

1

$$\alpha) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 + 2(4 + 2\alpha) = 16 + 4\alpha$$

β) Ο Α αντιστρέφεται αν και μόνο αν $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -4$.

γ) Επιλέγω ως αξία ένα πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -4$.

Έστω $\alpha = -3$, και εφαρμόζω μέθοδο Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \\ \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{5}{4}\Gamma_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -5/2 & -3/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{4}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) = [I \mid A^{-1}]$$

4α για α = -3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

δ) Αφού $\det(A) \neq 0$, το σύστημα $Ax = b$ έχει
 μοναδική λύση με $x = A^{-1}b$, οπότε

$$x = \begin{pmatrix} 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

ε) Για α = -4,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1}$$

(3)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Βασικές μεταβλητές : x, y

Ελεύθερη μεταβλητή : z .

Ανάδραση ανικατάστατης :

$$y + 2z = -1 \Rightarrow \underline{y = -1 - 2z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$x - 4y - 5z = 1 \Rightarrow x - 4(-1 - 2z) - 5z = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{x = -3 - 3z}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Άρα το $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις με κορυφή :

$$(x, y, z) = (-3 - 3z, -1 - 2z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

2

4

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 1 \\ 1+b^2 & b & 1 \\ 1+c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b-a \\ c^2-a^2 & c-a \end{vmatrix} = (b^2-a^2)(c-a) - (b-a)(c^2-a^2) =$$

$$= (b-a)(c-a)(b+a-c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

3

$$A^3 - 6A^2 + 4A + 2I = 0 \Leftrightarrow A^3 - 6A^2 + 4A - 2I = 0$$

$$-\frac{1}{2}A^3 + 3A^2 - 2A = I \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \left(-\frac{1}{2}A^2 + 3A - 2I \right) = I \\ \alpha \lambda \lambda \alpha \text{ } \lambda \alpha \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}A^2 + 3A - 2I \right) \cdot A = I$$

δηλ. ο $B = -\frac{1}{2}A^2 + 3A - 2I$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$A \cdot B = B \cdot A = I$. Άρα ο A αντιστρέφεται

και $B = A^{-1}$.

4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & -6 & 6 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Βασικὲς μεταβλητὲς : x, y

Ελευθέρους $\Rightarrow z, w$.

~~από~~ $y + 4z - w = 4 \Rightarrow$

$$\boxed{y = -4z + w + 4, \quad z, w \in \mathbb{R}}$$

$$x + 2y - 7z = -3 \Rightarrow x + 2(-4z + w + 4) - 7z = -3 \Rightarrow$$

$$x - 8z + 2w + 4 - 7z = -3 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 15z - 2w - 7, \quad z, w \in \mathbb{R}}$$

Άρα τὸ συστήμα ἔχει ἀνέριστ λύσεις ms

τοπείας : $(x, y, z, w) = (15z - 2w - 7, -4z + w + 4, z, w), z, w \in \mathbb{R}$.