται από τη διαγραφόμενη τροχιά παρά μόνο από τις αποστάσεις r_a και r_b.





$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\,dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \quad (23.8)$$

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\,dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\,dl$$

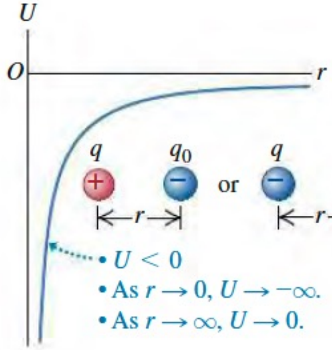
Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια δύο σημειακών φορτίων

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

Τιμές των δύο φορτίων

Ηλεκτρική σταθερά

Απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων



Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια με περισσότερα φορτία

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια σημειακού φορτίου q_0 και μιας συλλογής φορτίων $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.10)$$

Ηλεκτρική σταθερά   Αποστάσεις από το q_0 προς $q_1, q_2, q_3, \ldots$

Η Εξ. (23.10) δίνει τη δυναμική ενέργεια που συνδέεται με την παρουσία του δοκιμαστικού φορτίου q_0 στο πεδίο $\boldsymbol{E}$ που παράγεται από τα q_1, q_2, q_3, ... Όμως, υπάρχει επίσης δυναμική ενέργεια που προκύπτει από την τοποθέτηση αυτών των φορτίων στις θέσεις τους. Εάν αρχίσουμε με τα φορτία q_1, q_2, q_3,..., όλα διαχωρισμένα μεταξύ τους με άπειρες αποστάσεις και μετά τα φέρουμε σε θέσεις ώστε η απόσταση μεταξύ του q_i και του q_j να είναι r_{ij}, η *ολική* δυναμική ενέργεια U είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης για κάθε ζεύγος φορτίων. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (23.11)$$

Αυτό το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα *ζεύγη* των φορτίων.

Ηλεκτρικό δυναμικό

Το **δυναμικό** είναι η *δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου*. Ορίζουμε το δυναμικό V σε κάθε σημείο εντός ηλεκτρικού πεδίου ως *τη δυναμική ενέργεια U που συνδέεται με ένα δοκιμαστικό φορτίο q' σε αυτό το σημείο, δια του φορτίου q'*:

$$V = \frac{U}{q'}, \qquad \text{ή} \qquad U = q'V.$$

1 V = 1 volt = 1 J/C = 1 joule/coulomb

$$\frac{W_{a \to b}}{q'} = \frac{U_a}{q'} - \frac{U_b}{q'} = V_a - V_b,$$

όπου $V_a = U_a / q'$ είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου στο σημείο a και V_b είναι το ίδιο στο b. Ονομάζουμε V_a και V_b *το δυναμικό στο σημείο a και το δυναμικό στο b*, αντίστοιχα.

Το V_{ab}, το δυναμικό (σε V) του a ως προς το b, ισούται με το έργο (σε J) που παράγει η ηλεκτρική δύναμη όταν μία ΜΟΝΑΔΑ (1 C) φορτίου κινείται από το a στο b.

Υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού

Για τον υπολογισμό του δυναμικού ενός φορτίου ή μιας συλλογής φορτίων διαιρούμε τη δυναμική ενέργεια δύο η περισσοτέρων φορτίων δια του δοκιμαστικού φορτίου q_0

Ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται σε σημειακό φορτίο

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Ηλεκτρική σταθερά}} \frac{q}{r} \qquad (23.14)$$

q: Τιμή σημειακού φορτίου

r: Απόσταση από το σημειακό φορτίο q στο σημείο που μετριέται το δυναμικό

Ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται σε συλλογή σημειακών φορτίων

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Ηλεκτρική σταθερά}} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (23.15)$$

q_i: Τιμή του i-στού σημειακού φορτίου

r_i: Απόσταση από το i-στό σημειακό φορτίο ως εκεί που μετριέται το δυναμικό

Όταν έχουμε μια συνεχή κατανομή φορτίου κατά μήκος μιας γραμμής, πάνω σε μια επιφάνεια ή μέσα σε έναν όγκο, διαιρούμε το φορτίο σε στοιχειώδη φορτία dq και το άθροισμα στην Εξ. (23.15) γίνεται ολοκλήρωμα:

Ολοκλήρωμα πάνω σε όλη την κατανομή φορτίου

Ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται σε συνεχή κατανομή φορτίου

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Ηλεκτρική σταθερά}} \int \frac{dq}{r} \qquad (23.16)$$

dq: Στοιχείο φορτίου

r: Απόσταση από το στοιχείο φορτίου ως εκεί που μετριέται το δυναμικό

Εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού από το ηλεκτρικό πεδίο

Το έργο που παράγεται από την ηλεκτρική δύναμη καθώς το δοκιμαστικό φορτίο κινείται από το a προς το b δίνεται από

$$W_{a\to b} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\underbrace{V_a - V_b}_{\text{Διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού}} = \overbrace{\int_a^b \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}_{\text{Εσωτερικό γινόμενο του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος μετατόπισης}} = \int_a^b \underbrace{E}_{\text{Μέτρο ηλεκτρικού πεδίου}} \cos\underbrace{\phi}_{\text{Γωνία μεταξύ } \mathbf{E} \text{ και } d\mathbf{l}}\, \underbrace{dl}_{\text{Μετατόπιση}}}^{\text{Ολοκλήρωμα κατά μήκος της τροχιάς από το } a \text{ στο } b} \qquad (23.17)$$

$$V_a - V_b = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad (23.18)$$

Φορτισμένος σφαιρικός αγωγός. Μια στερεά αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό φορτίο q. Να βρείτε το δυναμικό παντού μέσα και έξω από τη σφαίρα.

ΛΥΣΗ Χρησιμοποιήσαμε το νόμο του Gauss για να δείξουμε ότι σε όλα τα σημεία *εκτός* της σφαίρας το πεδίο είναι το ίδιο με αυτό ενός σημειακού φορτίου q στο κέντρο της σφαίρας. *Εντός* της σφαίρας το πεδίο είναι μηδέν παντού· διαφορετικά, μέσα στη σφαίρα θα είχαμε κίνηση φορτίου. Εάν πάρουμε $V = 0$ στο άπειρο, όπως κάναμε με το σημειακό φορτίο, τότε για σημείο εκτός της σφαίρας και σε απόσταση r από το κέντρο της, το δυναμικό είναι το ίδιο όπως αυτό που θα είχαμε με σημειακό φορτίο q στο κέντρο της, δηλαδή,

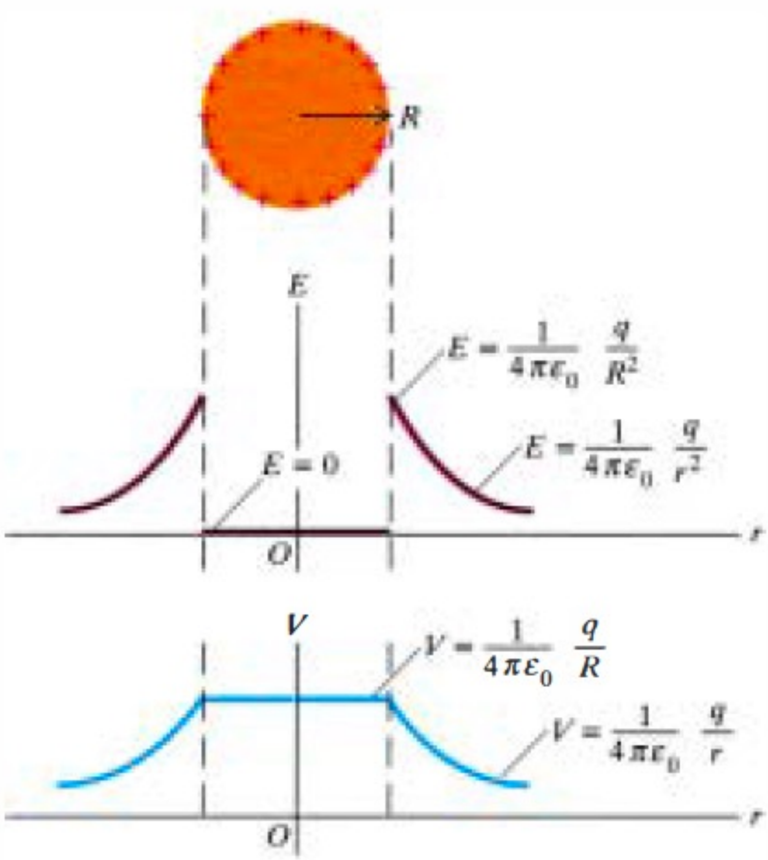
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}. \qquad (24\text{–}17)$$

Εντός της σφαίρας το πεδίο είναι μηδέν παντού και δεν παράγεται έργο κατά τη μετακίνηση δοκιμαστικού φορτίου μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων σε αυτή την περιοχή. Έτσι το δυναμικό είναι το ίδιο σε κάθε σημείο εντός της σφαίρας και ίσο προς την τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια, $q/4\pi\epsilon_0 R$. Στο Σχ. 24–9 φαίνονται το πεδίο και το δυναμικό ως συναρτήσεις του r για θετικό φορτίο q. Το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ στην επιφάνεια έχει μέτρο

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{R^2}. \qquad (24\text{–}18)$$



24–9 Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E και το δυναμικό V σε σημεία εντός και εκτός φορτισμένου σφαιρικού αγωγού.

https://videos.papazissi.gr/EX23_8/

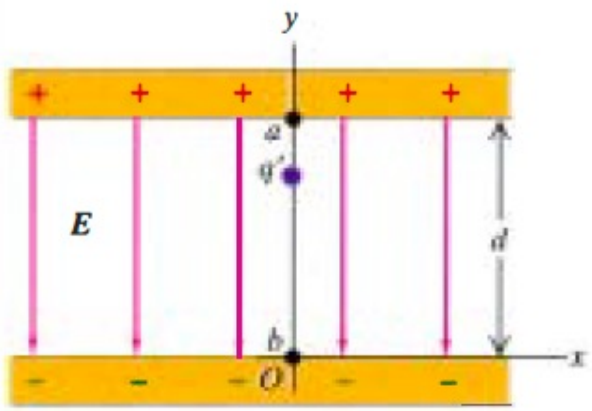
Παράλληλες πλάκες. Να βρείτε το δυναμικό σε κάθε ύψος y μεταξύ των δύο φορτισμένων παράλληλων πλακών

ΛΥΣΗ Η δυναμική ενέργεια U για δοκιμαστικό φορτίο q' σε απόσταση y πάνω από την κάτω πλάκα (Σχ. 24–11) δίνεται από την Εξ. $U = q'Ey$. Το δυναμικό V_y στο σημείο y είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, $V_y = U/q'$:

$$V_y = Ey.$$

Επιλέξαμε το U, και ως εκ τούτου το V, να είναι μηδέν στο σημείο b, όπου $y = 0$. Ακόμη και αν επιλέξουμε μια διαφορετική τιμή δυναμικού V_b στο b, εξακολουθεί να είναι

$$V_y - V_b = Ey.$$



24–11 Οι παράλληλες φορτισμένες πλάκες από το Σχ. 24–1.

Το δυναμικό ελαττώνεται γραμμικά συναρτήσει του y καθώς κινούμαστε από την πάνω προς την κάτω πλάκα. Στο σημείο a, όπου $y = d$ και $V_y = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed,$$

$$E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}. \qquad (24\text{–}19)$$

Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών διαιρεμένη διά της μεταξύ τους αποστάσεως. (*Προσοχή!* Αυτή η σχέση ισχύει μόνο για την επίπεδη γεωμετρία που περιγράψαμε· δεν εφαρμόζεται σε συστήματα όπως ομόκεντρες σφαίρες και κυλίνδρους, για τα οποία το πεδίο $\boldsymbol{E}$ δεν είναι ομογενές).

βρήκαμε την έκφραση $E = \sigma/\epsilon_0$ για το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο αγώγιμων πλακών συναρτήσει της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ της μιας πλάκας. Η Εξ. (24–19) είναι γενικότερα πιο χρήσιμη από αυτήν την έκφραση, επειδή η διαφορά δυναμικού V_{ab} μπορεί να μετρηθεί εύκολα με ένα βολτόμετρο, αλλά δεν υπάρχουν όργανα που να μετρούν άμεσα επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Η Εξ. (24–19) δείχνει επίσης ότι η μονάδα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να εκφραστεί ως 1 *volt ανά μέτρο* (1 V/m), όπως επίσης και ως 1 N/C :

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{N/C}.$$

Στην πράξη το volt ανά μέτρο είναι η συνήθης μονάδα του E.

Φορτισμένος κυκλικός δακτύλιος. Ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας a, με ολικό φορτίο Q (Σχ. 24–13). Να βρείτε το δυναμικό σε σημείο P του άξονα του δακτυλίου σε απόσταση x από το κέντρο του.

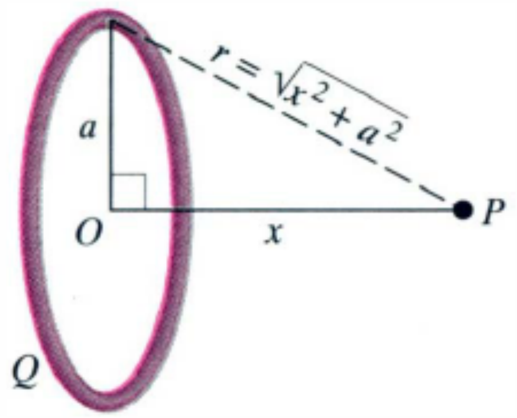
ΛΥΣΗ Έχουμε δει αυτόν τον δακτύλιο αρκετές φορές Αναφερόμενοι σε αυτό το παράδειγμα, σημειώνουμε ότι όλο το φορτίο είναι σε απόσταση $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ από το σημείο P. Συμπεραίνουμε λοιπόν αμέσως ότι το δυναμικό στο σημείο P, ως συνάρτηση του x, είναι

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}. \qquad (24\text{–}23)$$

Το δυναμικό είναι μια *βαθμωτή* ποσότητα· δεν υπάρχει λόγος να θεωρήσουμε συνιστώσες διανυσμάτων σε αυτόν τον υπολογισμό, όπως έπρεπε να κάνουμε όταν βρήκαμε το ηλεκτρικό πεδίο στο P, έτσι ο υπολογισμός του δυναμικού είναι πολύ απλούστερος από τον υπολογισμό του πεδίου. Όταν το x είναι πολύ μεγαλύτερο του a, η Εξ. (24–23) γίνεται προσεγγιστικά

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x}.$$

Αυτή εκφράζει το δυναμικό σημειακού φορτίου Q σε απόσταση x. Όταν είμαστε πολύ μακριά από τον φορτισμένο δακτύλιο, αυτός φαίνεται ως σημειακό φορτίο.



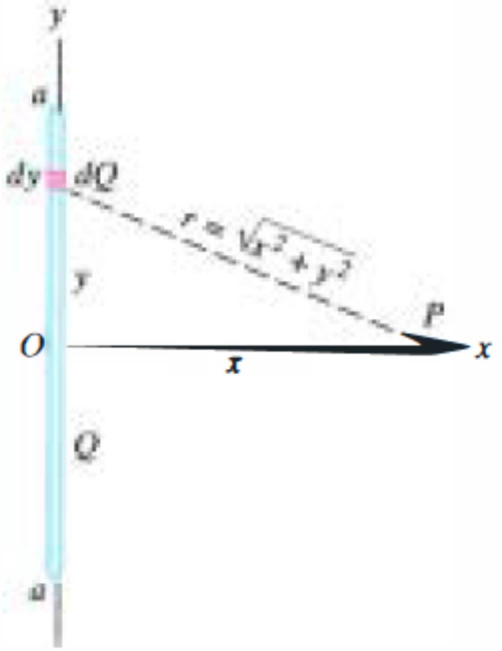
24–13 Όλο το φορτίο Q είναι στην ίδια απόσταση r από το P.

Λεπτή φορτισμένη ράβδος. Ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος λεπτής ράβδου μήκους $2a$. Να βρείτε το δυναμικό στο σημείο P κατά μήκος της μεσοκαθέτου της ράβδου σε απόσταση x από το κέντρο της.

ΛΥΣΗ

Στο Σχ. 24–14 το στοιχείο φορτίου dQ που αντιστοιχεί σε στοιχείο μήκους dy της ράβδου δίνεται πάλι από $dQ = (Q/2a)dy$. Η απόσταση από το dQ στο P είναι $(x^2 + y^2)^{1/2}$ και η συνεισφορά στο δυναμικό, dV, που δημιουργεί το dQ στο σημείο P, είναι

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



24–14 Για την εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού στην μεσοκάθετο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου μήκους $2a$.

Για να βρούμε το δυναμικό στο P, ολοκληρώνουμε αυτή για όλο το μήκος της ράβδου από $y = -a$ έως $y = a$:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

τελικό αποτέλεσμα είναι

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}.$$

Όταν το x είναι πολύ μεγάλο, αναμένουμε το V να τείνει στο μηδέν. Σας προτείνουμε να το επαληθεύσετε.

Προσέξτε πάλι ότι το πρόβλημα είναι απλούστερο από τον υπολογισμό του $\mathbf{E}$ στο σημείο P επειδή το δυναμικό είναι βαθμωτή ποσότητα και δεν υπεισέρχονται υπολογισμοί διανυσμάτων. ■

https://videos.papazissi.gr/EX23_12/

Γραμμική κατανομή φορτίου και αγώγιμος φορτισμένος κύλινδρος. Να βρείτε το δυναμικό σε απόσταση r από γραμμική κατανομή φορτίου με πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) λ.

ΛΥΣΗ το *πεδίο* $\boldsymbol{E}$ σε απόσταση r από μια μακριά (και προς τις δύο

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

κατευθύνσεις) ευθύγραμμη κατανομή φορτίου ή εκτός αγώγιμου φορτισμένου κυλίνδρου έχει ακτινική συνιστώσα

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

το δυναμικό οποιουδήποτε σημείου a ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο b, σε ακτινικές αποστάσεις r_a και r_b από τη γραμμή του φορτίου (Σχ. 24-12a), είναι

$$V_a - V_b = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}. \quad (24\text{–}20)$$

Εάν θεωρήσουμε το σημείο b στο άπειρο και θέσουμε $V_b = 0$, βρίσκουμε για το δυναμικό V_a,

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_a} = \infty.$$

Αυτό δείχνει ότι εάν προσπαθήσουμε να ορίσουμε το V ως μηδέν στο άπειρο, τότε πρέπει να είναι άπειρο σε κάθε πεπερασμένη απόσταση από την ευθεία του φορτίου. Αυτός λοιπόν ο τρόπος δεν είναι βολικός για να ορίσουμε το V σε αυτό το πρόβλημα. Η δυσκολία, όπως αναφέραμε προηγουμένως, έγκειται στο ότι η κατανομή φορτίου εκτείνεται και η ίδια στο άπειρο.

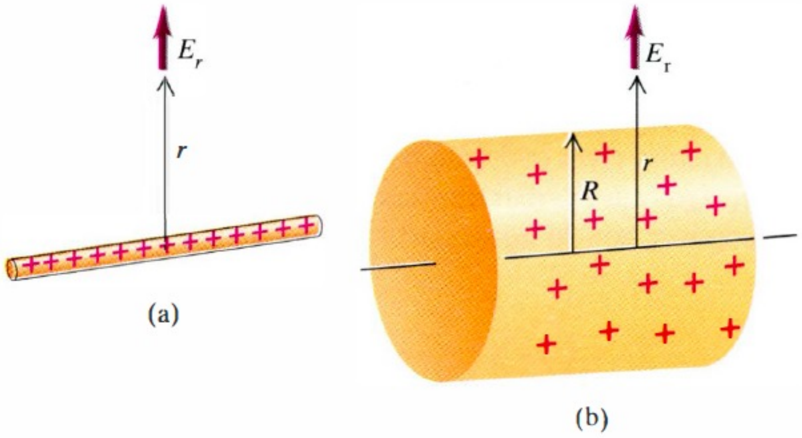
Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία μπορούμε να δώσουμε στο V την τιμή μηδέν σε όποιο σημείο θέλουμε. Θέτουμε $V_b = 0$ στο σημείο b με αυθαίρετη ακτίνα r_0. Τότε σε οποιοδήποτε σημείο a σε ακτινική απόσταση r το δυναμικό V είναι $V_a - V_b = V_a - 0$, ή

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}. \quad (24\text{–}21)$$

Οι εξισώσεις (24–20) και (24–21) δίνουν το δυναμικό στο πεδίο ενός κυλίνδρου μόνο για τιμές του r ίσες ή μεγαλύτερες από την ακτίνα R του κυλίνδρου. Εάν διαλέξουμε το r_0 να είναι η ακτίνα R του κυλίνδρου, έτσι ώστε $V = 0$ όταν $r = R$ (Σχ. 24–12b), τότε για κάθε σημείο για το οποίο $r > R$,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}. \quad (24\text{–}22)$$

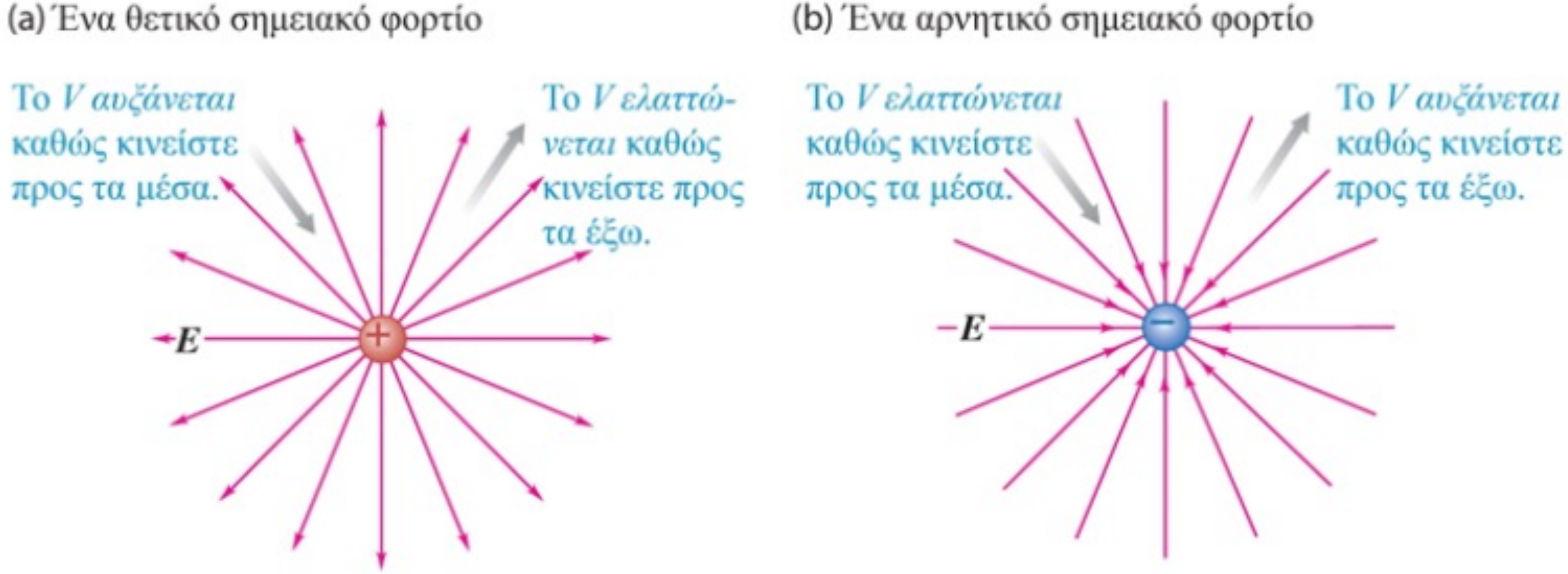
όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου.



24–12 Ηλεκτρικό πεδίο εκτός (a) ενός μακρού φορτισμένου σύρματος· (b) ενός μακρού φορτισμένου κυλίνδρου.

Εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού από το ηλεκτρικό πεδίο

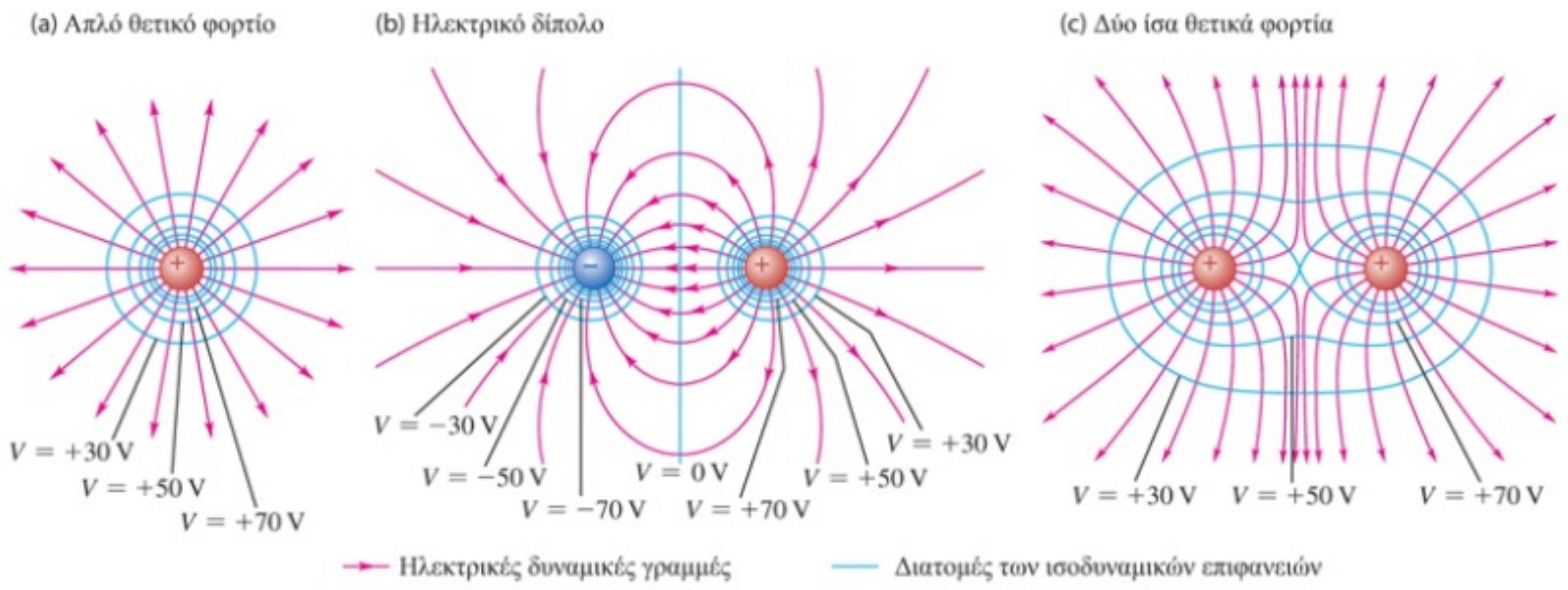
23.12 Εάν κινηθείτε προς την κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$, το ηλεκτρικό δυναμικό V ελαττώνεται· εάν κινηθείτε σε αντίθετη κατεύθυνση προς το $\boldsymbol{E}$, το V αυξάνεται.



Ισοδυναμικές επιφάνειες

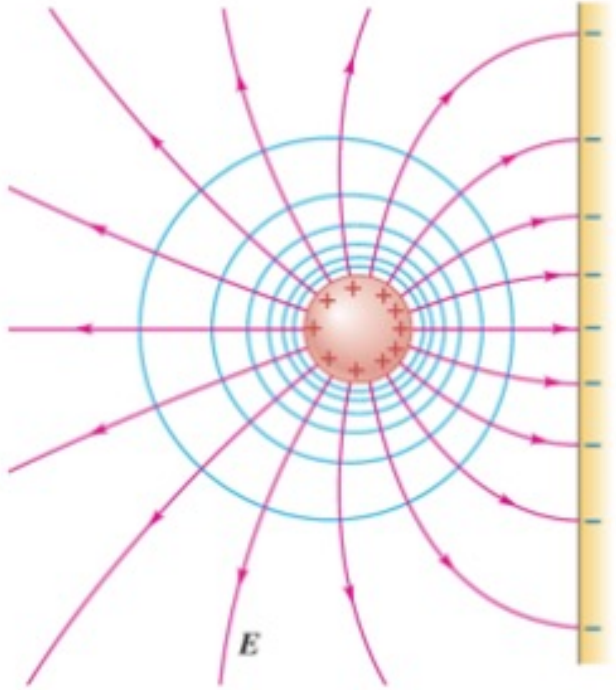
Κατά αναλογία με τις ισοϋψείς γραμμές σε τοπογραφικό χάρτη, μια **ισοδυναμική επιφάνεια** είναι μια τρισδιάστατη επιφάνεια πάνω στην οποία το *ηλεκτρικό δυναμικό V* είναι το ίδιο σε κάθε της σημείο.

23.23 Διατομές ισοδυναμικών επιφανειών (μπλε γραμμές) και ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών (κόκκινες γραμμές) για συστήματα σημειακών φορτίων. Υπάρχουν ίσες διαφορές δυναμικού μεταξύ διαδοχικών επιφανειών.



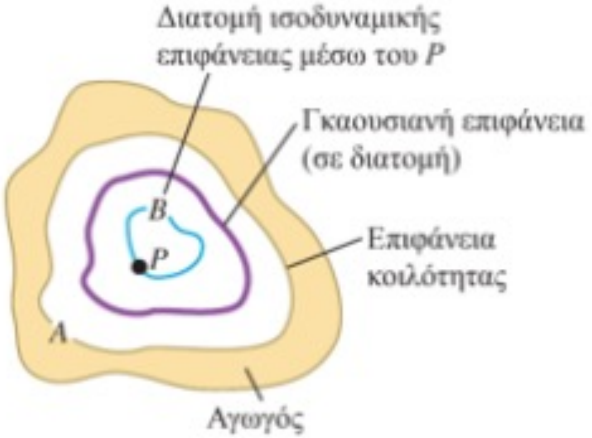
Ισοδυναμικές και αγωγοί

23.24 Όταν τα φορτία βρίσκονται σε ηρεμία, μια αγώγιμη επιφάνεια είναι πάντοτε μια ισοδυναμική επιφάνεια. Οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στην αγώγιμη επιφάνεια.



23.25 Σε όλα τα σημεία πάνω στην επιφάνεια ενός αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια. Εάν το $\boldsymbol{E}$ είχε εφαπτομενική συνιστώσα, μια καθαρή ποσότητα έργου θα παραγόταν σε δοκιμαστικό φορτίο κινώντας το κατά μήκος του βρόχου που φαίνεται εδώ – πράγμα που είναι αδύνατο επειδή η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική.

23.26 Κοιλότητα σε αγωγό. Εάν η κοιλότητα δεν περιέχει καθόλου φορτίο, κάθε σημείο μέσα στην κοιλότητα έχει το ίδιο δυναμικό, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν παντού και δεν υπάρχει φορτίο πουθενά στην επιφάνεια της κοιλότητας.



Βαθμίδα δυναμικού

Η ακόλουθη πράξη ονομάζεται **βαθμίδα** της συνάρτησης f:

$$\nabla f = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) f \tag{23.21}$$

Συνιστώσες ηλεκτρικού πεδίου υπολογισμένες από το δυναμικό:

Κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου…

$$E_x = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad E_y = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial y}} \qquad E_z = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial z}} \tag{23.19}$$

… ισούται με το αρνητικό της αντίστοιχης μερικής παραγώγου της συνάρτησης του ηλεκτρικού δυναμικού V.

Διάνυσμα ηλεκτρικού πεδίου υπολογισμένο από το δυναμικό:

Ηλεκτρικό πεδίο

$$\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{i}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}} + \boldsymbol{j}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}} + \boldsymbol{k}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}} \right) \tag{23.20}$$

Μερικές παράγωγοι της συνάρτησης του ηλεκτρικού δυναμικού V.

Ο τελεστής που παριστάνεται με το σύμβολο ∇ ονομάζεται «grad» ή «del» (ντελ) ή ανάδελτα. Έτσι σε διανυσματικό συμβολισμό,

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{23.22}$$

Αυτή διαβάζεται ως «το $\boldsymbol{E}$ είναι το αρνητικό της βαθμίδας του V», ή «το $\boldsymbol{E}$ ισούται με το αρνητικό grad του V». Η ποσότητα ∇V ονομάζεται *βαθμίδα δυναμικού.*

Δυναμικό και πεδίο σημειακού φορτίου Έχουμε δείξει ότι το δυναμικό σε ακτινική απόσταση r από το σημειακό φορτίο q είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση και έτσι

$$E = E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

https://videos.papazissi.gr/EX23_13/

Δυναμικό και πεδίο εκτός φορτισμένου κυλίνδρου βρήκαμε ότι το δυναμικό εκτός φορτισμένου κυλίνδρου ακτίνας R και φορτίου λ ανά μονάδα μήκους είναι

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln R - \ln r).$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα E_r και είναι

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

σε συμφωνία με προηγούμενο αποτέλεσμά μας.

Δυναμικό και πεδίο φορτισμένου δακτυλίου βρήκαμε, ότι για φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας a και ολικού φορτίου Q το δυναμικό στο σημείο P που απέχει απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το κέντρο και είναι κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου, είναι

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Δυναμικό και πεδίο φορτισμένης ευθείας Ένα φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος ράβδου μήκους $2a$. βρήκαμε μια έκφραση για το δυναμικό σε σημείο πάνω στην μεσοκάθετο μιας τέτοιας ράβδου σε απόσταση x από το κέντρο της:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}.$$