## Σύνοψη Παραδόσεων στα Πλαίσια του Μαθήματος

# ΦΥΣΙΚΗ: Ηλεκτρομαγνητισμός


## Επιμέλεια-Σύνταξη: *Γ. Χ. Ψαρράς*

## Β΄ Εξάμηνο, Τμήμα Γεωλογίας, Πανεπιστημίου Πατρών


Η πλειοψηφία των σχημάτων της σύνοψης που ακολουθεί προέρχεται από το σύγγραμμα*: «Physics for Scientists & Engineers, Raymond A. Serway, 3rd and 6th edition».*

Η σύνοψη αυτή χρησιμοποιείται αποκλειστικά και μόνον για διδακτικούς σκοπούς και προς υποβοήθηση των φοιτητών που παρακολουθούν το αντίστοιχο μάθημα.

# Κεφάλαιο 1ο: Ηλεκτρικά Πεδία

1. Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη ανάμεσα σε φορτισμένα σώματα είναι μία από τις θεμελιώδεις δυνάμεις (αλληλεπιδράσεις) της φύσης.
2. Ο νόμος Coulomb είναι ο θεμελιώδης νόμος, ο οποίος περιγράφει την δύναμη ανάμεσα σε δύο φορτισμένα σώματα.
3. Η έννοια του ηλεκτρικού πεδίου ως περιοχή του χώρου. Το ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται σε κατανομή ηλεκτρικού φορτίου και επιδρά πάνω σε φορτισμένα σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του.

## Ιδιότητες των Ηλεκτρικών Φορτίων:

1. Στην φύση απαντώνται δύο είδη ηλεκτρικών φορτίων (θετικά και αρνητικά).
2. Τα ομώνυμα απωθούνται και τα ετερώνυμα έλκονται.
3. Η δύναμη ανάμεσα στα ηλεκτρικά φορτία είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης, $F \propto \frac{1}{r^2}$.
4. Το φορτίο διατηρείται και μεταφέρεται από ένα σώμα σε άλλο.
5. Το φορτίο είναι κβαντισμένο και απαντάται σε ακέραια πολλαπλάσια του $|e|$.

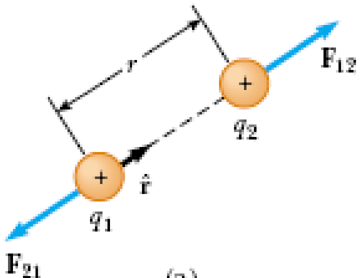
## Μονωτές (ή Διηλεκτρικά) και Αγωγοί:

Αγωγοί ονομάζονται τα υλικά που επιτρέπουν ελεύθερα την κίνηση ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό τους.

Μονωτές ονομάζονται τα υλικά που δεν επιτρέπουν στα ηλεκτρικά φορτία να τα διαπεράσουν.

## Νόμος του Coulomb:

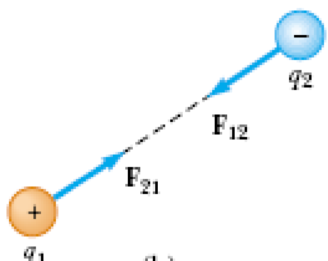
$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$$




(a)

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{12} \quad ,$$

όπου $\hat{r}_{12}$ μοναδιαίο διάνυσμα από το $q_2$ στο $q_1$



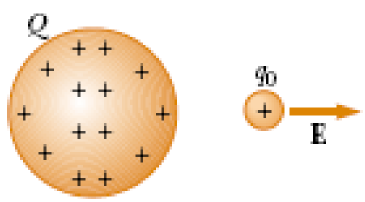

(b)

**Αρχή της επαλληλίας ή της υπέρθεσης στην ηλεκτροστατική:** η ολική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο ισούται με την διανυσματική συνισταμένη των δυνάμεων που ασκεί καθένα από τα άλλα φορτία πάνω σε αυτό.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

## Το Ηλεκτρικό Πεδίο:

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου *E* (ή αλλιώς, το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου) σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου είναι εξ ορισμού ίσο προς το πηλίκον της δύναμης η οποία ασκείται πάνω σε ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο $q_0$, που βρίσκεται στο σημείο αυτό, διά του φορτίου αυτού, $q_0$.

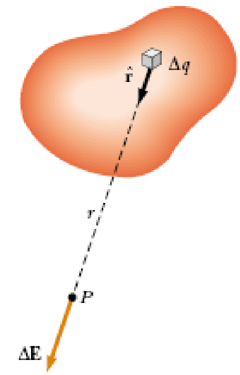



$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Με χρήση του νόμου του Coulomb είναι: $$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

# Το Ηλεκτρικό Πεδίο Συνεχούς Κατανομής Φορτίου:

$$\Delta\vec{E} = k\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r} \rightarrow \vec{E} \approx k\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^{\,2}}\hat{r}_i$$




Αν $\Delta q \rightarrow 0$, τότε

$$\vec{E} = k\lim_{\Delta q\rightarrow 0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^{\,2}}\hat{r}_i \Rightarrow \vec{E} = k\int\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Χωρική πυκνότητα φορτίου: $\rho \equiv \frac{Q}{V}$ $\quad (\mathrm{C/m^3})$

Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου: $\sigma \equiv \frac{Q}{A}$ $\quad (\mathrm{C/m^2})$

Γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda \equiv \frac{Q}{l}$ $\quad (\mathrm{C/m})$

Για φορτίο μη ομοιόμορφα κατανεμημένο ισχύει:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}, \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}, \quad \lambda = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$$

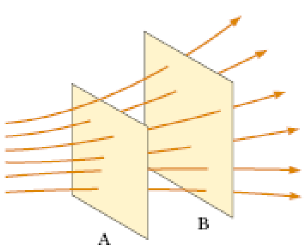
## Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου (ή Δυναμικές Γραμμές) :

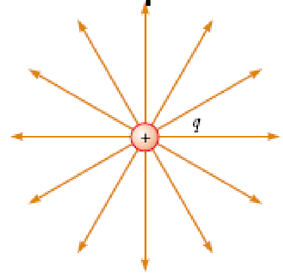
Τρόπος αναπαράστασης του ηλεκτρικού πεδίου. Κανόνες:

1. Η διεύθυνση του διανύσματος *E* εφάπτεται με τις δυναμικές γραμμές σε κάθε σημείο τους.
2. Ο αριθμός των γραμμών του πεδίου, που διέρχονται μέσα από μία μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές, είναι ανάλογος του μέτρου του πεδίου στην περιοχή αυτή.

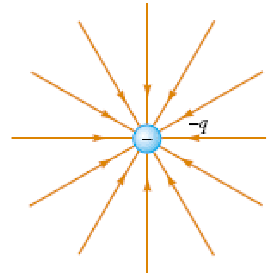
Κανόνες χάραξης δυναμικών γραμμών:

1. Οι γραμμές εκκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά ή στο άπειρο όταν υπάρχει πλεονάζον φορτίο.
2. Ο αριθμός των γραμμών που απομακρύνονται από ένα θετικό φορτίο ή καταλήγουν σε ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογος προς το μέτρο του φορτίου.
3. Δύο γραμμές δεν τέμνονται ποτέ.

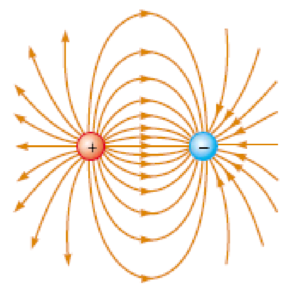


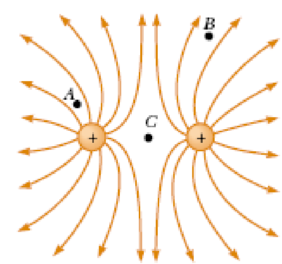



(a)



(b)





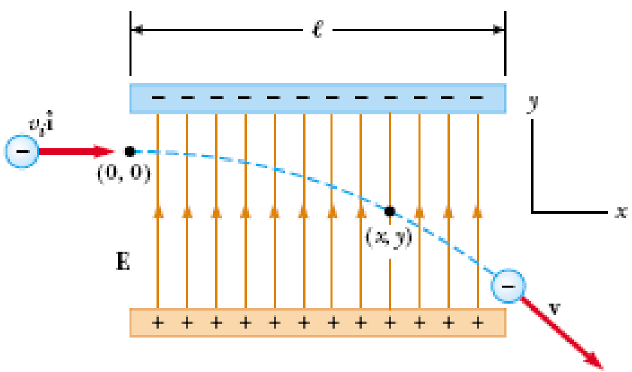
## Κίνηση Φορτισμένων Σωματίων μέσα σε Ομογενές Πεδίο:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Αν το πεδίο είναι ομογενές ($\vec{E} = \sigma\tau\alpha\theta.$), τότε $\vec{a} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Αν το φορτίο είναι θετικό, η επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν το φορτίο είναι αρνητικό, τότε η επιτάχυνση κατευθύνεται αντίθετα από το ηλεκτρικό πεδίο.




$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{eE}{m}\hat{j}$$

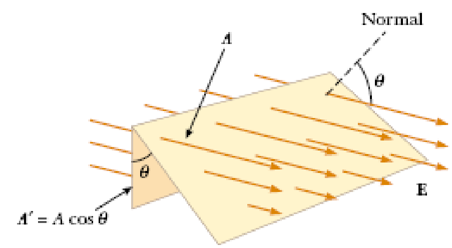
$$\upsilon_x = \upsilon_0 = \sigma\tau\alpha\theta., \qquad x = \upsilon_0 t$$

$$\upsilon_y = at = -\frac{eE}{m}t, \qquad y = \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

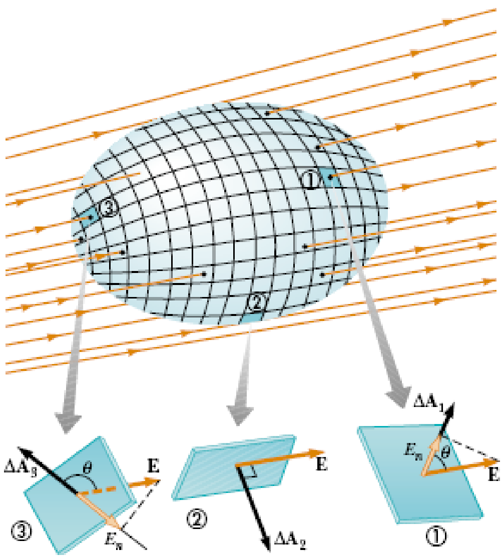
## Ηλεκτρική Ροή ή Ροή Ηλεκτρικού Πεδίου:

Η ηλεκτρική ροή (ή ισοδύναμα ροή ηλεκτρικού πεδίου) είναι το μέτρο που περιγράφει τον αριθμό των γραμμών ηλεκτρικού που διαπερνούν μία επιφάνεια.

Όταν η επιφάνεια περικλείει ηλεκτρικό φορτίο, ο αριθμός των γραμμών που την διαπερνούν είναι ανάλογος προς το εγκλωβισμένο φορτίο. Ο αριθμός των γραμμών είναι ανεξάρτητος από την επιφάνεια που περιέχει το φορτίο.




$$\Phi = EA\cos\theta$$

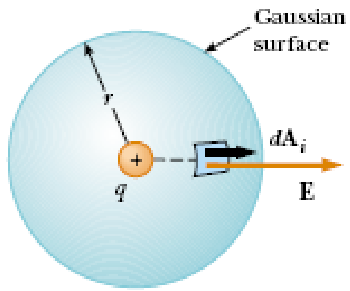



$$\Phi \equiv \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_{\varepsilon\pi\phi.} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint E_n \mathrm{d}A$$

# Ο Νόμος του Gauss:

Ο νόμος του Gauss συνδέει την καθαρή ηλεκτρική ροή η οποία διαπερνά μία κλειστή επιφάνεια και το ηλεκτρικό φορτίο που περιέχεται στην επιφάνεια αυτή.



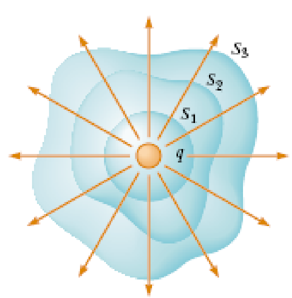

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

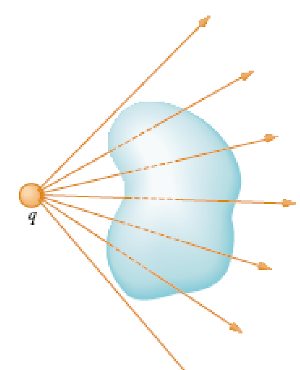
$$\Phi_C = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint E_n \mathrm{d}A = \oint E\mathrm{d}A = E\oint \mathrm{d}A = EA$$

$$\Phi_C = k\frac{q}{r^2}4\pi r^2 \Rightarrow \Phi_C = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Η καθαρή ηλεκτρική ροή $\Phi_C$ δια μέσου μιας οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της επιφάνειας.

Η ολική ροή που διαπερνά μία κλειστή επιφάνεια η οποία δεν περιέχει ηλεκτρικό φορτίο είναι μηδενική.



Ο **νόμος του Gauss** ορίζει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μία κλειστή γκαουσιανή επιφάνεια ισούται με το πηλίκον του ολικού φορτίου που περιέχει η επιφάνεια διαιρεμένου δια του $\varepsilon_0$.

$$\Phi_C = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

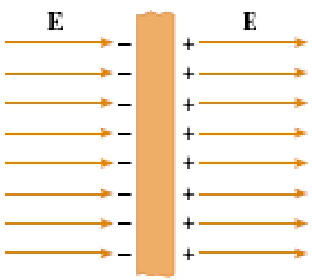
όπου $q_{in}$ το ολικό φορτίο (το αλγεβρικό άθροισμα όλων των φορτίων) που περιέχεται στην επιφάνεια Gauss και ***E*** το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιαδήποτε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας.

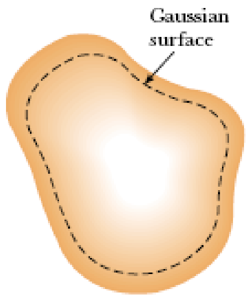
Ο νόμος του Gauss επιτρέπει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου Ε για μία δεδομένη κατανομή φορτίου. Ο νόμος του Gauss διευκολύνει μόνο στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου είναι πολύ συμμετρική.

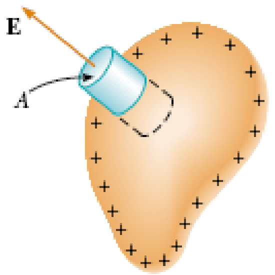
Η επιφάνεια Gauss την οποία επιλέγουμε πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία με εκείνην της κατανομής του φορτίου.

## Ιδιότητες Αγωγού σε Ηλεκτροστατική Ισορροπία:

1. Παντού στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό.
2. Όλο το πλεόνασμα του ηλεκτρικού φορτίου του αγωγού (το καθαρό ηλεκτρικό φορτίο) βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού.
3. Το πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο ίσο προς $\sigma/\varepsilon_0$, όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην περιοχή αυτή.
4. Εάν ο αγωγός έχει ακανόνιστο σχήμα, το φορτίο τείνει να συσσωρευθεί στα μέρη όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μικρότερη (ακίδες ή αιχμηρά σημεία).







# Κεφάλαιο 3ο: Το Ηλεκτρικό Δυναμικό

Η δύναμη που περιγράφει ο νόμος του Coulomb είναι δύναμη διατηρητική (συντηρητική). Συνεπώς τα ηλεκτροστατικά φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν μέσω της έννοιας της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Ορίζοντας ένα βαθμωτό μέγεθος το ηλεκτρικό δυναμικό διάφοροι υπολογισμοί διευκολύνονται.

## Διαφορά Δυναμικού και Ηλεκτρικό Δυναμικό:

Δοκιμαστικό φορτίο $q_0$ στο εσωτερικό ηλεκτροστατικού πεδίου ***E*** δέχεται δύναμη $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Το έργο που παράγει η ηλεκτροστατική δύναμη κατά την μετακίνηση του $q_0$ κατά απειροστή απόσταση d*s* είναι:

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Το έργο που παράγει μία διατηρητική δύναμη ισούται με το αρνητικό (αντίθετο) της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας:

$$\mathrm{d}U = -q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad \text{ή} \quad \Delta U = U_B - U_A = -q_0\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

ή

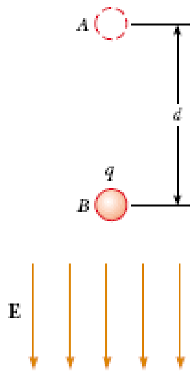
$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

Το **ηλεκτρικό δυναμικό** σε κάποιο τυχαίο σημείο ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγεται ή καταναλώνεται (από μία εξωτερική δύναμη) κατά την μεταφορά ενός θετικού δοκιμαστικού φορτίου από το άπειρο στο σημείο αυτό.

$$V_P = -\int_\infty^{P} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

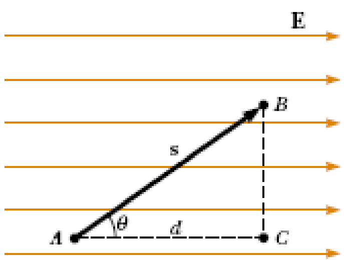
# Διαφορές Δυναμικού σε Ομογενές Πεδίο:

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_{\mathrm{A}}^{B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\mathrm{A}}^{B} E(\cos 0)\mathrm{d}s = -\int_{\mathrm{A}}^{B} E\cdot \mathrm{d}s = -E\int_{\mathrm{A}}^{B} \mathrm{d}s = -Ed$$




Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει πως το σημείο Β βρίσκεται σε χαμηλότερο δυναμικό από το Α, $V_B < V_A$.

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$



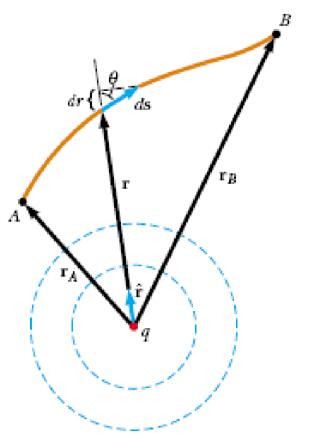

$$\Delta V = -\int_{\mathrm{A}}^{B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\mathrm{A}}^{B} E\cdot \mathrm{d}s = -E\int_{\mathrm{A}}^{B} \mathrm{d}s = -Ed$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E}\cdot \vec{s}$$

Όλα τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε οποιοδήποτε επίπεδο που είναι κάθετο στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έχουν το ίδιο δυναμικό.

Μία επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό ονομάζεται ισοδυναμική.

## Το Ηλεκτρικό Δυναμικό και Ηλεκτρική Ενέργεια που Δημιουργούνται από Σημειακά Φορτία:




$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

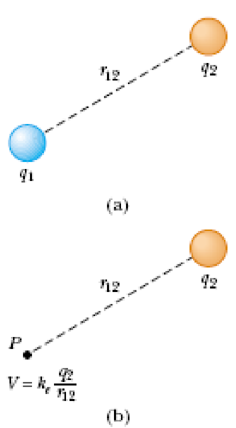
$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s}$$

$$\hat{r}\cdot d\vec{s} = ds\cos\theta \qquad |\hat{r}| = 1$$

$ds\cos\theta$ είναι η προβολή του $d\vec{s}$ στο $\vec{r}$ .

Έτσι: $ds\cos\theta = dr$

$$V_B - V_A = -\int E_r dr = -kq\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = \frac{kq}{r}\Bigg|_{r_A}^{r_B} \Rightarrow V_B - V_A = kq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$




$$V = kq\frac{1}{r}$$

Δυναμικό που δημιουργείται από σημειακό φορτίο *q* σε απόσταση *r*.

$$U = q_2V_1 = k\frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια δύο φορτίων.

## Το Ηλεκτρικό Δυναμικό Συνεχούς Κατανομής Φορτίου:

$$\mathrm{d}V = k\frac{\mathrm{d}q}{r} \Rightarrow V = k\int \frac{\mathrm{d}q}{r} \qquad \text{ή} \qquad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

## Εξαγωγή του Ε από το Ηλεκτρικό Δυναμικό :

$$dV = -\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \rightarrow E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \text{ή} \quad E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

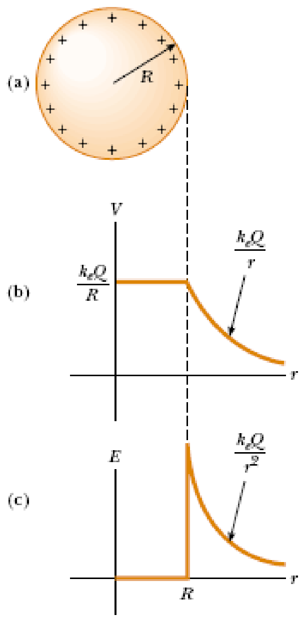
Το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με το αρνητικό της παραγώγου του δυναμικού ως προς κάποια συντεταγμένη.

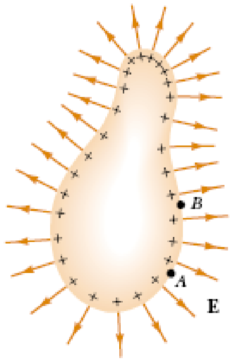
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ή αλλιώς:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

## Το Δυναμικό Φορτισμένου Αγωγού:




Στην επιφάνεια:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E ds \cos 90 = 0$$

Στο εσωτερικό:

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = 0$$

Η επιφάνεια ενός ηλεκτροστατικά ισορροπούντος αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Αφού το πεδίο είναι μηδενικό μέσα στον αγωγό, συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό είναι σταθερό παντού στο εσωτερικό του αγωγού και έχει την ίδια τιμή με την τιμή που έχει στην επιφάνεια του αγωγού.

# Κεφάλαιο 4ο: Χωρητικότητα και Διηλεκτρικά

## Ορισμός της Χωρητικότητας:

Ορίζουμε ότι η χωρητικότητα C, ενός πυκνωτή ισούται με το πηλίκον της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους δύο αγωγούς δια της απόλυτης τιμής της διαφοράς δυναμικού των δύο αγωγών.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή περιγράφει την ικανότητά του να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

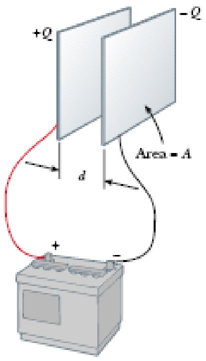
Χωρητικότητα μονωμένου σφαιρικού αγωγού:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k\dfrac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

όπου R η ακτίνα του αγωγού.

# Υπολογισμός της Χωρητικότητας:

Πυκνωτής με επίπεδους και παράλληλους οπλισμούς




$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

η ροή διαπερνά και τις δύο βάσεις της θεωρούμενης κυλινδρικής επιφάνειας Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{in} \Rightarrow \varepsilon_0 E_1 2A = Q \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{2A\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

όμοια $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\left.\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{V}{d} \Rightarrow V = Ed \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{A\varepsilon_0} d} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

## **Συνδεσμολογία Πυκνωτών:**

Παράλληλη συνδεσμολογία

$$\left.\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ V &= V_1 = V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$$

Συνδεσμολογία εν σειρά

$$\left.\begin{aligned} Q &= Q_1 = Q_2 \\ V &= V_1 + V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

## **Ενέργεια Αποθηκευμένη σε έναν Φορτισμένο Πυκνωτή:**

Έστω πυκνωτής με φορτίο $q$ κάποια χρονική στιγμή, κατά την φόρτισή του.

$$V = \frac{q}{C}$$

Το έργο που απαιτείται για την μεταφορά φορτίου d$q$ από τον οπλισμό που έχει φορτίο $-q$ στον οπλισμό με φορτίο $q$ είναι:

$$\mathrm{d}W = V\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

Άρα το συνολικό έργο για την φόρτιση του πυκνωτή από $q$=0 σε $q$=$Q$ είναι:

$$W = \int_0^Q \frac{1}{C} q\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Γενίκευση:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AdE^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{V}E^2$$

$$u = \frac{U}{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

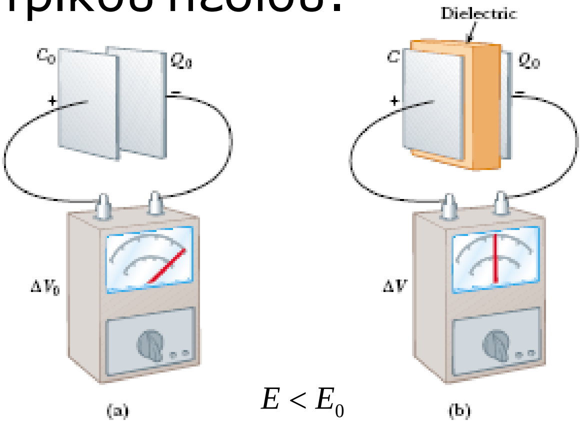
όπου V ο όγκος.

Η πυκνότητα ενέργειας οποιουδήποτε ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

## Πυκνωτές με Διηλεκτρικά:

Τα διηλεκτρικά είναι υλικά που δεν είναι αγωγοί του ηλεκτρισμοί και μπορούν να πολώνονται (αποκτούν μορφή ηλεκτρικού διπόλου) κάτω από την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου.

$$E < E_0$$




$$\left.\begin{aligned} E &= Vd \\ E_0 &= V_0 d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{\kappa}$$

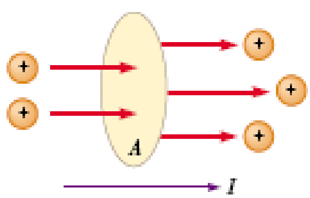
όπου $\kappa$ η σχετική διηλεκτρική σταθερά.

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q_0}{V_0} \Rightarrow C = \kappa C_0$$

# Κεφάλαιο 5ο: Ρεύμα και Αντίσταση

## Ηλεκτρικό Ρεύμα:

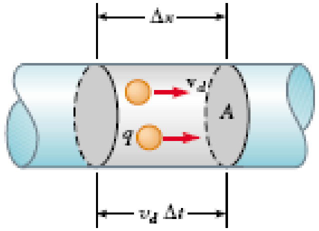
Ορίζουμε ότι το ρεύμα ισούται με τον ρυθμό με τον οποίο το φορτίο διέρχεται διαμέσου μιας κάθετης επιφάνειας ως προς την ροή του. Έστω $\Delta Q$ το φορτίο που διαρρέει την επιφάνεια κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t$. Το μέσο ρεύμα $I_{av}$ ισούται με το πηλίκον του φορτίου προς το διαρρεύσαν χρονικό διάστημα.




$$I_{av} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Ορίζουμε το στιγμιαίο ρεύμα, ή ένταση του ρεύματος, ή ρεύμα ως το όριο του μέσου ρεύματος, όταν $\Delta t \rightarrow 0$

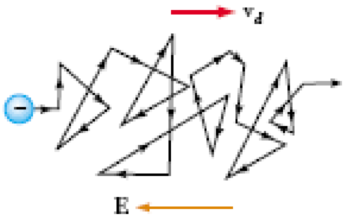
$$I \equiv \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$




$$\mathrm{V} = A\Delta x$$

Έστω $n$ ο αριθμός ανά μονάδα όγκου, φορέων ηλεκτρικού φορτίου.

$$\left.\begin{aligned} \Delta Q = n\mathrm{V}q = n(A\Delta x)q \\ \Delta x = v_d \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta Q = (nAv_d\Delta t)q$$




$$\text{ή} \qquad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nAv_d q$$

$v_d$ η ταχύτητα μετατόπισης ή διολίσθησης.

## Αντίσταση και ο Νόμος του Ohm:

Έστω αγωγός διατομής A που διαρρέεται από ρεύμα I. Ορίζουμε ότι η πυκνότητα ρεύματος J στον αγωγό είναι το ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας. Δεδομένου ότι:

$$I = nAv_d q$$ η πυκνότητα ρεύματος είναι $$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d$$

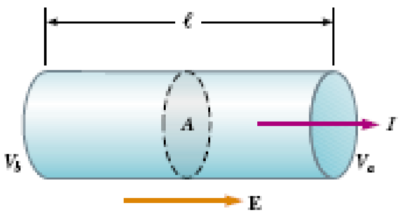
Εν γένει η πυκνότητα ρεύματος είναι διανυσματικό μέγεθος: $$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Όταν υπάρχει διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα αγωγού, τότε αμέσως δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο ***E*** και πυκνότητα ρεύματος ***J***. Εάν η διαφορά δυναμικού είναι σταθερή, τότε και το ρεύμα του αγωγού είναι σταθερό. Πολύ συχνά η πυκνότητα ρεύματος ενός αγωγού είναι ανάλογη προ το ηλεκτρικό πεδίο του αγωγού. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

$\sigma$ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού του αγωγού.

Ο **νόμος του Ohm** ορίζει ότι για πολλά υλικά (συμπεριλαμβανομένων και των περισσότερων μετάλλων) ο λόγος της πυκνότητας του ρεύματος προς το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσος με την σταθερά σ και ανεξάρτητος από το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το ρεύμα.




$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\int_0^l dx = El$$

$$\Delta V = V = El$$

$$\left.\begin{aligned} J &= \sigma E = \sigma\frac{V}{l} \\ J &\equiv \frac{I}{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \frac{Jl}{\sigma} = \left(\frac{l}{\sigma A}\right) I \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{l}{\sigma A}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} = \frac{V}{I} \quad \text{ή} \quad R = \rho\frac{l}{A} = \frac{V}{I}$$

ρ=1/σ η ειδική αντίσταση του υλικού.

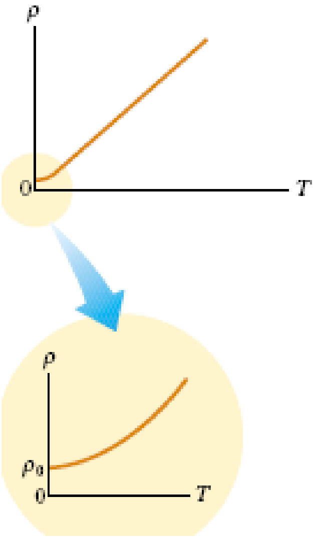
## Ειδική Αντίσταση – Εξάρτηση από την Θερμοκρασία:

$$\rho = \rho_0[1+\alpha(T - T_0)]$$

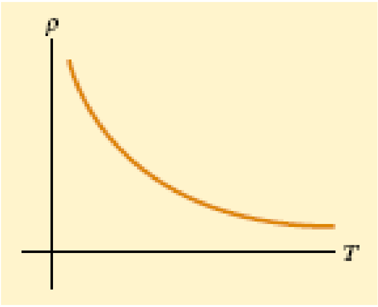
$\rho_0$ η ειδική αντίσταση σε θερμοκρασία αναφοράς $T_0$ και α ο θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης.

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

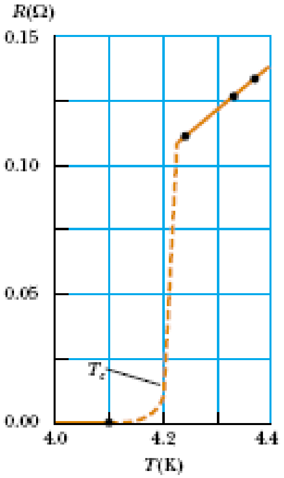
$$R = R_0[1+\alpha(T - T_0)]$$




Μέταλλο

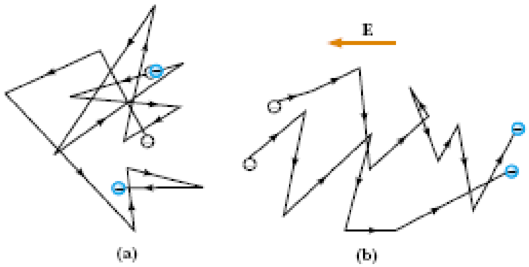



Ημιαγωγός




Υπεραγωγός

# Ένα Μοντέλο Ηλεκτρικής Αγωγιμότητας:




Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια απουσία πεδίου εκτελούν τυχαίες θερμικές κινήσεις, με ταχύτητα μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων της τάξεως των $10^6$m/s. Παρουσία πεδίου, πέραν από την τυχαία θερμική κίνηση, εκτελούν και προσανατολισμένη κίνηση (διολίσθηση). Η μέση τιμής της ταχύτητας διολίσθησης είναι της τάξεως των $10^{-4}$m/s.

Έστω ελεύθερο ηλεκτρόνιο *m*, *q* σε πεδίο ***E***.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = q\vec{E} \\ \vec{F} = m\vec{\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Η επιτάχυνση δρα μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων.

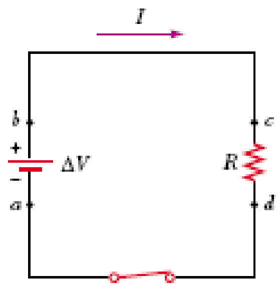
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}t = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t, \qquad \left\langle v_0 \right\rangle = 0$$

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m}\tau$$

*τ* ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων.

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} J = \dfrac{nq^2E}{m}\tau \\ J = \sigma E \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \qquad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{nq^2\tau}$$

## Ηλεκτρική Ενέργεια και Ισχύς:




Καθώς το ηλεκτρικό φορτίο κινείται διαμέσου της πηγής κερδίζει ενέργεια (ηλεκτρική δυναμική) $V\Delta Q$, ενώ η χημική ενέργεια της πηγής ελαττώνεται κατά $\Delta U = q\Delta V$. Από το c στο d χάνεται ηλεκτρική δυναμική ενέργεια.

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV$$

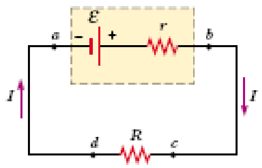
ή $$P = IV$$

ή $$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

# Κεφάλαιο 6ο: Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

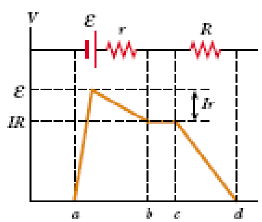
## Ηλεκτρεγερτική Δύναμη:

Πηγή ΗΕΔ είναι κάθε συσκευή που αυξάνει την δυναμική ενέργεια των φορτίων τα οποία διαρρέουν το κύκλωμα. Η ΗΕΔ, $\mathcal{E}$, μιας πηγής περιγράφει το έργο που παράγεται ανά μονάδα φορτίου και στο SI μονάδα της είναι το volt.



(a)

$$\left.\begin{array}{l} V = \mathcal{E} - Ir \\ V = IR \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} = IR + Ir \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$



(b)

$$I\mathcal{E} = I^2 R + I^2 r$$ Κατανάλωση Ισχύος

## Συνδεσμολογία Πυκνωτών:

Παράλληλη συνδεσμολογία:
V κοινό

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$

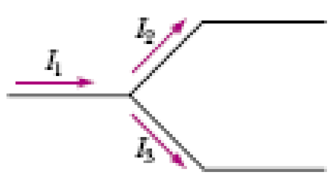
Συνδεσμολογία εν σειρά:
I κοινό

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots$$

## Οι Κανόνες του Kirchhoff:

1. Το άθροισμα των ρευμάτων που συρρέουν προς έναν κόμβο ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που απομακρύνονται από τον κόμβο.
2. Το αλγεβρικό άθροισμα των μεταβολών δυναμικού κατά μήκος όλων των στοιχείων γύρω από έναν οποιαδήποτε κλειστό βρόχο είναι μηδενικό.

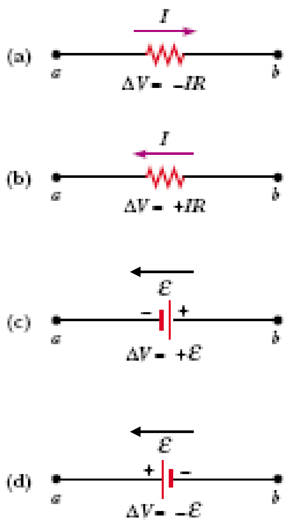
   Ο πρώτος κανόνας είναι διατύπωση της αρχής τη διατήρησης του φορτίου.

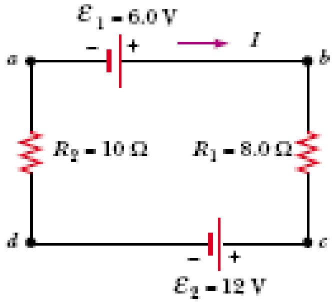



$$I_1 = I_2 + I_3$$

Ο δεύτερος κανόνας είναι αποτέλεσμα της αρχής της διατήρησης της ενέργειας. Δηλαδή, καθώς ένα φορτίο κινείται γύρω-γύρω σε έναν κλειστό βρόχο (δηλαδή το φορτίο καταλήγει εκεί από όπου ξεκίνησε), κερδίζει τόση ενέργεια όση χάνει. Με άλλα λόγια, την ενέργεια που κερδίζει διαρρέοντας την πηγή την χάνει όταν διαπεράσει τον εξωτερικό φόρτο.

$$\sum \Delta V_i = 0$$



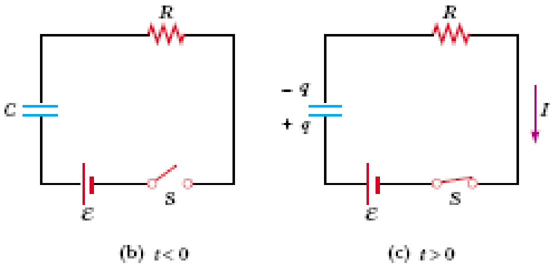




$$\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

# Κυκλώματα RC:

## (α) Φόρτιση Πυκνωτή

β′ κανόνας του Kirchhoff: $\mathcal{E} - IR - \dfrac{q}{C} = 0$

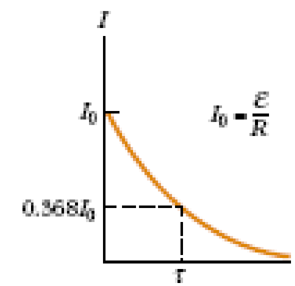



$I(t)$, $q(t)$, όταν

$$t = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C}\right] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

ή $$-\frac{1}{C}I - R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}I = 0$$




$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}I \Rightarrow \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{I_0}^{I}\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-t/RC} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$ ή $$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

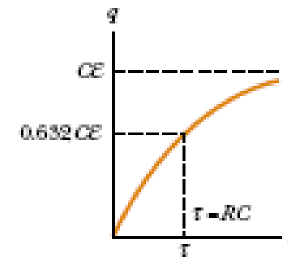
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \Rightarrow \mathrm{d}q = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^q \mathrm{d}q = \frac{\mathcal{E}}{R}\int_0^t e^{-t/RC}\mathrm{d}t \Rightarrow \backslash$$

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(-RC)\int_0^t e^{-t/RC}\mathrm{d}(-t/RC) \Rightarrow$$

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(-RC)e^{-t/RC}\Big|_0^t \Rightarrow q(t) = -\mathcal{E}C\left[e^{-t/RC} - 1\right]$$

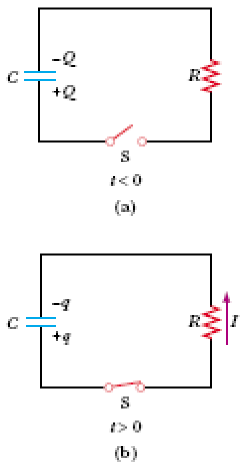
$$\left.\begin{array}{l} \text{ή} \quad q(t) = \mathcal{E}C\left[1 - e^{-t/RC}\right] \\ \\ q_0 = \mathcal{E}C \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q(t) = q_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

μέγιστο φορτίο



# Κυκλώματα RC:

## (β) Εκφόρτιση Πυκνωτή




$$\left.\begin{aligned} V_C - IR = 0 \\ C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{q}{C} = IR \\ I = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Ρυθμός μείωσης του $I$.

$$-R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\int_Q^0 \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\text{ή} \quad \frac{q}{Q} = e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{q(t) = Qe^{-t/RC}}$$

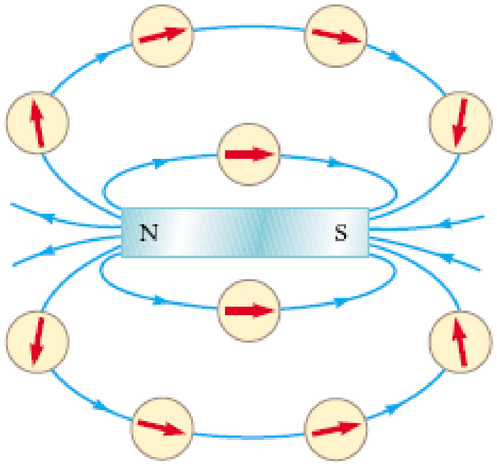
$$I(t) = -\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I(t) = -Q\frac{-1}{RC}e^{-t/RC} \Rightarrow I(t) = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC} \Rightarrow$$

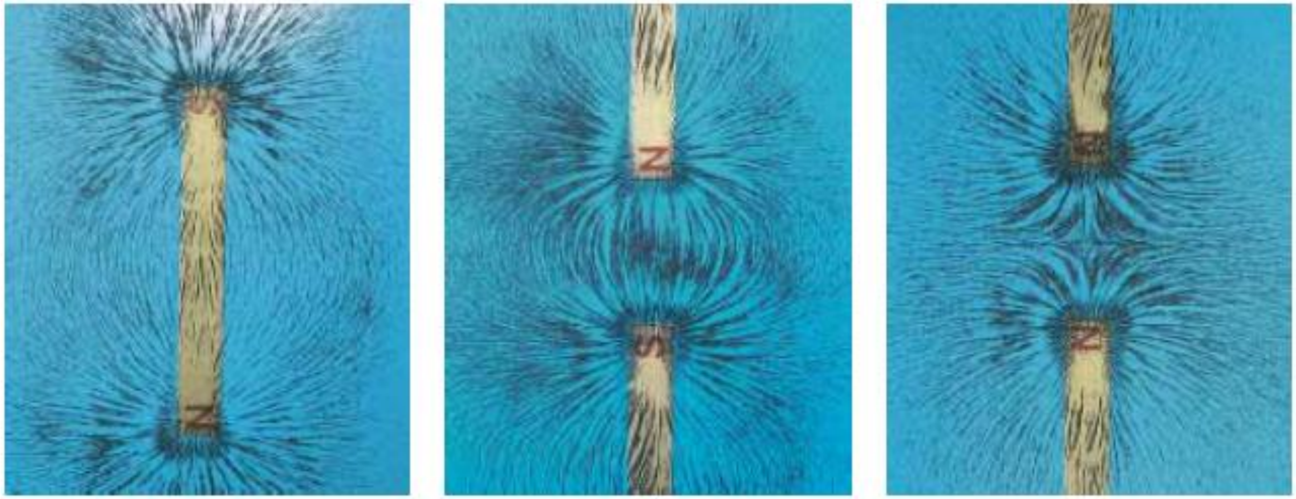
$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$

$$I_0 = \frac{Q}{RC}$$ Το αρχικό ρεύμα

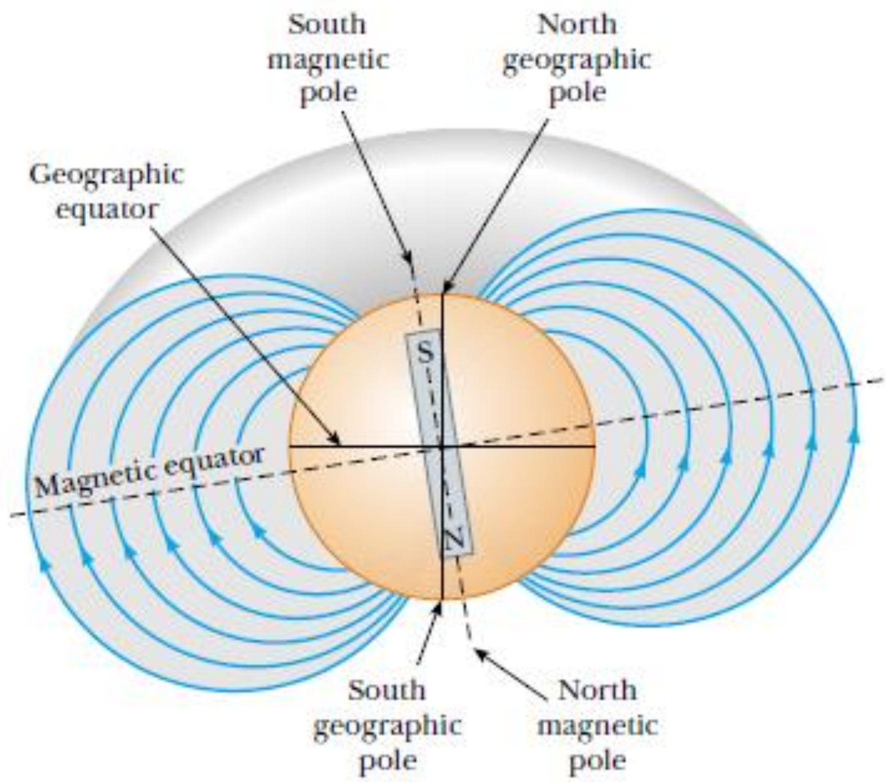
# Κεφάλαιο 7ο: Μαγνητικά Πεδία

Δεν έχει απομονωθεί **μαγνητικό μονόπολο**. Οι μαγνητικοί πόλοι παρατηρούνται πάντα σε ζεύγη.



# Το Μαγνητικό Πεδίο της Γης



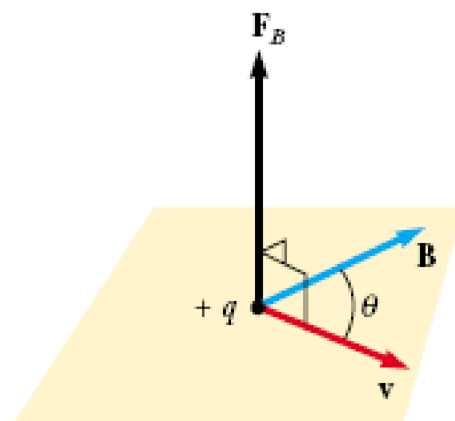
# Ορισμός και Ιδιότητες του Μαγνητικού Πεδίου

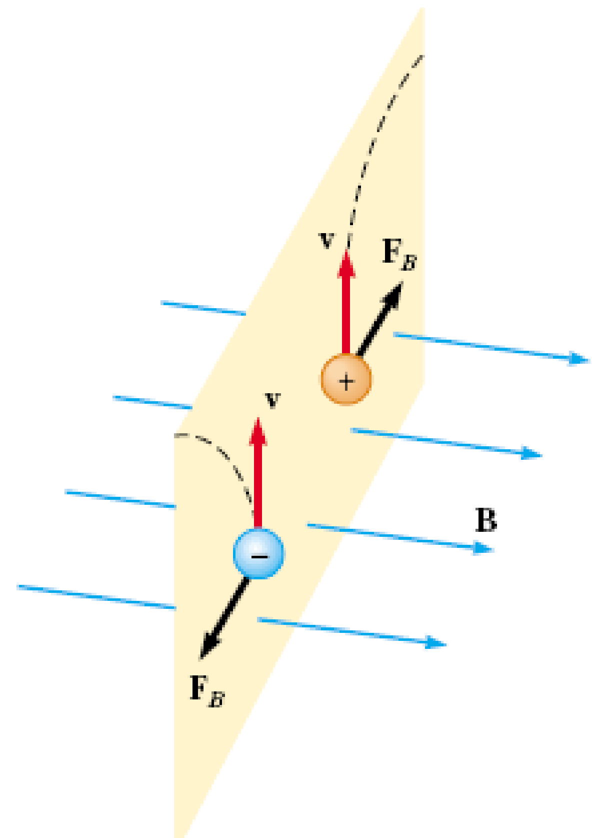
Ορίζουμε το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε κάποιο σημείο του χώρου χρησιμοποιώντας την μαγνητική δύναμη την οποία υφίσταται κάποιο κατάλληλο δοκιμαστικό υπόθεμα. Το δοκιμαστικό υπόθεμα είναι είναι ένα φορτισμένο σωμάτιο που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ .

**Δύναμη Laplace:**

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

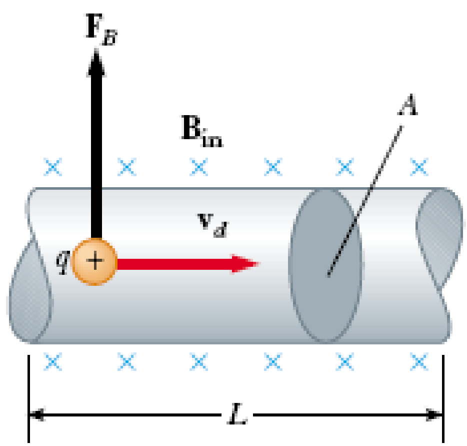
[B]=Wb/m$^2$=T=10$^4$ G



# Μαγνητική Δύναμη σε Αγωγό που Διαρρέεται από Ρεύμα

Εφόσον ένα μοναχικό φορτισμένο σωμάτιο υπόκειται στην μαγνητική δύναμη, όταν κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, είναι λογικό να αναμένεται ότι ένα σύρμα (ρευματοφόρος αγωγός) που διαρρέεται από ρεύμα θα υπόκεινται σε μαγνητική δύναμη όταν τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο.




Ο όγκος του τμήματος του αγωγού είναι:

$$V = A \cdot l$$

Αν n το πλήθος των φορέων φορτίου ανά μονάδα όγκου τότε, η ολική μαγνητική δύναμη που ασκείται στο τμήμα l του αγωγού είναι:

$$\vec{F} = (q\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}) \cdot nV = (q\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}) \cdot nAl$$

$$\vec{F} = (q\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}) \cdot nV = (q\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}) \cdot nAl$$

Όμως το ρεύμα στον αγωγό είναι (βλ. Κεφ. 5): $I = nq\upsilon_d A$

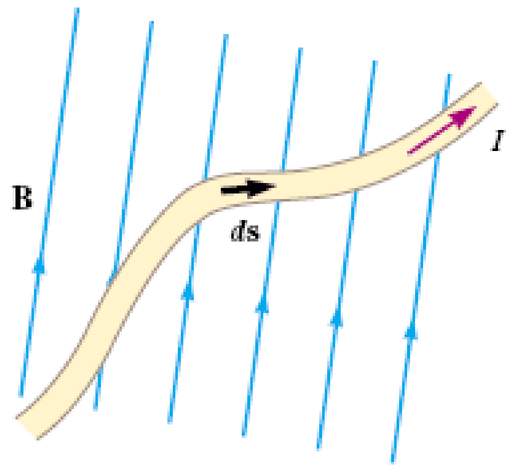
Αναδιατάσσοντας έχουμε: $\vec{F} = \underbrace{nqAl}_{I}\,\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}$

ή

$$\boxed{\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}}$$

όπου $\vec{l}$ διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση του ρεύματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι η προηγούμενη σχέση ισχύει μόνο στην περίπτωση **ευθύγραμμου τμήματος σύρματος** στο εσωτερικό ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

Έστω τμήμα αγωγού τυχαίου σχήματος, αλλά σταθερής διατομής, στο εσωτερικό μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$

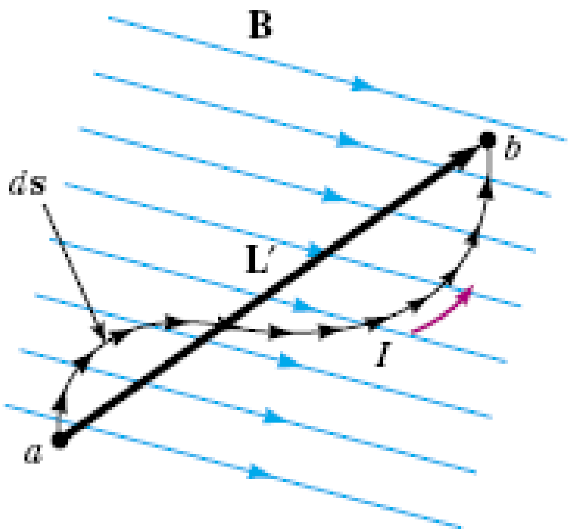



$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}$$

Τα όρια *a* και b αναφέρονται στα άκρα του αγωγού.

## Περίπτωση Ι:

Έστω $\vec{B} = \text{σταθερό}$

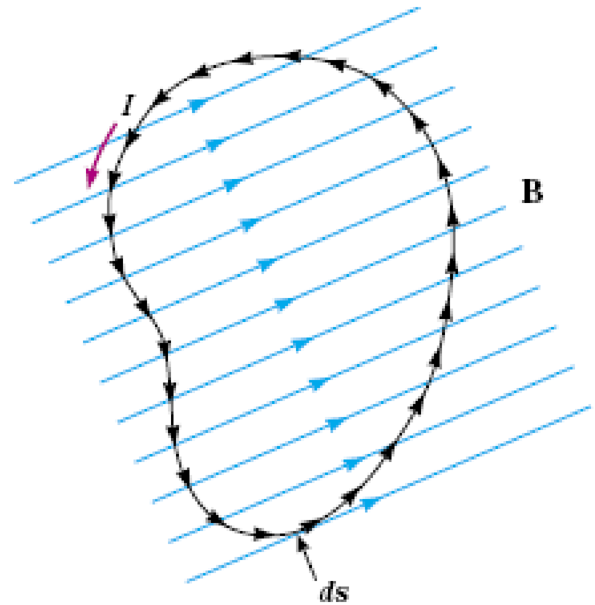



$$\vec{F} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} = I\left(\int_a^b d\vec{s}\right) \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = I\vec{L}' \times \vec{B}$$

## Περίπτωση ΙΙ:

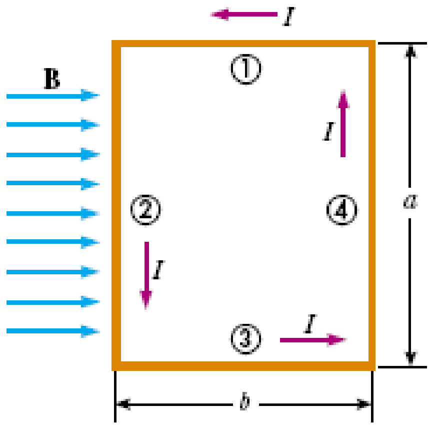
Έστω $\vec{B} = \text{σταθερό}$




$$\vec{F} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} = I\left(\oint d\vec{s}\right) \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$$

Η συνισταμένη μαγνητική δύναμη σε οποιονδήποτε κλειστό βρόχο ρεύματος που βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο είναι μηδενική.

## Ροπή πάνω σε Βρόχο που Διαρρέεται από Ρεύμα και Βρίσκεται μέσα σε Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο

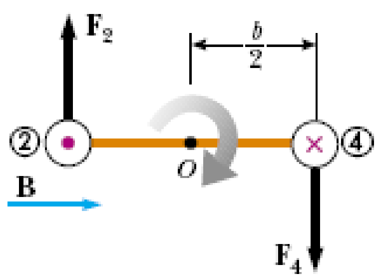


(a)

Έστω ορθογώνιο πλαίσιο που διαρρέεται από ρεύμα I, εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Οι πλευρές μήκους b δεν υπόκεινται σε καμία δύναμη, διότι τα σύρματα είναι παράλληλα προς το πεδίο:

$$d\vec{s} \times \vec{B} = 0$$



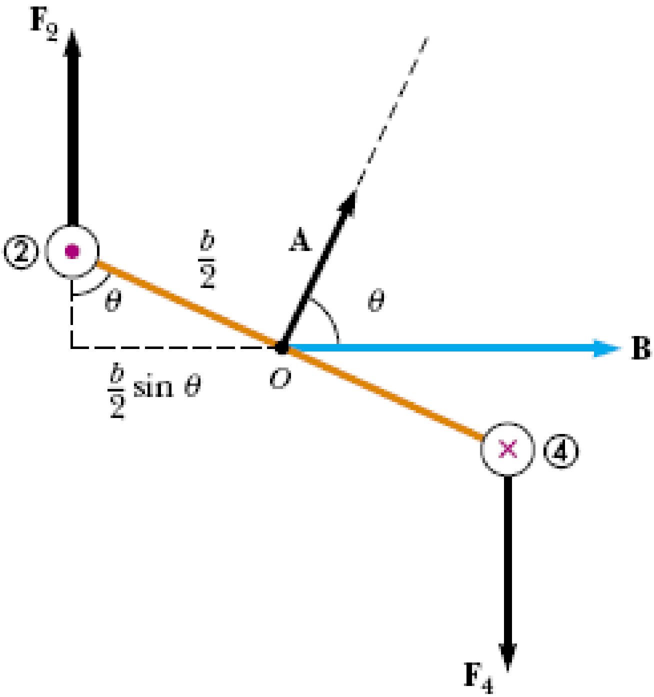
(b)

Το μέτρο των δυνάμεων που ασκούνται στις πλευρές a είναι (οι κατευθύνσεις φαίνονται στο σχήμα):

$$F_1 = F_2 = IaB$$

$$\tau_{max} = F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{2} = IabB \Rightarrow \tau_{max} = IAB$$

όπου A το εμβαδόν επιφανείας του βρόχου.




Ας υποθέσουμε ότι το ομογενές μαγνητικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ<90° με μία κάθετη στο επίπεδο του βρόχου (βλ. σχήμα).

$$\tau = F_2\frac{b}{2}\sin\theta + F_4\frac{b}{2}\sin\theta =$$

$$= IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) + IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \tau = IabB\sin\theta \Rightarrow \tau = IAB\sin\theta$$

Γενικά:

$$\vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}$$

όπου $\vec{A}$ είναι διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας Α και είναι κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου με κατεύθυνση σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (στην φορά του ρεύματος).

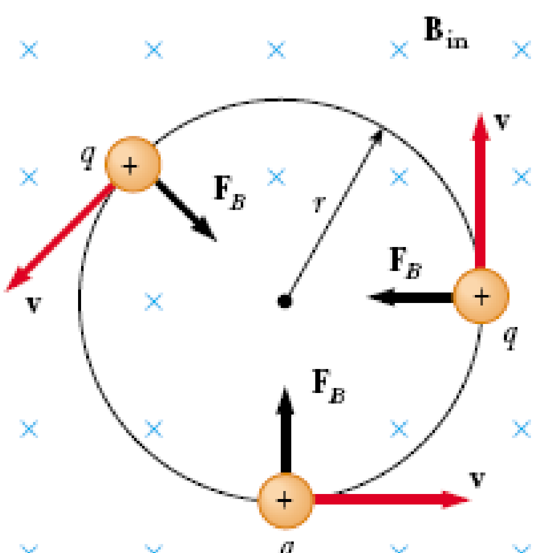
Ονομάζουμε μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$ του βρόχου: $\vec{\mu} = I\vec{A}$

Οπότε: $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

## Κίνηση Φορτισμένου Σωματίου μέσα σε Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο

Η μαγνητική δύναμη που δρα πάνω σε ένα φορτισμένο σωμάτιο το οποίο κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο είναι πάντοτε κάθετη στην κατεύθυνση της ταχύτητας του σωματίου.

Το έργο που παράγεται από την μαγνητική δύναμη είναι μηδενικό, διότι η μετατόπιση του φορτισμένου σωματίου είναι πάντοτε κάθετη στην διεύθυνση της δύναμης. Συνεπώς, ένα στατικό (δηλ. μη χρονικά μεταβαλλόμενο) μαγνητικό πεδίο μεταβάλλει μόνον την κατεύθυνση της ταχύτητας του φορτισμένου σωματίου, διότι δεν μπορεί να επηρεάσει το μέτρο της ταχύτητας ή την κινητική ενέργειά του.

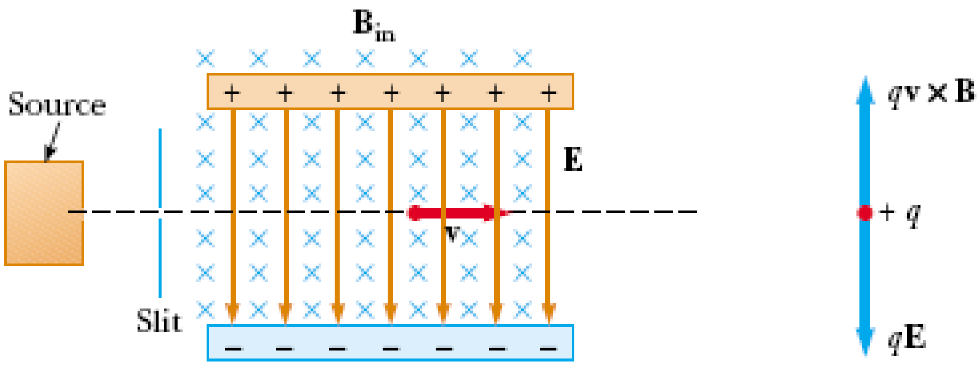



$$F = q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m\upsilon}{qB}$$

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{qB}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{qB}$$

# Δύναμη Lorentz

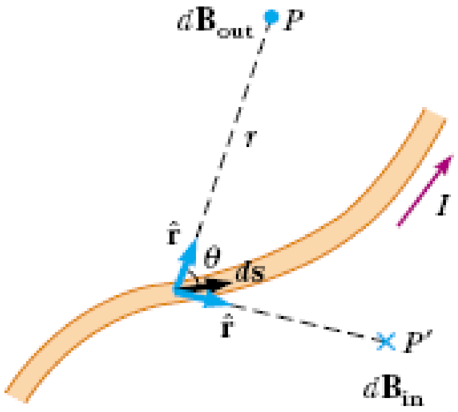



Φορτισμένο σωμάτιο κινείται υπό την ταυτόχρονη επίδραση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}}$$

# Κεφάλαιο 8ο: Πηγές Μαγνητικού Πεδίου

## Ο Νόμος των Biot και Savart:

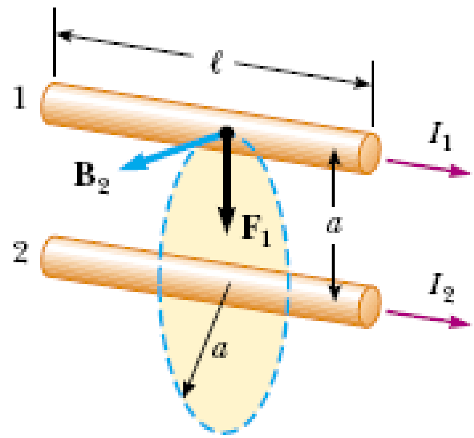



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\widehat{r}}{r^2}$$

Το ολικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που δημιουργείται σε ένα σημείο από έναν αγωγό πεπερασμένου μήκους, ισούται με το άθροισμα των συνεισφορών όλων των στοιχειωδών τμημάτων που συναποτελούν τον αγωγό.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}\times\widehat{r}}{r^2}$$

# Η Μαγνητική Δύναμη Ανάμεσα σε Δύο Παράλληλους Αγωγούς



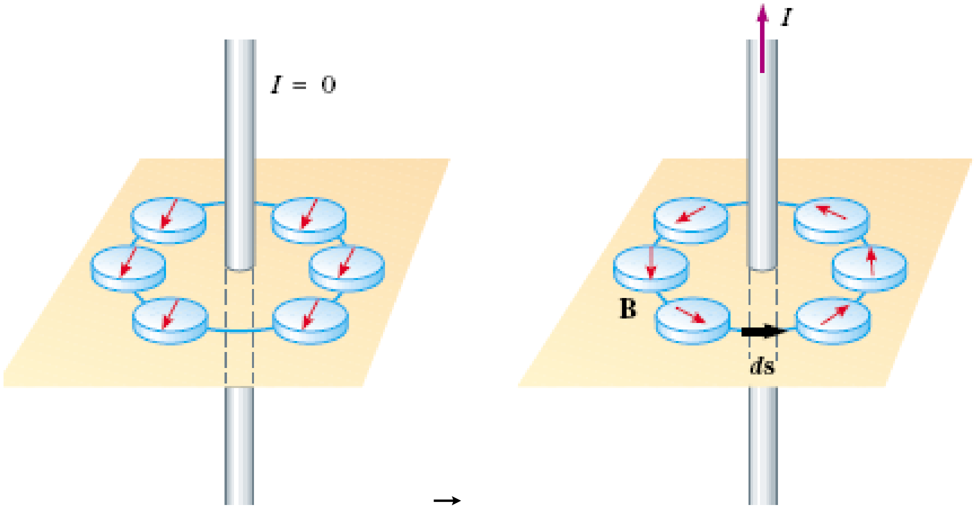

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \\ F_2 &= I_2 l B_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 l$$

αντίστοιχα $$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 l$$

Παράλληλοι αγωγοί που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται, ενώ αν τα ρεύματα είναι αντίρροπα οι παράλληλοι αγωγοί απωθούνται.

# Ο Νόμος του Ampère

Επίδραση μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από ρευματοφόρο αγωγό στον προσανατολισμό μαγνητικής βελόνας.

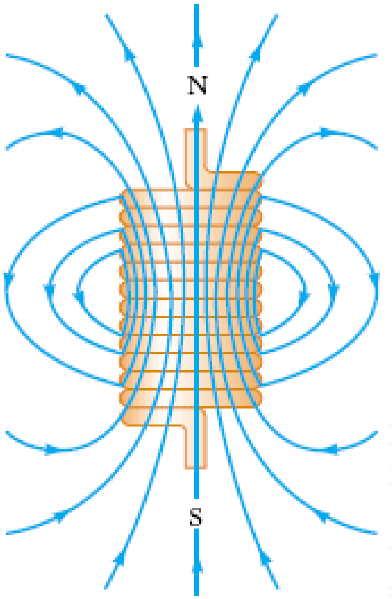



Το γραμμικό ολοκλήρωμα του $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ γύρω από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή ισούται με $\mu_0 I$, όπου I είναι το ολικό σταθερό ρεύμα που διέρχεται μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια η οποία περιβάλλεται από την κλειστή διαδρομή:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I}$$

Ο νόμος του Ampère ισχύει μόνο για σταθερά ρεύματα.

# Το Μαγνητικό Πεδίο Σωληνοειδούς

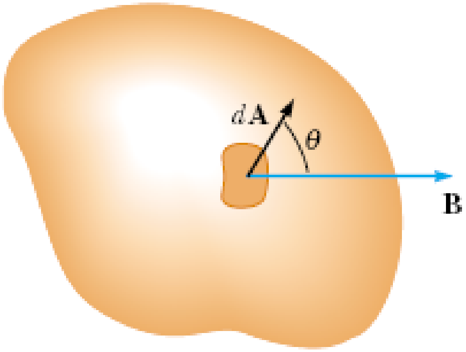



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 NI \Rightarrow B\cdot l = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

ή

$$B = \mu_0 nI$$

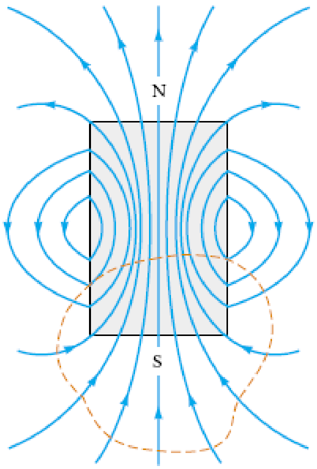
# Μαγνητική Ροή




$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_m = B\cdot A\cos\theta$$

## Ο Νόμος του Gauss στον Μαγνητισμό

Ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό ορίζει ότι η ολική (ή καθαρή) ροή γραμμών μαγνητικού πεδίου (ή μαγνητική ροή) που διαπερνά μία κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε μηδέν.




$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

## Το Ρεύμα Μετατόπισης και ο Γενικευμένος Νόμος του Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

όπου $\Phi_e$ η ροή του ηλεκτρικού πεδίου

# Ο Μαγνητισμός της Ύλης (Μαγνητικές Ιδιότητες της Ύλης)

Ονομάζουμε **παραμαγνητικά** και **σιδηρομαγνητικά** τα υλικά των οποίων τα άτομα έχουν μονίμως ροπή μαγνητικού διπόλου. Ονομάζουμε **διαμαγνητικά** τα υλικά των οποίων τα άτομα δεν έχουν μονίμως ροπή μαγνητικού διπόλου.

## Μαγνήτιση της Ύλης και Μαγνητίζον Πεδίο

Η μαγνητική κατάσταση των υλικών περιγράφεται από το διάνυσμα της μαγνήτισης $\vec{M}$. Το μέτρο του διανύσματος της μαγνήτισης ισούται με την μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου του υλικού.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$ (υλικό μαγνήτισης $\vec{M}$ μέσα σε πεδίο $\vec{B}_0$)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$ όπου $\vec{H}$ το μαγνητίζον πεδίο

(A/m μονάδες, όπως το $\vec{M}$ )

Σε πολλά υλικά, ειδικά στα παραμαγνητικά και στα διαμαγνητικά, ή μαγνήτιση $\vec{M}$ είναι ανάλογη προς το μαγνητίζον πεδίο $\vec{H}$. Γι αυτά τα γραμμικά υλικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{M} = \chi\vec{H}$$

όπου χ η μαγνητική επιδεκτικότητα. Εάν το υλικό είναι παραμαγνητικό η χ είναι θετική και επομένως το $\vec{M}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{H}$. Εάν όμως το υλικό είναι διαμαγνητικό τότε η χ είναι αρνητική και τα $\vec{M}$ και $\vec{H}$ είναι αντιπαράλληλα.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1+\chi)\vec{H}$$

ή $$\vec{B} = k_m\vec{H}$$

όπου $k_m$ ονομάζεται (απόλυτη) διαπερατότητα του υλικού και ισούται με:

$$k_m = \mu_0(1+\chi)$$

| | |
|---|---|
| Παραμαγνητικά υλικά | $k_m > \mu_0$, |
| Διαμαγνητικά υλικά | $k_m < \mu_0$, |
| Σιδηρομαγνητικά υλικά | $k_m >> \mu_0$ |

# Κεφάλαιο 9ο: Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή (Ο Νόμος του Faraday)

Πειράματα απέδειξαν ότι μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία επάγουν ηλεκτρικά ρεύματα.

## Ο Νόμος Επαγωγής του Faraday:

Ο νόμος επαγωγής του Faraday ορίζει ότι το μέτρο της ΗΕΔ που επάγεται σε ένα κύκλωμα ισούται με τον, ως προς τον χρόνο, ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

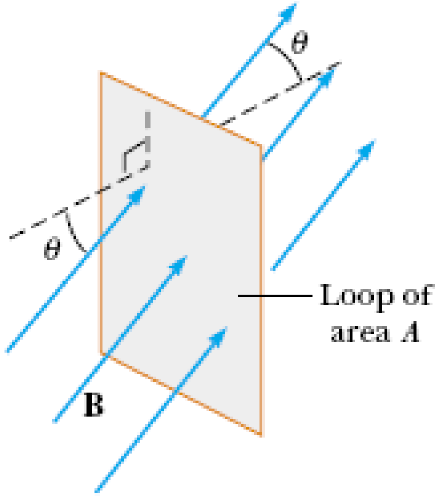
όπου

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Το αρνητικό πρόσημο απορρέει από τον κανόνα του Lenz.

Στην περίπτωση κυκλώματος με Ν ισεμβαδικούς βρόχους είναι:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt}$$




$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta)$$

ΗΕΔ εξ επαγωγής δημιουργείται όταν:

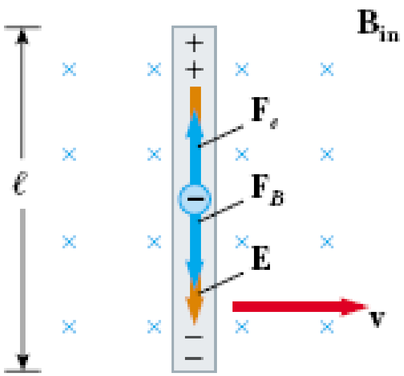
(α) μεταβάλλεται το μέτρο του $\vec{B}$ ως προς τον χρόνο,

(β) μεταβάλλεται το εμβαδόν της επιφάνειας του κυκλώματος ως προς τον χρόνο,

(γ) μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου η γωνία θ μεταξύ της καθέτου στο επίπεδο του βρόχου και της κατεύθυνσης του $\vec{B}$,

(δ) με οποιονδήποτε συνδυασμό των ανωτέρω.

# ΗΕΔ που Οφείλεται στην Σχετική Κίνηση Αγωγού και Μαγνητικού Πεδίου




Τα ηλεκτρόνια του αγωγού υπόκεινται σε μαγνητική δύναμη που κατευθύνεται κατά μήκος του αγωγού:

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

Η μαγνητική δύναμη ωθεί τα ηλεκτρόνια προς το κάτω μέρος του αγωγού, εισάγοντας με αυτόν τον τρόπο έναν διαχωρισμό των φορτίων στο εσωτερικό του αγωγού.

Έτσι στο πάνω μέρος εμφανίζεται περίσσεια θετικού φορτίου, ενώ στο κάτω μέρος περίσσεια αρνητικού. Αποτέλεσμα του διαχωρισμού του φορτίου είναι η εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού. Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δύναμη στα ηλεκτρόνια που έχει φορά αντίθετη της μαγνητικής. Σε κατάσταση ισορροπίας οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται και προφανώς έχουν ίσα μέτρα. Δηλαδή:

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = q\upsilon B \Rightarrow E = \upsilon B$$

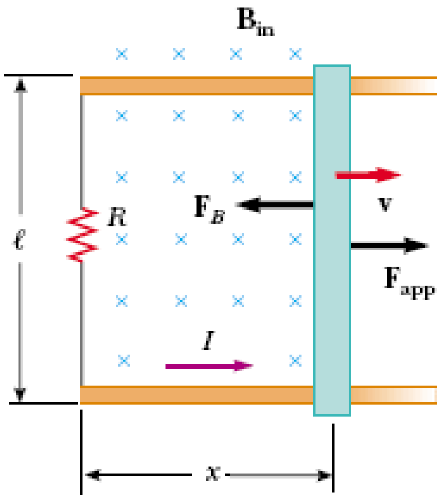
$$F_e = F_m \Rightarrow qE = q\upsilon B \Rightarrow E = \upsilon B$$

Συνεπώς, όταν η ταχύτητα παραμένει διανυσματικά σταθερή και το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές το αναπτυσσόμενο ηλεκτρικό πεδίο στον κινούμενο αγωγό είναι σταθερό.

$$V = E \cdot l \Rightarrow V = Bl\upsilon$$

Κατά την διάρκεια της κίνησης του αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο δημιουργείται διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα του.

Εάν η κατεύθυνση της κίνησης αναστραφεί, τότε αντιστρέφεται και η πολικότητα της διαφοράς δυναμικού.

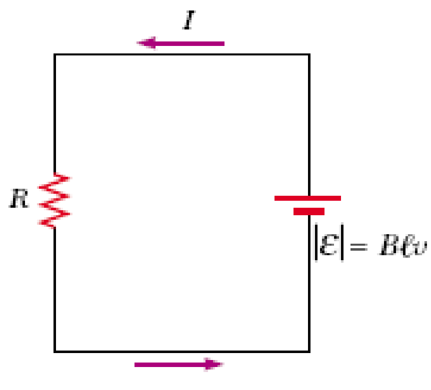


(a)

Έστω, κλειστό κύκλωμα στο οποίο ευθύγραμμος αγωγός μήκους l μπορεί να ολισθαίνει παράλληλα προς τον εαυτό του, διατηρώντας συνεχή επαφή με τους δύο παράλληλους αγωγούς.

Όλο το κύκλωμα βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

Ακόμη θεωρείστε ότι ο αγωγός δεν έχει αντίσταση και ότι η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι R.



(b)

$$A = l \cdot x \qquad \text{και} \qquad \Phi_m = B \cdot A = Blx$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BAx) = -Bl\frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -Bl\upsilon$$

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Bl\upsilon}{R}$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_m = F_{appl} \Rightarrow F_{appl} = IlB$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F_{appl} \cdot x}{t} \Rightarrow P = F_{appl} \cdot \upsilon = IlB\upsilon \Rightarrow P = \frac{B^2 l^2 \upsilon^2}{R}$$

## Ο Κανόνας του Lenz

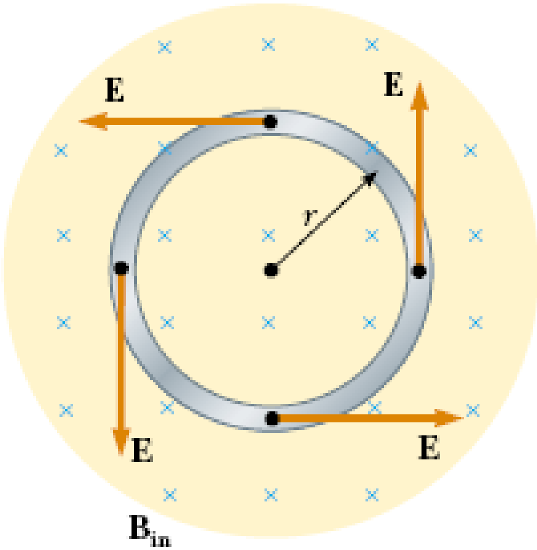
Το επαγόμενο ρεύμα τείνει να αναιρέσει το αίτιο που το προκαλεί. Ο κανόνας του Lenz είναι κατευθείαν αποτέλεσμα του νόμου διατήρησης της ενέργειας.

## Επαγόμενες ΗΕΔ και Επαγόμενα Ηλεκτρικά Πεδία

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου.

Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής ορίζει ότι η ως προς τον χρόνο μεταβαλλόμενη ροή μαγνητικού πεδίου δημιουργεί πάντοτε ηλεκτρικό πεδίο, ακόμη και στο κενό, όπου δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.

Έστω, δακτυλιοειδής αγώγιμος βρόχος ακτίνας r μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Θεωρείστε ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι $B(t)$.




$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Κατά την περιφορά ενός δοκιμαστικού φορτίου q, καταναλώνεται έργο:

$$W = V \cdot q \quad \text{ή} \quad W = \mathcal{E} \cdot q$$

Πάνω στο φορτίο ασκείται δύναμη $\vec{F} = q\vec{E}$

Που παράγει έργο: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} \Rightarrow W = qE2\pi r$

Προφανώς ισχύει: $q\mathcal{E} = qE2\pi r \Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Όμως

$$\Phi_m = BA = B\pi r^2$$

Οπότε

$$E = \frac{1}{2\pi r} \cdot \mathcal{E} \Rightarrow E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι αποτέλεσμα του κανόνα του Lenz και δηλώνει ότι το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ εναντιώνεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής.

Γενικά, ορίζουμε ότι η ΗΕΔ πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή ισούται με το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ πάνω στην διαδρομή.

Δηλαδή,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Η ΗΕΔ που εφαρμόζεται σε μία κλειστή διαδρομή ισούται με την ενέργεια που καταναλώνεται όταν μοναδιαίο φορτίο κινείται πάνω στην κλειστή διαδρομή επιστρέφοντας στο σημείο εκκίνησης.

Γενική μορφή του νόμου του Faraday:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, είναι πεδίο μη συντηρητικό (διατηρητικό) μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου και δημιουργείται από μαγνητικό πεδίο που επίσης μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου.

# Οι Υπέροχες Εξισώσεις του Maxwell

Νόμος του Gauss
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss
για τον μαγνητισμό
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

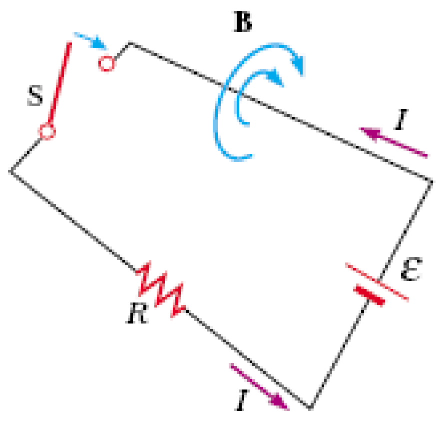
Νόμος του Faraday
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Νόμος των Ampère-Maxwell
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Δύναμη Lorentz
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

# Κεφάλαιο 10ο: Επαγωγή και Πηνία

## Αυτεπαγωγή




Όταν κλείσουμε τον διακόπτη το ρεύμα δεν αποκτά αμέσως, από το μηδέν, την μέγιστη τιμή του Ɛ/R.

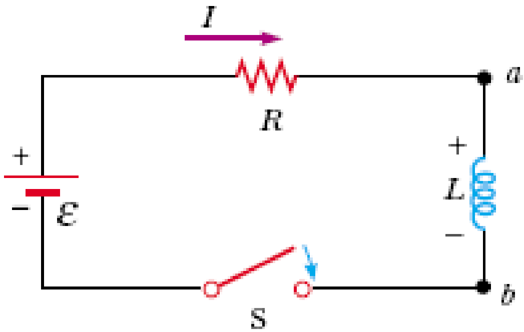
Καθώς το ρεύμα αυξάνεται, αυξάνεται ταυτόχρονα και η ροή του μαγνητικού πεδίου που διαπερνά το κύκλωμα, λόγω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα. Έτσι, αναπτύσσεται μία ΗΕΔ αυτεπαγωγής που εναντιώνεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα.

ΗΕΔ εξ επαγωγής $$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L = N\frac{\Phi_m}{I}$$

όπου *L* ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου, εκφράζει το μέτρο εναντίωσης στην μεταβολή του ρεύματος.

## Κύκλωμα RL




Θεωρείστε κύκλωμα R, L, ε, S. Κατά την χρονική στιγμή t = 0 ο διακόπτης S κλείνει και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα αρχίζει να αυξάνεται. Στα άκρα του πηνίου δημιουργείται μία ΗΕΔ η οποία εναντιώνεται στην αιτία που την δημιουργεί (αύξηση του ρεύματος).

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

ή

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I - \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$$

$$\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$$

θέτουμε

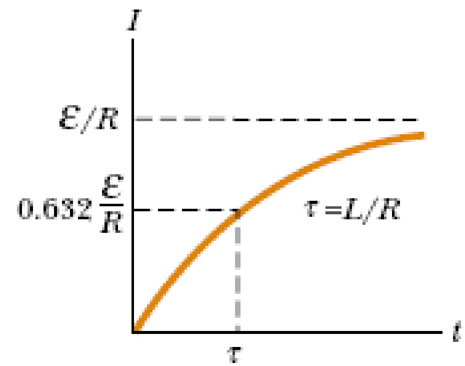
$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = x \Rightarrow dx = dI$$

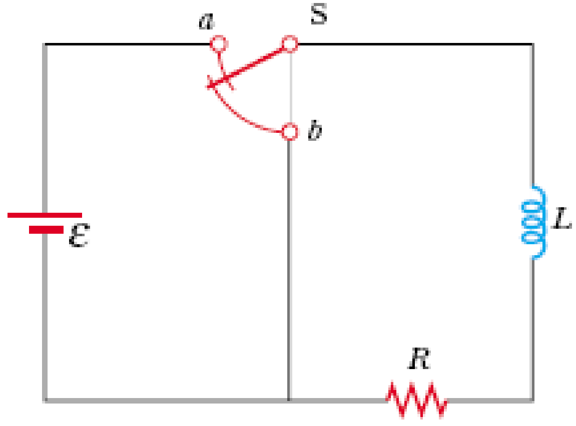
οπότε

$$\frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$ ή $$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow \ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \frac{x}{x_0} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x_0 e^{-\frac{R}{L}t} \\ t_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

ή $$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$ όπου $\tau = \dfrac{L}{R}$





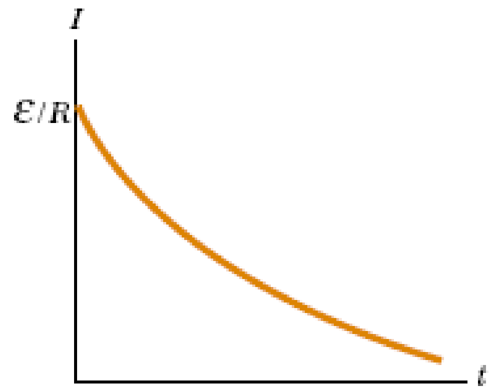

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, ο διακόπτης S βρισκόταν στην θέση a για αρκετό χρόνο, ώστε το ρεύμα να έχει πάρει την τιμή ισορροπίας του:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

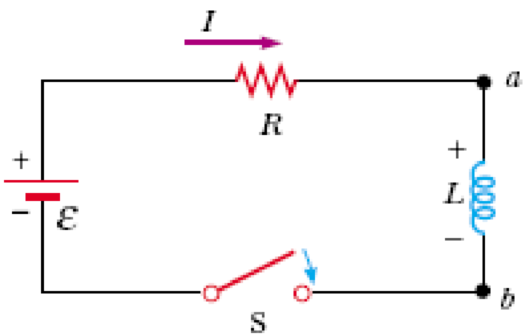
Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο διακόπτης στρέφεται στην θέση b.

$$IR + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \frac{I(t)}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



# Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου




$$\mathcal{E} = IR - L\frac{dI}{dt}$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $I$ προκύπτει μαθηματική σχέση για τον ρυθμό ενέργειας (ισχύς).

$$\mathcal{E}I = I^2R - LI\frac{dI}{dt}$$

Ρυθμός παροχής ενέργειας από την πηγή

Ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στην αντίσταση

Ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο

Έστω $U_m$ η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη κάποια στιγμή στο πηνίο, τότε:

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\,\frac{dI}{dt} \Rightarrow dU_m = LI \cdot dI \Rightarrow U_m = \int_0^I LI \cdot dI \Rightarrow U_m = \frac{1}{2}LI^2$$

Αν $\quad L = \mu_0 n^2 A l \quad$ και $\quad B = \mu_0 n I \Rightarrow I = \dfrac{B}{\mu_0 n}$

τότε

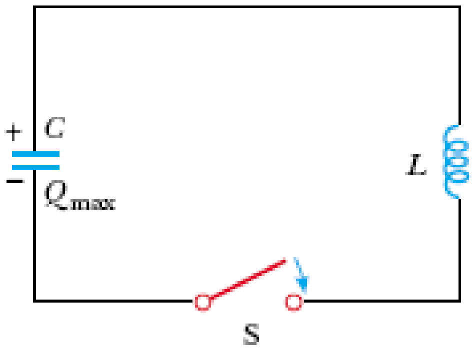
$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A l\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\underbrace{(Al)}_{V,\ \text{όγκος}} \Rightarrow$$

$$u_m = \frac{U_m}{Al} \Rightarrow u_m = \frac{B}{2\mu_0}$$

**Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας**

## Ταλαντώσεις σε Κύκλωμα LC

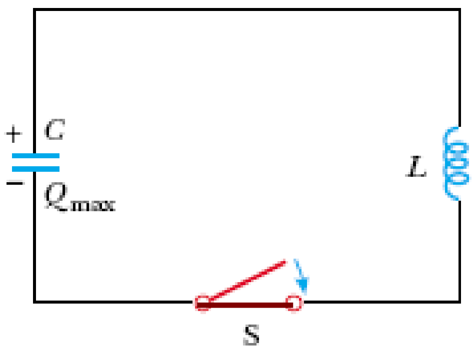
Όταν συνδέσουμε έναν φορτισμένο πυκνωτή με ένα πηνίο και κλείσουμε το κύκλωμα, θα παρατηρήσουμε ότι το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή θα ταλαντωθούν. Εάν η αντίσταση του κυκλώματος είναι μηδενική, τότε δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες λόγω φαινομένου Joule και οι ταλαντώσεις συνεχίζονται στο διηνεκές.




Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος. Τότε, η ολική ενέργεια του κυκλώματος είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή.

$$U = \frac{1}{2C} Q_m^{\ 2}$$

Την στιγμή αυτή I = 0 και δεν υπάρχει ενέργεια αποθηκευμένη στο πηνίο.




Καθώς εκφορτίζεται ο πυκνωτής δημιουργείται ρεύμα και μειώνεται η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή (ηλεκτρική ενέργεια), παράλληλα αυξάνεται η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου (μαγνητική ενέργεια).

Ενεργειακό ισοδύναμο του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

$t_0 = 0$,

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

Αν R = 0, τότε δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες και
U = σταθερό και dU/dt = 0

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2\right) = \frac{1}{2C} 2Q \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} L 2I \frac{dI}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \\ &\text{Όμως} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{και} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + L\frac{dQ}{dt}\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt}\left(\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2}\right) = 0 \Rightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q}$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q}$$

Αντιστοιχία με την εξίσωση του ΑΑΤ: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$

που έχει λύση: $x = A\cos(\omega t + \delta)$ όπου $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Άρα: $$\boxed{Q(t) = Q_m \cos(\omega t + \delta)}$$

όπου: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ και

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I(t) = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta)$$

**Οριακές συνθήκες:** $t_0 = 0$, $I = 0$ και $Q = Q_m$.

$$I(t) = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I(0) = -\omega Q_m \sin(\omega 0 + \delta) \Rightarrow 0 = -\omega Q_m \sin(\delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$$

Άρα: $Q(t) = Q_m \cos\omega t$ και $I(t) = -\omega Q \sin\omega t = -I_m \sin\omega t$

$$\left.\begin{array}{l} U_{C,\max} \text{ όταν } I = 0,\ U_{C,\max} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^{\ 2}}{C} \\ U_{L,\max} \text{ όταν } Q = 0,\ U_{L,\max} = \dfrac{1}{2}LI_m^{\ 2} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{C,\max} = U_{L,\max} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q_m^{\ 2}}{C} = \frac{1}{2}LI_m^{\ 2}$$

οπότε: $$U = \frac{1}{2}\frac{Q_m^{\ 2}}{C}(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q_m^{\ 2}}{C}$$

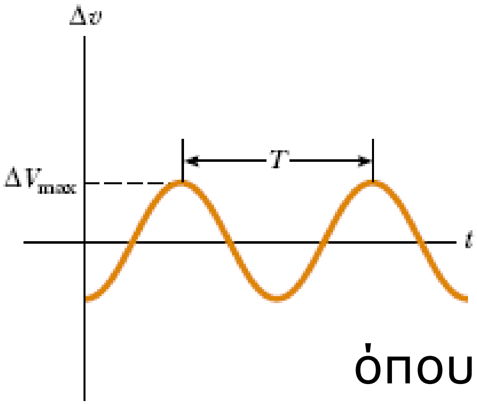
ή $$U = \frac{1}{2}LI_m^{\ 2}$$

# Κεφάλαιο 11ο: Κυκλώματα Εναλλασσομένου Ρεύματος

## Πηγές Εναλλασσομένου Ρεύματος και Διαγράμματα Περιστρεφομένων Διανυσμάτων

Μία τάση ονομάζεται εναλλασσόμενη όταν η τιμή της και η πολικότητά της είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου.

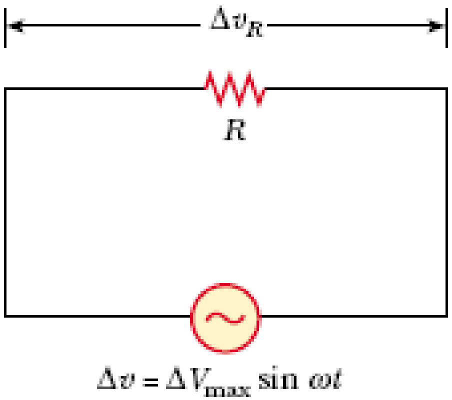
Περιστρεφόμενο πηνίο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, μέσα σε μαγνητικό πεδίο, επάγει στα άκρα του αρμονική ΗΕΔ:




$$V(t) = V_m \cdot \sin \omega t$$

όπου $\omega = 2\pi f$ και $V_m$ *το* πλάτος της τάσης

# Αντιστάσεις σε Κυκλώματα Εναλλασσομένου Ρεύματος




2ος Κανόνας του Kirchhoff:

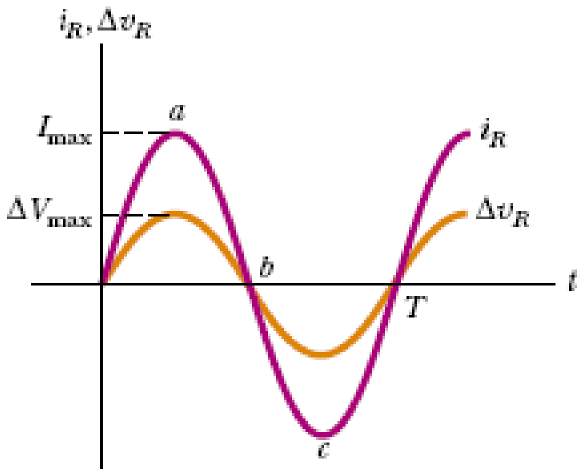
$$V - V_R = 0 \Rightarrow V = V_R \Rightarrow V_R = V_m \cdot \sin \omega t$$

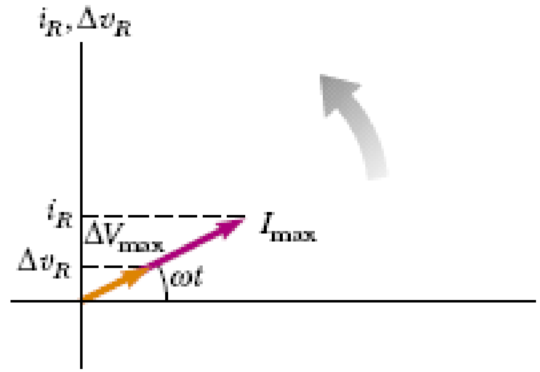
$V_R(t)$ η στιγμιαία πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης.

$$i_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_m \cdot \sin \omega t}{R} \Rightarrow i_R(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

όπου $I_m$ το μέγιστο ρεύμα: $$I_m = \frac{V_m}{R}$$

$i_R(t)$ και $V_R(t)$ μεγέθη συμφασικά (σε φάση)




Η μέση τιμή της έντασης του ρεύματος σε μία περίοδο είναι μηδενική.

Έχει αυτό επίδραση στα αποτελέσματα και στις εφαρμογές; ΟΧΙ.

Η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. Η ισχύς είναι:

$$P = i^2 R$$

Το θερμικό αποτέλεσμα εναλλασσομένου ρεύματος μέγιστης έντασης $I_m$ είναι διαφορετικό από το θερμικό αποτέλεσμα συνεχούς ρεύματος ίδιας έντασης.

Η ένταση του ρεύματος που δίνει ισοδύναμα αποτελέσματα με αυτά του συνεχούς (ένταση $I_m$) ονομάζεται ενεργός ένταση (ή μέση τετραγωνική τιμή) rms.

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m$$

Έστω $$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t \Rightarrow i^2(t) = I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

Η μέση τιμή του $i^2(t)$ συνδέεται με την μέση τιμή του $\sin^2\omega t$.

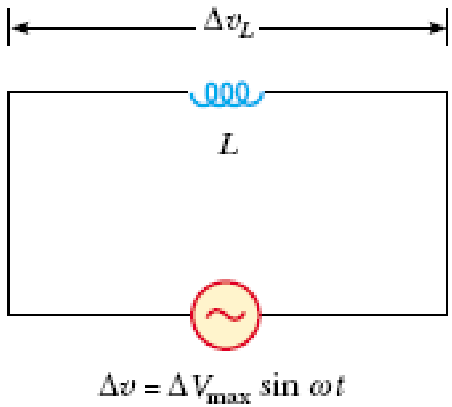
$$\left.\begin{array}{r}(\sin^2 \omega t)_{av} = (\cos^2 \omega t)_{av} \\ (\sin^2 \omega t)_{av} + (\cos^2 \omega t)_{av} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow 2(\sin^2 \omega t)_{av} = 1 \Rightarrow (\sin^2 \omega t)_{av} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς: $$\left(i^2(t)\right)_{av} = I_{rms}^2 = I_m^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{av} = I_{rms}^2 \cdot R$$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 V_m$$

# Πηνία σε Κυκλώματα Εναλλασσομένου Ρεύματος

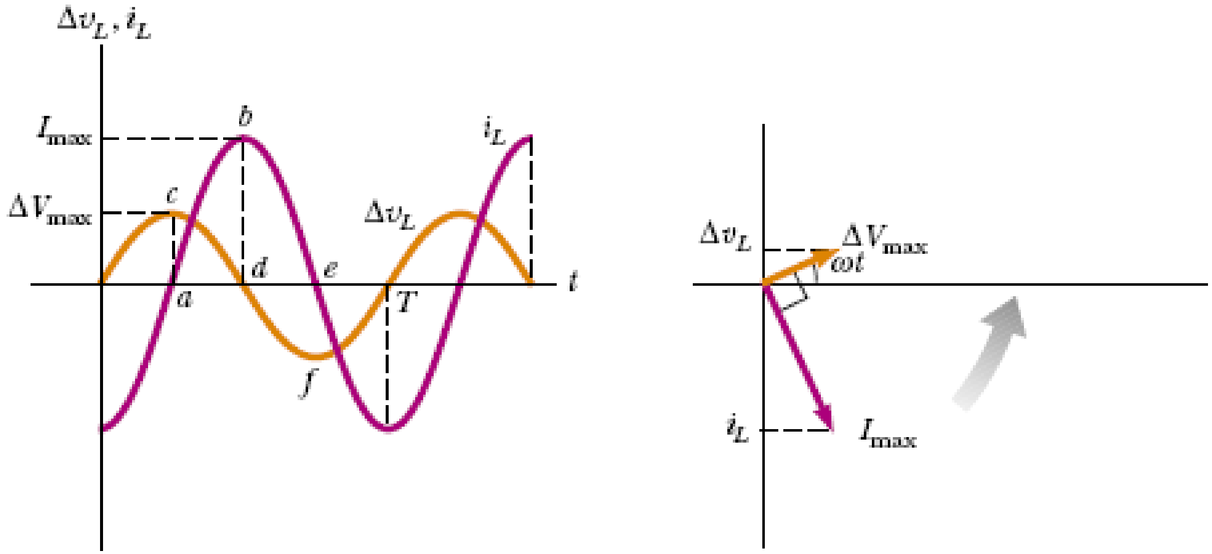



2ος Κανόνας του Kirchhoff:

$$\left.\begin{aligned} V_L + V = 0 \\ V_L = \mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L\frac{dI}{dt} = V_m \cdot \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow di = \frac{V_m}{L}\sin \omega t \cdot dt \Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{L}\int \sin \omega t \cdot dt \Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{L}(-\omega \cos \omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow i(t) = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t \\ \cos \omega t = -\sin[\omega t - \frac{\pi}{2}] \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{\omega L}\sin[\omega t - \frac{\pi}{2}]$$



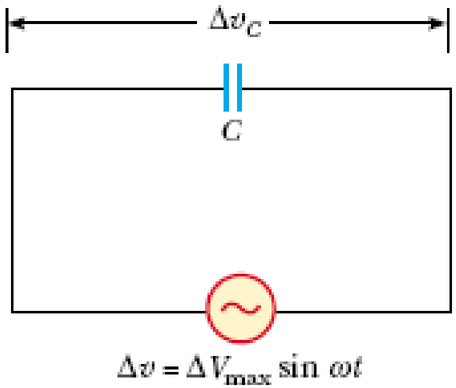

Η τάση $V_L$ στα άκρα του πηνίου είναι ανάλογη προς τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος d$i$/d$t$. Η μέγιστη τιμή του $V_L$ αντιστοιχεί στο μέγιστο του ρυθμού μεταβολής (όταν $i(t)$=0).

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{V_m}{X_L}$$

$X_L = \omega L$ η επαγωγική αντίσταση (ποσότητα εξαρτώμενη από την ω).

$$V_L(t) = V_m \sin \omega t = I_m X_L \sin \omega t$$

# Πυκνωτές σε Κυκλώματα Εναλλασσομένου Ρεύματος




2$^{ος}$ Κανόνας του Kirchhoff:

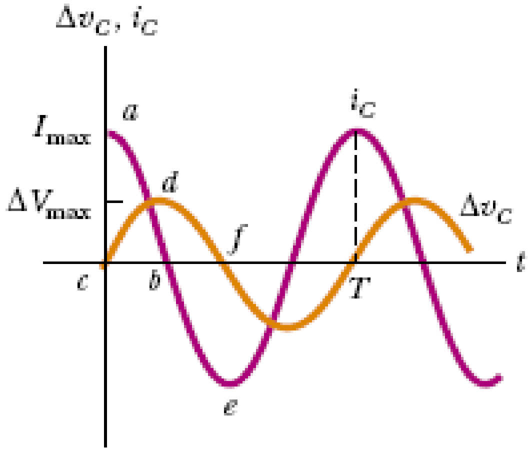
$$V - V_C = 0 \Rightarrow V = V_C = V_m \cdot \sin \omega t$$

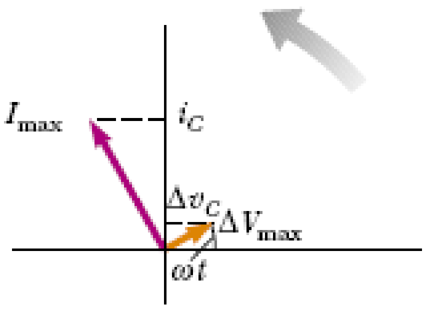
$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow Q(t) = CV_m \cdot \sin \omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} i_C = \dfrac{dQ}{dt} \Rightarrow i_C(t) = \omega C V_m \cdot \cos \omega t \\ \cos \omega t = \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow i_C(t) = \omega C V_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90ο.



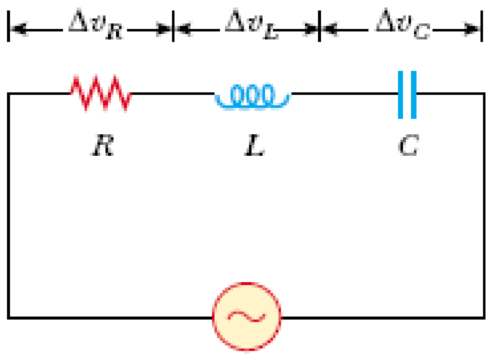




$$I_m = \omega C V_m \Rightarrow I_m = \frac{V_m}{X_C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$V_C(t) = I_m X_C \cdot \sin \omega t$$

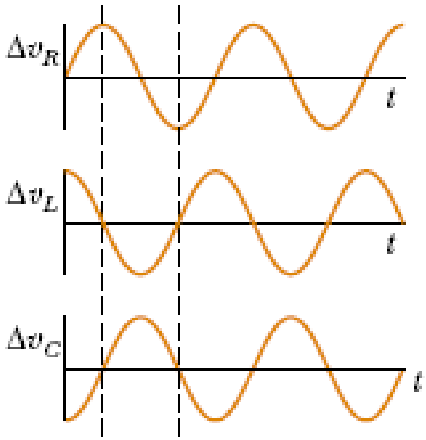
# Κύκλωμα RLC σε Σειρά




Το ρεύμα μεταβάλλεται ως εξής:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

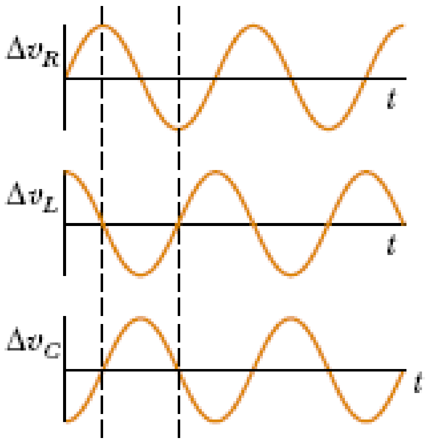
Αφού το κύκλωμα είναι σε σειρά, όλα τα στοιχεία του κυκλώματος διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.




Το ρεύμα και η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι σε φάση.

Στο πηνίο η φάση της τάσης προηγείται της φάσης του ρεύματος κατά $90^o$.

Στον πυκνωτή η τάση στους οπλισμούς του έπεται του ρεύματος κατά $90^o$.

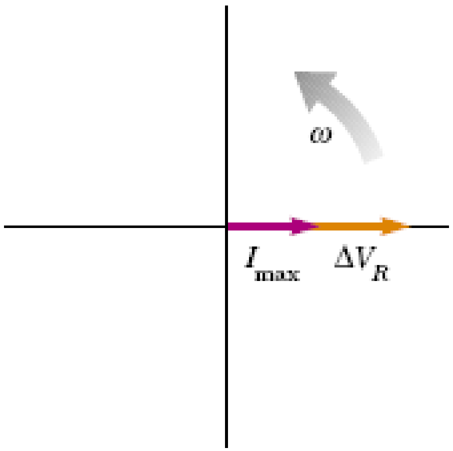


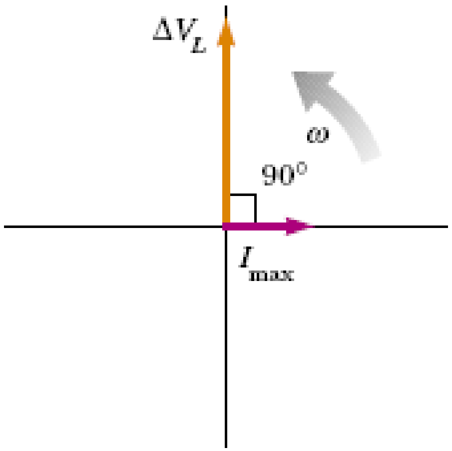

$$V_R(t) = I_m R \cdot \sin(\omega t)$$

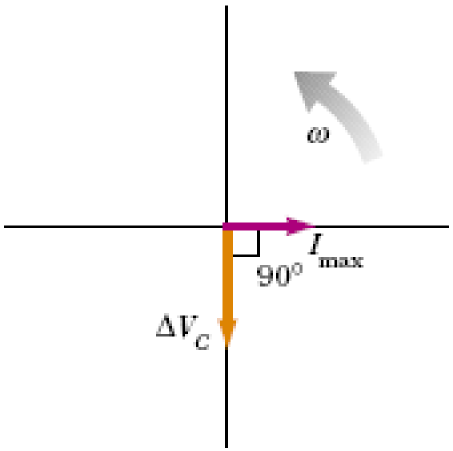
$$V_L(t) = I_m X_L \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = V_{L,m} \cdot \cos\omega t$$

$$V_C(t) = I_m X_C \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -V_{C,m} \cdot \cos\omega t$$

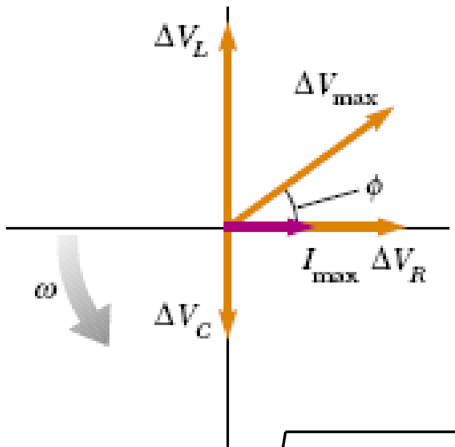
$$V_{R,m} = I_m R \qquad V_{L,m} = I_m X_L \qquad V_{C,m} = I_m X_C$$

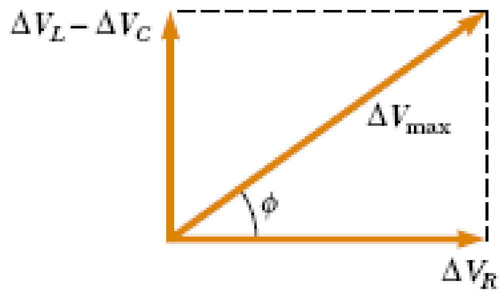


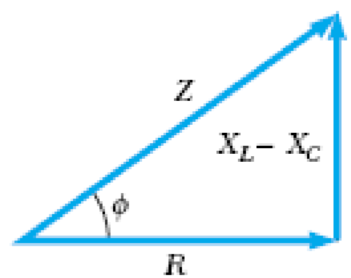
$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$




$$V_m = \sqrt{V_{R,m}^2 + (V_{L,m} - V_{C,m})^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2} \Rightarrow$$

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$




$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$V_m = I_m Z \qquad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad X_L = X_C, \quad \text{συντονισμός}$$

## Ισχύς Κυκλώματος Εναλλασσομένου Ρεύματος

Σε ένα κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος δεν υπάρχουν απώλειες ισχύος σε ιδανικούς πυκνωτές και σε ιδανικά πηνία.

$$P_{av} = I_{rms}^2 R$$

## Συντονισμός Κυκλώματος RLC σε Σειρά

Όταν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα κύκλωμα RLC σε σειρά έχει την μέγιστη τιμή της, τότε έχουμε συντονισμό.

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Το ρεύμα αποκτά την μέγιστη τιμή του, όταν $X_L = X_C$, δηλαδή $Z = R$.

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:


1. R. A. Serway, Physics for Scientists and Engineers, 3rd and 6th Edition.
2. H. D. Young, University Physics, 8th Edition.
3. D. Halliday, R. Resnick, Physics, 2nd Edition.