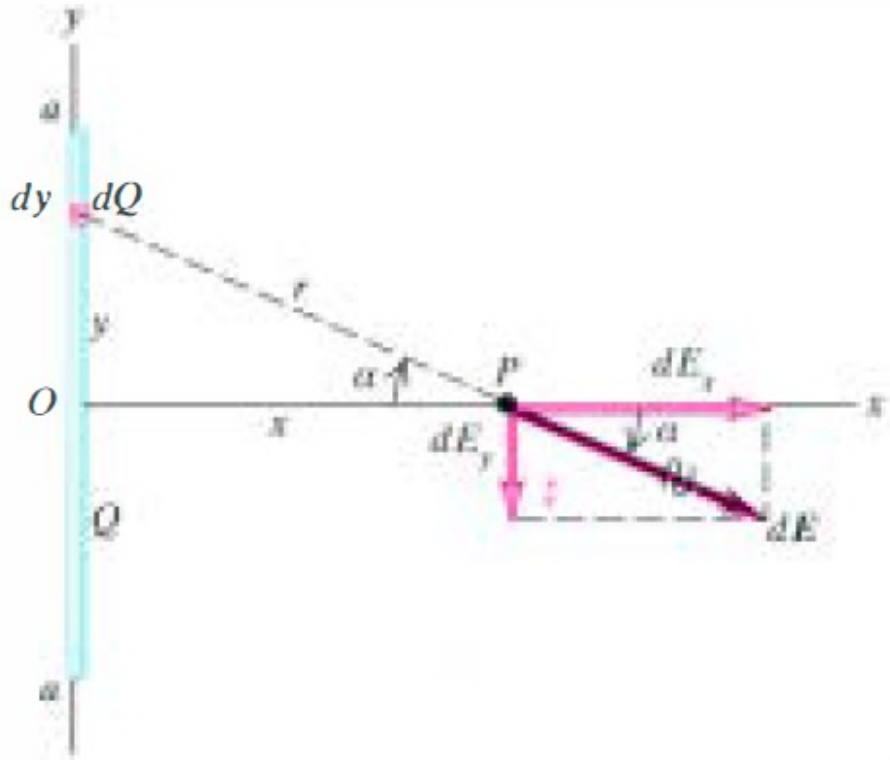
ΦΥΣΙΚΗ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ε.Ε. 2023-2024

Διδάσκοντες: Σ. ΚΟΣΙΩΝΗΣ, Ε. ΠΑΣΠΑΛΑΚΗΣ, και Ι. ΘΑΝΟΠΟΥΛΟΣ


SEARS & ZEMANSKY
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ
ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική
4η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ
ΜΕ QR CODE ΒΙΝΤΕΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ
Τόμος Β
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN
ΑΠΟΔΟΣΗ – ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Θ. Η. Αλεξόπουλος
Ι. Α. Αρβανιτίδης
Α. Α. Αργυρίου
Ε. Α. Δρης
Η. Σ. Ζουμπούλης
Η. Κ. Κατσούφης
Γ. Α. Κουρούκλης
Κ. Ε. Παρασκευαΐδης
Μ. Ν. Πιζάνιας
Ι. Π. Ρίζος
Θ. Ν. Τομαράς
Κ. Χριστοδουλίδης
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ

Πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου Ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομογενώς σε γραμμή με μήκος $2a$ που βρίσκεται πάνω στον άξονα y (Σχ. 22–17). Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P του άξονα x που απέχει απόσταση x από την αρχή.



22–17 Γραμμική κατανομή φορτίου με μήκος $2a$ και ολικό φορτίο Q, δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο E στο σημείο P.

ΛΥΣΗ Διαμερίζουμε τη γραμμή σε απειροστά τμήματα· ας είναι dy το μήκος ενός τυπικού τμήματος σε ύψος y, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να βρούμε το φορτίο, dQ, αυτού του τμήματος παρατηρούμε πως αν το φορτίο κατανέμεται ομογενώς, ο λόγος του dQ προς το ολικό φορτίο Q ισούται με τον λόγο του dy προς το ολικό μήκος $2a$. Έτσι

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dy}{2a}$$

και

$$dQ = \frac{Q\,dy}{2a}.$$

Η απόσταση r του P από αυτό το τμήμα είναι $(x^2 + y^2)^{1/2}$, οπότε το μέτρο dE του πεδίου στο P, που οφείλεται σε αυτό το τμήμα, είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q dy}{2a(x^2 + y^2)}.$$

Παριστάνουμε αυτό το πεδίο με τις x και y συνιστώσες του:

$$dE_x = dE\cos\alpha, \qquad dE_y = -\,dE\sin\alpha.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές με την έκφραση του dE βρίσκουμε

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy}{2a\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\,dy}{2a\,(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες E_x και E_y του ολικού πεδίου, ολοκληρώνουμε αυτές τις εκφράσεις σημειώνοντας ότι για να συμπεριλάβουμε ολόκληρο το φορτίο Q πρέπει να ολοκληρώσουμε από $y = -a$ ως $y = +a$. Αφήνουμε σε σας τις λεπτομέρειες της ολοκλήρωσης· οι πίνακες ολοκληρωμάτων θα σας βοηθήσουν. Τα τελικά αποτελέσματα είναι

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0,$$

ή, σε διανυσματική γραφή,

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\boldsymbol{i}. \qquad (22\text{–}8)$$

Από τη συμμετρία θα μπορούσαμε να είχαμε μαντέψει πως η E_y θα μηδενιζόταν· αν υπήρχε θετικό δοκιμαστικό φορτίο στο P, το πάνω μισό του Q ασκεί στο δοκιμαστικό φορτίο μια δύναμη προς τα κάτω, ενώ το κάτω μισό ασκεί μια αντίθετη δύναμη προς τα πάνω. Σημειώνουμε επίσης πως, όταν το x είναι πολύ μεγαλύτερο από το a, μπορούμε να αμελήσουμε το a στον παρονομαστή και το αποτέλεσμά μας γίνεται, κατά προσέγγιση,

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\boldsymbol{i}.$$

Αυτό σημαίνει πως αν η γραμμική κατανομή φορτίου q βρίσκεται πολύ μακριά από το σημείο P, σε σύγκριση με το μέγεθός της, αυτή φαίνεται σαν σημείο.

Μπορούμε να πάρουμε πρόσθετες πληροφορίες από την Εξ. (22–8) αν χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = Q/2a$. Αντικαθιστώντας $Q = 2a\lambda$ στην Εξ. (22–8), μετά τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2)+1}}\boldsymbol{i}. \qquad (22\text{–}9)$$

Τι συμβαίνει τώρα στην περίπτωση που κάνουμε τη γραμμική κατανομή όλο και μακρύτερη, προσθέτοντας φορτίο αναλογικά με το μήκος της, έτσι ώστε το λ, το φορτίο ανά μονάδα μήκους, να παραμένει σταθερό; Πόσο είναι το $\boldsymbol{E}$ σε απόσταση x από μια πολύ μεγάλη γραμμική κατανομή φορτίου;

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Για να απαντήσουμε στην ερώτηση παίρνουμε το *όριο* της Εξ. (22–9) όταν το a γίνεται πολύ μεγάλο. Σε αυτό το όριο ο όρος x^2/a^2 στον παρονομαστή γίνεται πολύ μικρότερος από τη μονάδα και μπορεί να παραληφθεί. Μένουμε με την έκφραση

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\boldsymbol{i}. \qquad (22\text{–}10)$$

Το μέτρο του πεδίου εξαρτάται μόνο από την απόσταση του σημείου P από την κατανομή, οπότε μπορούμε να πούμε πως σε οποιοδήποτε σημείο P, σε απόσταση r από την κατανομή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, το πεδίο έχει μέτρο

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \qquad (22\text{–}11)$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται ακτινικά από την κατανομή προς τα έξω. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε γραμμική κατανομή φορτίου απείρου μήκους είναι ανάλογο του $1/r$ και όχι του $1/r^2$ όπως συμβαίνει για σημειακό φορτίο.

Στην πραγματικότητα, βέβαια, δεν υπάρχουν στη φύση κατανομές φορτίων με άπειρο μήκος. Πάντως, όταν το σημείο του πεδίου βρίσκεται αρκετά κοντά στην κατανομή, υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος, που παίρνουμε για άπειρη κατανομή και του πραγματικού αποτελέσματος, που θα παίρναμε για πεπερασμένο μήκος. Αν π.χ. η απόσταση r του σημείου του πεδίου από το μέσο της κατανομής είναι 1% του μήκους της κατανομής, η τιμή του $\boldsymbol{E}$ διαφέρει από την τιμή απείρου μήκους λιγότερο από 2 μέρη στα 10 000.

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Πεδίο ομογενώς φορτισμένου δίσκου Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο, που προκαλεί σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (δηλ. φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας) σ κατανεμημένη σε δίσκο με ακτίνα R, σε σημείο του άξονα του δίσκου σε απόσταση x από το κέντρο του. Να υποτεθεί ότι το x είναι θετικό.

ΛΥΣΗ Η γεωμετρία φαίνεται στο Σχ. 22–18. Μπορούμε να παραστήσουμε αυτή την κατανομή φορτίου σαν σύνολο ομόκεντρων φορτισμένων δακτυλίων.

ήδη ξέρουμε να βρίσκουμε το πεδίο ενός δακτυλίου, οπότε όλο κι όλο που θα πρέπει να κάνουμε εδώ είναι να προσθέσουμε τις συνεισφορές όλων των δακτυλίων.

Κάποιος τυπικός δακτύλιος έχει εσωτερική ακτίνα r και εξωτερική ακτίνα $r + dr$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αφού το πάχος dr του δακτυλίου είναι απειροστό, το εμβαδόν του, dA, ισούται με το πάχος του επί την περίμετρό του, $2\pi r$, ή $dA = 2\pi r\,dr$. Το φορτίο dQ του δακτυλίου εκφράζεται σαν $dQ = \sigma\,dA$ ή

$$dQ = 2\pi\sigma r\,dr.$$

Στην Εξ. (22–7) αντικαθιστούμε το Q με αυτή την έκφραση και το a με r. Η συνισταμένη dE_x του πεδίου στο σημείο P, που οφείλεται στο φορτίο dQ, είναι

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Για να βρούμε το ολικό πεδίο που οφείλεται στο σύνολο των δακτυλίων, ολοκληρώνουμε το dE_x ως προς r. Για να σαρώσουμε όλο τον δίσκο, πρέπει να ολοκληρώσουμε από 0 ως R (όχι από $-R$ ως R):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Να θυμάστε ότι σε αυτή την ολοκλήρωση το x παραμένει σταθερό· η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το r. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή μεταβλητής, $z = x^2 + r^2$. Αφήνουμε σε σας τις λεπτομέρειες του υπολογισμού· το αποτέλεσμα είναι

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}}\right]. \qquad (22\text{–}12)$$

Μπορούμε και πάλι να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει όταν η κατανομή φορτίου γίνεται πολύ μεγάλη. Υποθέστε πως αυξάνουμε συνεχώς την ακτίνα R του δίσκου προσθέτοντας συγχρόνως φορτίο, έτσι ώστε η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (δηλ. το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας) να παραμένει σταθερή. Αν πάρουμε το όριο της Εξ. (22–12), καθώς το R γίνεται πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση x του σημείου του πεδίου από τον δίσκο, ο όρος με το R στον παρονομαστή γίνεται αμελητέος και βρίσκουμε

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \qquad (22\text{–}13)$$

Το τελικό μας αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της απόστασης x από τον δίσκο. Αυτό το σωστό αλλά μάλλον εκπληκτικό αποτέλεσμα σημαίνει πως το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε επίπεδη κατανομή φορτίου με άπειρη έκταση είναι *ανεξάρτητο της απόστασης από την κατανομή*. Έτσι, το πεδίο είναι *ομογενές*· είναι παντού κάθετο στην κατανομή και βγαίνει προς τα έξω. Πάλι, δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα άπειρες φορτισμένες επιφάνειες αλλά, αν οι διαστάσεις μιας επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερες από την απόστασή της από το σημείο του πεδίου, το πεδίο είναι σε πολύ καλή προσέγγιση εκείνο που αντιστοιχεί σε άπειρη κατανομή.

Αν το P βρίσκεται στα αριστερά της κατανομής ($x < 0$), αντί για τα δεξιά, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο εκτός από το γεγονός ότι το E κατευθύνεται προς αριστερά αντί για τα δεξιά. Ακόμα, αν το σ είναι αρνητικό, το πεδίο κατευθύνεται προς την κατανομή, αντί να βγαίνει από αυτήν, τόσο στη μία μεριά όσο και στην άλλη.

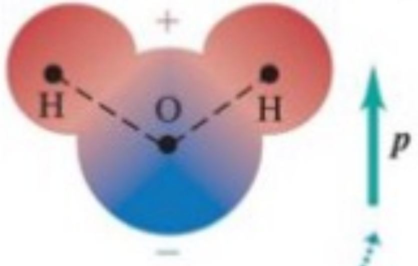
22–18 Εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου στον άξονα ομογενώς φορτισμένου δίσκου.

Ηλεκτρικά Δίπολα

Ηλεκτρικό δίπολο είναι ένα ζεύγος σημειακών φορτίων με ίσα μέτρα και αντίθετα πρόσημα (ένα θετικό φορτίο q και ένα αρνητικό φορτίο $-q$) των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι d.

21.30 (a) Ένα μόριο νερού είναι παράδειγμα ενός ηλεκτρικού διπόλου.
(b) Κάθε δοκιμαστικός σωλήνας περιέχει διάλυμα διαφορετικής ουσίας σε νερό. Η μεγάλη ηλεκτρική διπολική ροπή του νερού καθιστά το μόριο του νερού εξαιρετικό διαλύτη.

(a) Μόριο νερού στο οποίο φαίνεται το θετικό φορτίο ως κόκκινο και το αρνητικό φορτίο ως μπλε.

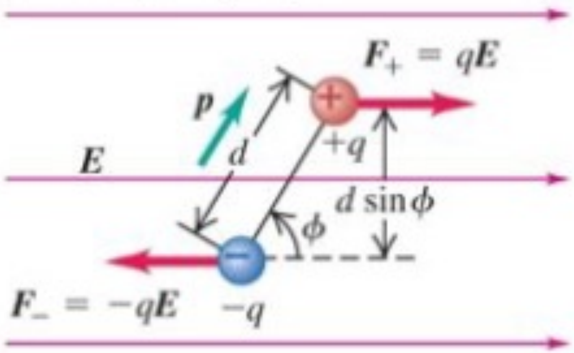


Η ηλεκτρική διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$ κατευθύνεται από το άκρο με αρνητικό πρόσημο προς το άκρο με θετικό πρόσημο.

(b) Διάφορες ουσίες διαλυμένες σε νερό.

$$p = qd \quad \text{(μέτρο της ηλεκτρικής ροπής)} \tag{21.14}$$

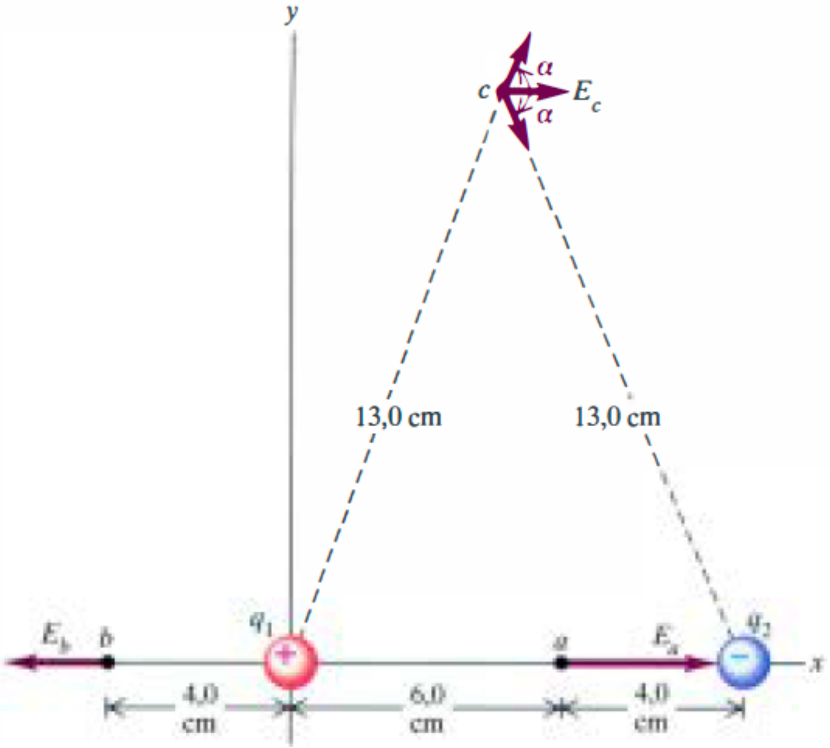
21.31 Η συνισταμένη δύναμη σε αυτό το ηλεκτρικό δίπολο είναι μηδέν, όμως ασκείται ροπή η οποία κατευθύνεται προς τη σελίδα και τείνει να περιστρέψει το δίπολο δεξιόστροφα.



ΑΣΚΗΣΗ 4

Πεδίο ηλεκτρικού διπόλου Τα σημειακά φορτία q_1 και q_2 που ισούνται με +12 nC και −12 nC, αντίστοιχα, τοποθετούνται σε απόσταση 0,10 m το ένα από το άλλο (Σχ. 22–15). Αυτός ο συνδυασμός δύο φορτίων με ίσα μέτρα και αντίθετα πρόσημα λέγεται *ηλεκτρικό δίπολο*·

Να υπολογιστούν τα ηλεκτρικά πεδία που προκαλούνται από αυτά τα φορτία στα σημεία *a*, *b* και *c* του σχήματος.



22–15 Ηλεκτρικό πεδίο σε τρία σημεία *a*, *b* και *c*, που δημιουργείται από τα φορτία q_1 και q_2 που σχηματίζουν ηλεκτρικό δίπολο.

ΛΥΣΗ Στο σημείο *a* το πεδίο $\boldsymbol{E}_1$, που οφείλεται στο θετικό φορτίο q_1, κατευθύνεται προς τα δεξιά και έχει μέτρο

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2}$$

$$= (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}060\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C}.$$

Οι συνιστώσες του $\boldsymbol{E}_1$ είναι

$$E_{1x} = 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad E_{1y} = 0.$$

Το πεδίο, που οφείλεται στο αρνητικό φορτίο q_2, κατευθύνεται επίσης προς τα δεξιά· το μέτρο του είναι

$$E_2 = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}.$$

Οι συνιστώσες του $\boldsymbol{E}_2$ είναι

$$E_{2x} = 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad E_{2y} = 0.$$

Επομένως, στο σημείο *a* έχουμε

$$(E_a)_x = (3{,}0 + 6{,}8) \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad (E_a)_y = 0.$$

και

$$E_a = 9{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \quad \text{προς τα δεξιά},$$

ή

$$\boldsymbol{E}_a = (9{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}.$$

Στο σημείο b, το πεδίο που οφείλεται στο q_1 κατευθύνεται προς τα αριστερά με μέτρο

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}040\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}.$$

Οι συνιστώσες του είναι

$$E_{1x} = -6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad E_{1y} = 0.$$

Το πεδίο που οφείλεται στο q_2 κατευθύνεται προς τα δεξιά με μέτρο

$$E_2 = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}140\ \mathrm{m})^2} = 0{,}55 \times 10^4\ \mathrm{N/C}.$$

Οι συνιστώσες του είναι

$$E_{2x} = 0{,}55 \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad E_{2y} = 0.$$

Επομένως, στο σημείο b έχουμε

$$(E_b)_x = (-6{,}8 + 0{,}55) \times 10^4\ \mathrm{N/C}, \qquad (E_b)_y = 0,$$

και

$$E_b = 6{,}2 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \quad \text{προς τα αριστερά,}$$

ή

$$\boldsymbol{E}_b = (-6{,}2 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}.$$

Στο σημείο c, το μέτρο καθενός διανύσματος είναι

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}13\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C}.$$

Οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων φαίνονται στο σχήμα. Η συνιστώσα x καθενός από αυτά είναι

$$E_x = E\cos\alpha = (6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\left(\tfrac{5}{13}\right) = 2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C}.$$

Το άθροισμα των συνιστωσών y μηδενίζεται εξαιτίας της συμμετρίας της διάταξης. Βρίσκουμε

$$(E_c)_x = 2(2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C}) = 4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C},$$
$$(E_c)_y = 0,$$

και

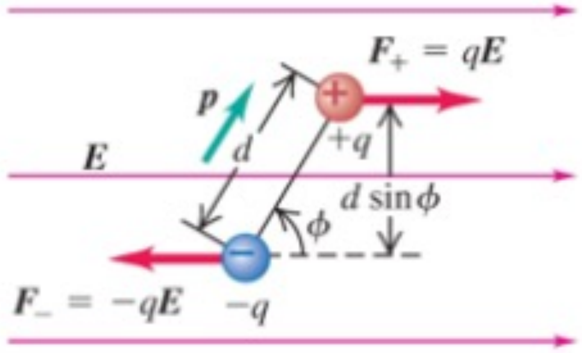
$$E_c = 4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C} \quad \text{προς τα δεξιά,}$$

ή

$$\boldsymbol{E}_c = (4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}.$$

Δύναμη και ροπή σε ηλεκτρικό δίπολο

21.31 Η συνισταμένη δύναμη σε αυτό το ηλεκτρικό δίπολο είναι μηδέν, όμως ασκείται ροπή η οποία κατευθύνεται προς τη σελίδα και τείνει να περιστρέψει το δίπολο δεξιόστροφα.



$$\tau = (qE)(d\sin\phi) \tag{21.13}$$

$$p = qd \qquad \text{(μέτρο της ηλεκτρικής ροπής)} \tag{21.14}$$

Μέτρο της ροπής η οποία ασκείται σε ένα ηλεκτρικό δίπολο

$$\tau = pE\sin\phi \tag{21.15}$$

Μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$

Γωνία μεταξύ $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{E}$

Μέτρο της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}$

Διανυσματική ροπή σε ηλεκτρικό δίπολο

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{21.16}$$

Ηλεκτρική διπολική ροπή

Ηλεκτρικό πεδίο

Δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρικού διπόλου

Όταν μεταβάλλεται ο προσανατολισμός ενός διπόλου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, η ροπή που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο εκτελεί *έργο* σε αυτό με αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας.

$$dW = \tau \, d\phi = -pE\sin\phi \, d\phi$$

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE\sin\phi)\, d\phi$$

$$= pE\cos\phi_2 - pE\cos\phi_1$$

$$U(\phi) = -pE\cos\phi \tag{21.17}$$

Δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού διπόλου σε ηλεκτρικό πεδίο

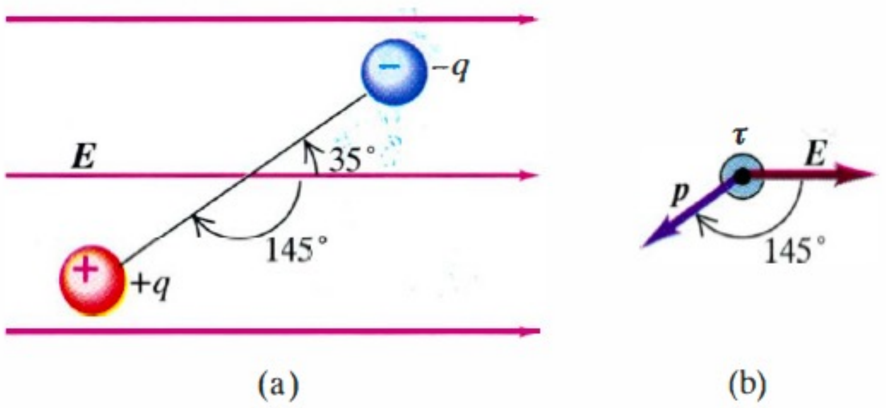
$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} \tag{21.18}$$

Ηλεκτρικό πεδίο

Ηλεκτρική διπολική ροπή

ΑΣΚΗΣΗ 5

Το Σχ. 22–23a παρουσιάζει ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο $5{,}0 \times 10^{5}$ N/C παράλληλο με το επίπεδο του σχήματος. Τα φορτία είναι $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C πάνω στο ίδιο επίπεδο, σε απόσταση 0,125 nm = $0{,}125 \times 10^{-9}$ m. (Προσέξτε ότι τόσο τα φορτία όσο και οι αποστάσεις τους είναι χαρακτηριστικών μοριακών διαστάσεων.) Βρείτε a) τη συνολική δύναμη που εξασκείται από το πεδίο στο δίπολο· b) το μέτρο και την κατεύθυνση της ηλεκτρικής διπολικής ροπής· c) το μέτρο και την κατεύθυνση της ροπής· d) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση αυτή.



(a) (b)

22–23 (a) Ένα ηλεκτρικό δίπολο. (b) Κατευθύνσεις της ηλεκτρικής διπολικής ροπής και της ροπής των δυνάμεων.

ΛΥΣΗ a) Σε κάθε ομογενές πεδίο οι δυνάμεις στα δύο φορτία είναι ίσες και αντίθετες, οπότε η συνολική δύναμη μηδενίζεται.

b) Το μέτρο p της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}$ είναι

$$p = ql = (1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})\,(0{,}125 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})$$
$$= 2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C \cdot m}.$$

Η $\boldsymbol{p}$ κατευθύνεται από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο στις 145° με φορά αυτήν των δεικτών του ρολογιού ως προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (Σχ. 22–23b).

c) Το μέτρο της ροπής είναι

$$\tau = pE \sin\phi = (2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C \cdot m})(5{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{N/C})(\sin 145°)$$
$$= 5{,}7 \times 10^{-24}\ \mathrm{N \cdot m}.$$

Με τον κανόνα του δεξιού χεριού για το διανυσματικό γινόμενο βρίσκουμε πως η ροπή του ζεύγους κατευθύνεται έξω από τη σελίδα. Δηλαδή, έχουμε ροπή που τείνει να ευθυγραμμίσει το $\boldsymbol{p}$ με το $\boldsymbol{E}$.

d) Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U = -pE\cos\phi$$
$$= -(2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C \cdot m})(5{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{N/C})(\cos 145°)$$
$$= 8{,}2 \times 10^{-24}\ \mathrm{J}.$$

https://videos.papazissi.gr/EX21_13/

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Φορτίο και ηλεκτρική ροή– Υπολογισμοί ηλεκτρικής ροής

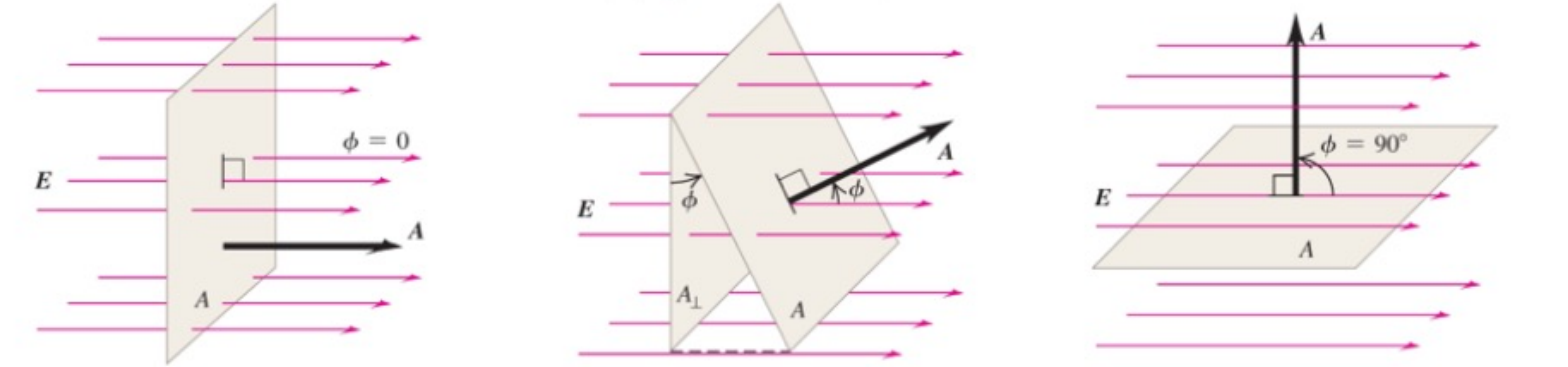
Για να εκφράσουμε την ηλεκτρική ροή μέσα από μία επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A χρησιμοποιούμε την έννοια του διανυσματικού εμβαδού $\boldsymbol{A}$, μιας διανυσματικής ποσότητας μέτρου A και διεύθυνσης κάθετης στην επιφάνεια αυτή.

22.6 Επίπεδη επιφάνεια σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Η ηλεκτρική ροή Φ_E που διαπερνά την επιφάνεια ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ και του διανυσματικού εμβαδού $\boldsymbol{A}$.

(a) Επιφάνεια κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο:
- Τα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A}$ παράλληλα (γωνία μεταξύ $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A}$ είναι $\phi = 0$).
- Η ροή $\Phi_E = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = EA$.

(b) Επιφάνεια υπό κλίση κατά γωνία ϕ ως προς το πεδίο:
- Η γωνία ανάμεσα στα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A}$ είναι ϕ.
- Η ροή $\Phi_E = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = EA\cos\phi$.

(c) Επιφάνεια παράλληλη προς το ηλεκτρικό πεδίο:
- Τα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A}$ είναι κάθετα (γωνία μεταξύ $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A}$ είναι $\phi = 90°$).
- Η ροή $\Phi_E = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = EA\cos 90° = 0$.



Ροή ενός μη ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου δια μέσου καμπύλης επιφάνειας

Στις περιπτώσεις αυτές χωρίζουμε την επιφάνεια σε πολλά στοιχειώδη εμβαδά dA, καθένα από τα οποία έχει μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{n}}$ κάθετο σε αυτό και ένα διανυσματικό εμβαδόν $d\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{n}}\, dA$.
Υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή διαμέσου καθενός από αυτά τα στοιχειώδη εμβαδά και ολοκληρώνουμε τα αποτελέσματα για να υπολογίσουμε την ολική ροή:

Μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$

Συνιστώσα του $\boldsymbol{E}$ κάθετη στην επιφάνεια

Ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας

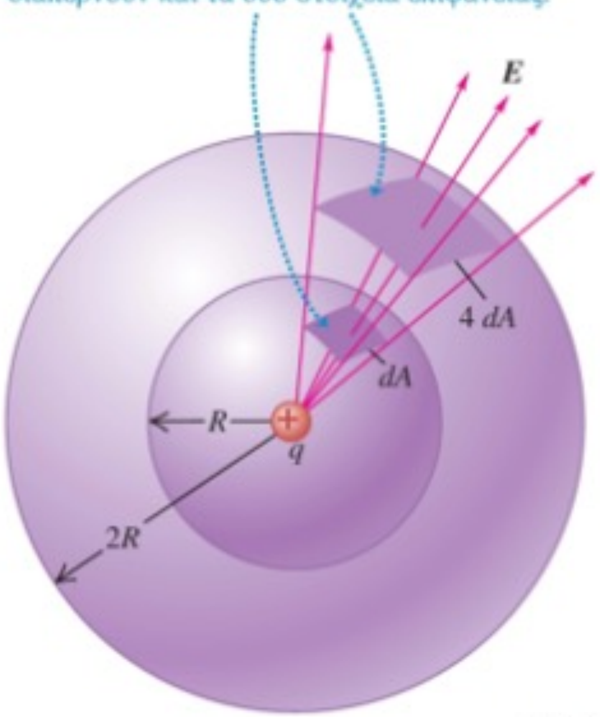
$$\Phi_E = \int E \cos\phi \underbrace{dA}_{\text{Στοιχειώδες εμβαδόν}} = \int E_\perp \underbrace{dA}_{\text{Στοιχειώδες εμβαδόν}} = \int \boldsymbol{E} \cdot \underbrace{d\boldsymbol{A}}_{\text{Διανυσματικό στοιχειώδες εμβαδόν}} \qquad (22.5)$$

Γωνία μεταξύ $\boldsymbol{E}$ και καθέτου στην επιφάνεια

Ονομάζουμε το ολοκλήρωμα αυτό **επιφανειακό ολοκλήρωμα** της συνιστώσας $E_\perp$ σε όλη την επιφάνεια, ή το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS
Σημειακό φορτίο μέσα σε σφαιρική επιφάνεια

22.11 Προβολή ενός στοιχείου επιφάνειας dA μιας σφαίρας ακτίνας R σε μια ομόκεντρη σφαίρα ακτίνας $2R$. Με την προβολή πολλαπλασιάζεται κάθε γραμμική διάσταση επί δύο, έτσι ώστε το στοιχείο επιφάνειας γίνεται $4dA$.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

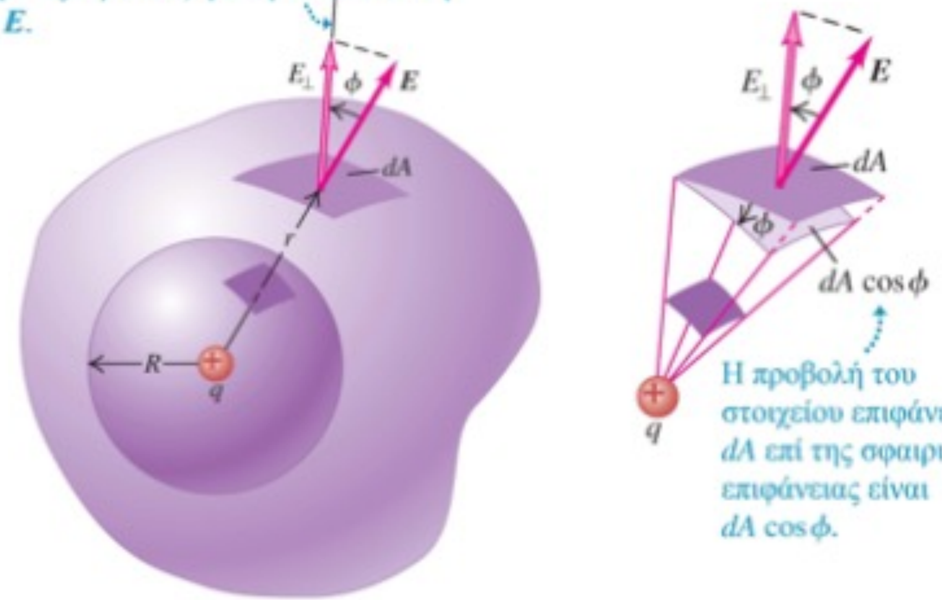
Η ολική ηλεκτρική ροή είναι το γινόμενο του μέτρου του πεδίου επί το ολικό εμβαδόν $A = 4\pi R^2$ της σφαίρας:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (22.6)$$

Η ροή είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα R της σφαίρας. Εξαρτάται μόνο από το φορτίο q που περικλείεται από τη σφαίρα.

Υπολογίζοντας την ηλεκτρική ροή μέσα από τυχούσα κλειστή επιφάνεια

22.12 (a) Η κάθετη στην επιφάνεια προς τα έξω σχηματίζει γωνία ϕ με την κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$.



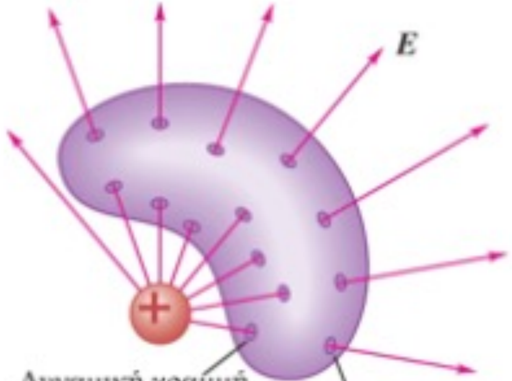
Η προβολή του στοιχείου επιφάνειας dA επί της σφαιρικής επιφάνειας είναι $dA \cos\phi$.

Η ηλεκτρική ροή διαμέσου της στοιχειώδους σφαιρικής επιφάνειας (EdA) είναι ισοδύναμη με την ηλεκτρική ροή διαμέσου της ακανόνιστης στοιχειώδους επιφάνειας $E\, dA \cos\phi$.

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Έτσι η *ολική* ηλεκτρική ροή διαμέσου της ακανόνιστης επιφάνειας, πρέπει να είναι ίση με την ολική ροή διαμέσου της σφαίρας.

22.13 Σημειακό φορτίο έξω από μια κλειστή επιφάνεια. Αν μια δυναμική γραμμή από το εξωτερικό φορτίο εισέρχεται στην επιφάνεια σε κάποιο σημείο, πρέπει να εγκαταλείψει την επιφάνεια σε κάποιο άλλο σημείο.



Δυναμική γραμμή που εισέρχεται στην επιφάνεια

Η ίδια δυναμική γραμμή εξερχόμενη από την επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$